CIMNE
BARCELONA

VOLUMEN 2
4ª EDICIÓN

El Método de los Elementos Finitos
MECÁNICA DE SÓLIDOS Y FLUIDOS. DINÁMICA Y NO LINEALIDAD
Zienkiewicz - Taylor

VOLUMEN 2

El Método de los Elementos Finitos

MECÁNICA DE SÓLIDOS Y FLUIDOS. DINÁMICA Y NO LINEALIDAD

O. C. Zienkiewicz - R. L. Taylor

4ª EDICIÓN



CIMNE

El Método de los Elementos Finitos
Cuarta Edición

Volumen 2
Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y no Linealidad

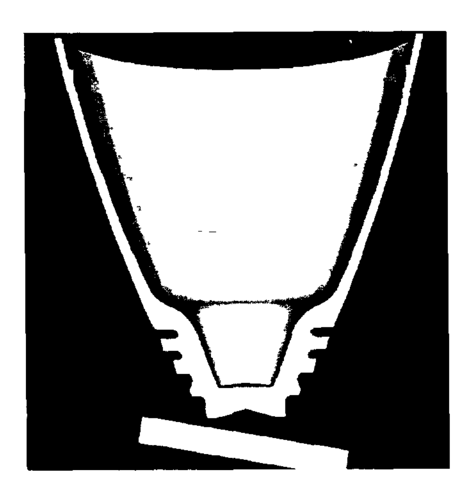
Página en color 1 Impacto de un proyectil con grandes deformaciones plásticas Cálculo tridimensional por elementos finitos con un código explícito (DYNA) en el que se aprecia la deformada del proyectil y distribución de la tensión efectiva para 6 y 20 ms Se muestra asimismo la geometría real del proyectil deformado para comparación El análisis utilizó 6074 nodos y 4356 elementos (Reproducido con permiso de la Universidad de California, Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore y el US Department of Energy)

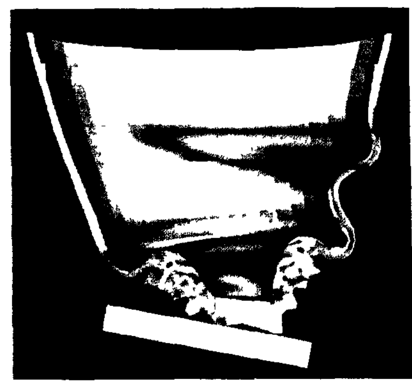
Página en color 2 Flujo no viscoso estacionario supersónico (Mach 2) y avión subsónico (Prototipo de avión rápido de la NASA y Boeing 747) Se muestran la malla en la superficie y las líneas de igual presión

Detalles del anális (solución simétrica)

	Avión supersónico	*Boeing 747*
Nº de tetraedros	76522	388614
Nº de caras sobre el avión	7662	26060
Tiempo de cálculo hasta la solución estacionaria (CRAY XMP 48)	45 min	180 min

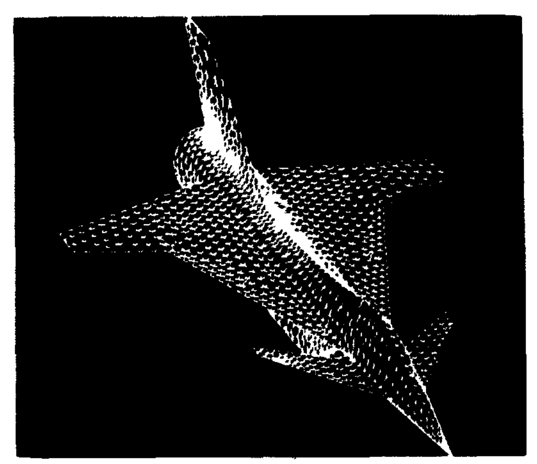
El análisis se realizó en el Institute for Numerical Methods in Engineering, University College of Swansea, País de Gales, U K (J Peraire, J Peiro, L Formaggia, K Morgan y O C Zienkiewicz, "Finite element Euler computations in three dimensions", *Int J Num Meth Engng*, **26**, 2135–59, 1988)

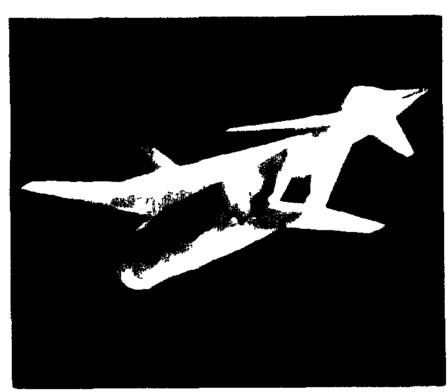


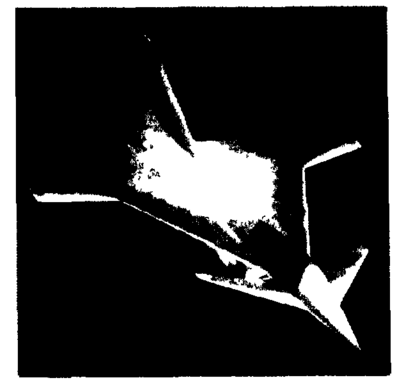


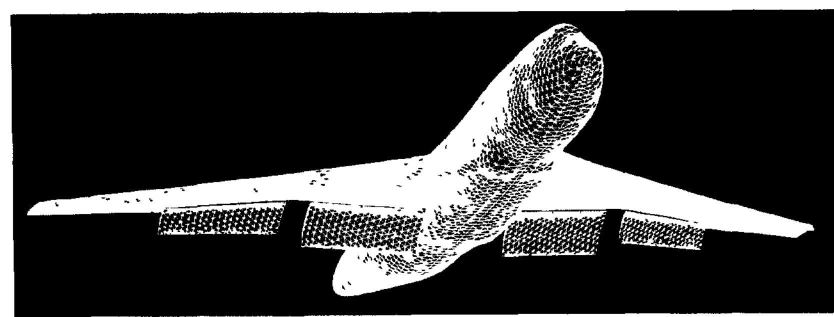














EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Cuarta Edición

Volumen 2: Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y No Linealidad

O.C. Zienkiewicz, CBE, FRS
Catedrático Unesco de Métodos Numéricos en Ingeniería
Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España
y
Profesor Emérito de la Universidad de Gales, Swansea

R.L. Taylor
Universidad de California, Berkeley

Traducción al castellano
Miguel Cervera Ruiz
Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra
Profesores de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España

McGraw-Hill
MADRID BUENOS AIRES CARACAS GUATEMALA LISBOA MEXICO
NEW YORK PANAMA SAN JUAN SANTA FE DE BOGOTA SANTIAGO SAO PAULO
AUCKLAND HAMBURGO LONDRES MILAN MONTREAL NUEVA DELHI PARIS
SAN FRANCISCO SIDNEY SINGAPUR ST LOUIS TOKIO TORONTO

CIMNE
Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Barcelona, España

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. Cuarta edición, Volumen 2

McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S.A.
Edificio OASIS-A, planta 1ª
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

Traducido de la cuarta edición en inglés de
FINITE ELEMENT METHOD Volume 2. Fourth edition

ISBN: 84-481-1760-3 (Vol. II)
ISBN: 84-481-0178-2 (Obra completa)
Depósito Legal B - 44236 - 94

Editor:Mariano J. Norte
Cubierta Felix Piñuela, Grafismo electrónico
Compuesto en CIMNE por Mª J. Samper y L. Ballivián

Imprime: Artes Gráficas Torres S.A.
Morales 17, 08029 Barcelona.

IMPRESO EN ESPAÑA-PRINTED IN SPAIN

A
Nuestras Familias

ÍNDICE

PRÓLOGO

El primer volumen de esta edición cubría aspectos básicos de las aproximaciones de elementos finitos en el contexto de problemas autoadjuntos lineales. Se trataron ejemplos típicos de elasticidad bi y tridimensional, conducción del calor y problemas electromagnéticos en régimen estacionario y se introdujo la estructura "esencial" de un programa de elementos finitos. Sin embargo, hubo que relegar muchos aspectos de la formulación y la aproximación al segundo volumen en el cual esperamos que el lector encontrará las respuestas a nuevos problemas, muchos de los cuales son de claro interés práctico.

La "línea divisoria" entre el contenido de los dos volúmenes no es necesariamente clara y ciertamente la selección del título no fue fácil. Esta dificultad sólo ha podido sortearse con una mayor clasificación y subdivisión -lo que explica el amplio subtítulo escogido-.

En esencia se cubren cuatro áreas.

1. *Placas y láminas* (Capítulos 1 al 6). Esta sección será naturalmente más atractiva para los interesados en mecánica de sólidos y trata un tipo de problemas específico. Sin embargo, como esta aplicación fue en la cual se utilizaron por primera vez los elementos finitos y es todavía un tema de continua investigación, hemos considerado su inclusión muy importante. Aquellos interesados en otros campos pueden omitir la lectura de esta parte, aunque por analogía pueden encontrarse muchas aplicaciones de los métodos en ella expuestos fuera de la mecánica estructural.
2. *Problemas no lineales* (Capítulos 7 y 8). En esta parte se abordan las técnicas especiales para resolver sistemas no lineales y esperamos que la presentación sea tal que los lectores de todas las especialidades lo encuentren de interés. Ciertamente, dichas aplicaciones no lineales son hoy en dia de gran importancia e interés práctico en la mayor parte de las áreas de ingeniería y física. En especial, se estudian con detalle problemas de plasticidad, viscoplasticidad, etc.
3. *Problemas dependientes del tiempo* (Capítulos 9 al 11). El contenido de esta sección, que podría estudiarse como una "metodología básica", concentra su atención en la dimensión tiempo. En ella se tratan problemas de valores propios y vibraciones, estudiándose las aproximaciones directas de elementos finitos en el dominio tiempo. Obviamente, existen de nuevo aplicaciones a un amplio rango de problemas que, como en la sección previa, son de interés para todos. En particular, nos gustaría llamar la atención del lector sobre el Capítulo 11, donde se tratan problemas acoplados. En él se presentan nuevos procedimientos y se introducen las posibilidades de las soluciones iterativas.
4. *Mecánica de fluidos (y problemas no autoadjuntos)* (Capítulos 12 al 15). Estu-

vimos muy tentados de publicar esta sección como un volumen separado. No sólo porque trata de un tema de interés propio, sino también porque extiende el campo de aplicación de los elementos finitos a un área difícil en la que no existen "principios variacionales" de forma natural. Los interesados en problemas de esta categoría "fuera" de la mecánica de fluidos (por ej., en el modelado de semiconductores) encontrarán el Capítulo 12 de especial interés.
Todo el campo de la mecánica de fluidos computacional, que ha estado dominado por las aproximaciones de diferencias finitas, está evolucionando de manera que se están reconociendo cada vez más las ventajas de los elementos finitos.
Esperamos que esta presentación mostrará al lector los logros recientes y las direcciones en las que se investiga hoy en día.

El Volumen 2 concluye con un capítulo sobre Técnicas de Programación, donde se amplía el programa básico presentado en el Volumen 1 al caso de problemas no lineales y transitorios. Claramente, la variedad de problemas presentados en el texto no permite un tratamiento detallado de todos los temas discutidos, pero esperamos que el formato esquemático presentado permitirá que los lectores hagan por sí mismos las ampliaciones que deseen.

El lector familiarizado con la tercera edición advertirá que 10 de los 16 capítulos son, o bien nuevos, o han sido reescritos. El contenido de los restantes (Capítulo 3, 4, 5, 6, 8 y 9), coincide esencialmente, salvo pequeñas actualizaciones, con el de la tercera edición.

El lapso de tiempo de dos años entre la aparición de los dos volúmenes se debe, en gran medida, a la constante investigación en muchas de las áreas que se discuten en este volumen y por ello solicitamos la comprensión de los lectores. Es sintomático que mayor parte de estos temas, introducidos por primera vez en 1967, son todavía de gran actividad científica, como indica el flujo continuo de publicaciones en esas áreas.

Llegado este punto nos gustaría agradecer de nuevo a nuestros colaboradores y amigos por muchos comentarios y sugerencias de gran utilidad. En particular agradecemos al Profesor Peter Betters por escribir una Sección del Capítulo 15 en la que ha resumido parte de su trabajo de investigación, y también por el trabajo que él y su esposa Jackie han hecho en el índice temático. Gracias también al Profesor Y. K. Cheung por su aportación sobre el método de la banda finita en el Capítulo 6.

O. C. Z. quisiera aprovechar esta oportunidad para agradecer a sus amigos en el Texas Institute of Computation Mechanics (Universidad de Texas, Austin, USA) y al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España) por proporcionar un entorno estimulante en el que se escribió la mayor parte de este segundo volumen.

OCZ y RLT

Capítulo 1

FLEXIÓN DE PLACAS Y LÁMINAS DELGADAS: PLACAS DELGADAS DE KIRCHHOFF Y REQUISITOS DE CONTINUIDAD C_1

1.1 Introducción

El análisis de placas y láminas fue una de las primeras aplicaciones del método de elementos finitos en los inicios de los años 60. En aquel tiempo no se apreciaron las diversas dificultades que se encontrarían más tarde y por esta razón en este tema se desarrolla todavía una investigación muy activa. Es, por consiguiente, adecuado que lo tratemos al inicio de este volumen. Aunque el tema sólo es de interés directo para ingenieros estructurales y mecánicos, incluye muchos aspectos de aplicabilidad general, y bastantes de los conocimientos que introduciremos pueden ser trasladados directamente a otros campos de aplicación.

Las placas y las láminas no son más que formas particulares de un sólido tridimensional cuyo tratamiento no presenta dificultades teóricas, al menos en el caso de elasticidad. Sin embargo, el espesor de estas estructuras es muy pequeño comparado con las otras dimensiones, y un tratamiento numérico tridimensional completo no sería solamente muy costoso sino que además podría conllevar serios problemas de mal condicionamiento de las ecuaciones. Al resolver estos problemas, mucho antes de que aparecieran los métodos numéricos, se introdujeron diferentes hipótesis que son hoy en día clásicas para modelar el comportamiento de dichas estructuras. Claramente dichas hipótesis se tradujeron en una serie de aproximaciones. Así, el tratamiento numérico que discutiremos se referirá en general a una teoría aproximada (o modelo matemático) cuya validez es restringida. En ocasiones apuntaremos las limitaciones de las hipótesis originales y también las modificaremos cuando sea necesario y conveniente. Esto puede hacerse sencillamente porque ahora difrutamos de más libertad de la que existía en la era anterior a los computadores.

La *teoría de placas delgadas* se basa en las hipótesis formalizadas por Kirchhoff en 1850[1] y ciertamente su nombre se asocia con frecuencia con esta teoría, aunque Sophie Germain presentó una versión anterior en 1811 [2,3]. Reissner introdujo en 1945[4] una relajación de las hipótesis de Kirchhoff y lo mismo hizo Mindlin de manera ligeramente diferente en 1951[5]. Estas teorías modificadas amplían el campo de aplicación a *placas gruesas* y asociaremos este nombre con los postulados de Reissner-Mindlin.

La teoría de *placas gruesas* es más sencilla de implementar en el método de elementos finitos, aunque en el inicio de su aplicación presentó más dificultades. Como es más conveniente introducir primero la teoría de placas gruesas y la imposición de hipótesis adicionales para limitarla al campo de *placas delgadas*, seguiremos ese camino en el presente capítulo. Sin embargo, cuando se discuta la solución numérica revertiremos el proceso y seguiremos el camino histórico de tratar en primer lugar las placas delgadas. La extensión a placas gruesas y lo que resulta ser una formulación mixta, será el tema del Capítulo 2.

En la teoría de placas delgadas es posible representar el estado de deformación por una cantidad w. Éste es el desplazamiento lateral del plano medio de la placa. Dicha *formulación es irreducible* e introduce las segundas derivadas de w en la definición de las deformaciones por lo que ahora hay que imponer condiciones de continuidad entre los elementos, no sólo en esta cantidad sino también en sus derivadas. Esta condición es necesaria para asegurar que la placa permanece continua y no se "pliega" †. Así, en los nodos sobre los contornos laterales de los elementos será necesario siempre utilizar los valores de w y de sus pendientes para imponer continuidad.

La obtención de las funciones de forma adecuadas es ahora mucho más compleja. Ciertamente, como se requiere continuidad de las pendientes sobre las caras comunes entre elementos, las dificultades matemáticas y computacionales crecen generalmente de manera desproporcionada. Es, sin embargo, relativamente simple obtener funciones de forma que, preservando la continuidad de w, pueden violar la continuidad de la pendiente entre elementos, aunque naturalmente no en el nodo donde se impone dicha continuidad. Si dichas funciones cumplen el *criterio de la parcela*, entonces se encontrará aún convergencia. La primera parte de este capítulo tratará sobre dichas funciones de forma *no conformes* o *incompatibles*. Posteriormente se introducirán nuevas soluciones mediante las cuales se restablecerá la continuidad. La solución con dichas funciones de forma conformes proporcionará las cotas de la energía de la solución correcta, pero en muchas ocasiones proporciona una precisión inferior que la obtenida con elemen-

† Cuando existen "plegamientos" la segunda derivada o curvatura se hace infinita y aparecen ciertos términos infinitos en la expresión de la energía.

tos no conformes. Para aplicación práctica se utilizan generalmente los métodos de la primera parte del capítulo.

La forma del elemento más sencilla es un rectángulo y éste se tratará en primer lugar. Los elementos cuadriláteros y triangulares son más complejos y se introducirán más tarde para analizar placas de forma arbitraria y problemas de láminas donde dichos elementos son esenciales.

El problema de placas delgadas, donde el funcional de la energía potencial contiene *derivadas segundas* de las funciones incógnitas, es característico de un gran número de problemas físicos asociados con ecuaciones diferenciales de *cuarto orden*. Así pues, aunque el capítulo se concentra en el problema estructural, el lector interesado en otros problemas físicos encontrará que los procedimientos desarrollados serán igualmente aplicables en muchos otros casos.

La dificultad de imponer continuidad C_1 en las funciones de forma ha conducido a muchos procedimientos alternativos para resolver problemas en los que es necesario sortear esta dificultad. Existen diferentes posibilidades. Dos de las más importantes son:

a) interpolación independiente de los giros $\boldsymbol{\theta}$ y la flecha w imponiendo la continuidad como una condición especial aplicada generalmente en puntos discretos solamente y
b) introducción de variables lagrangianas u otras variables para evitar la necesidad de la continuidad C_1.

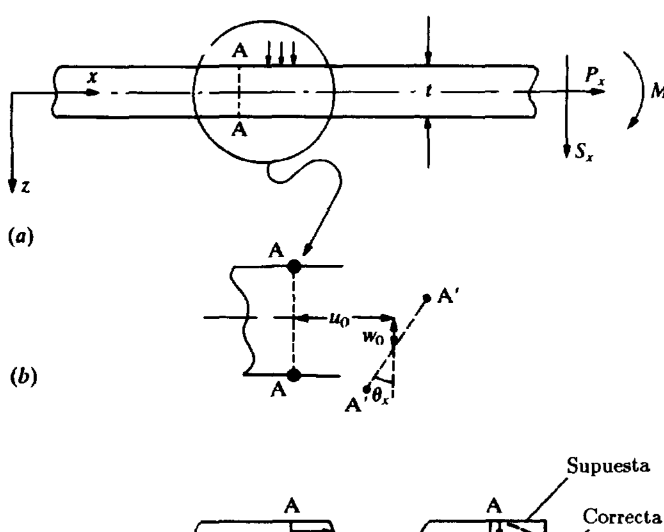
Ambos procedimientos están en la clase de las formulaciones mixtas y a finales del capítulo discutiremos estos casos brevemente. Sin embargo, en el segundo capítulo se efectuará una presentación más completa donde se tratarán simultáneamente los caso de aproximaciones delgadas y gruesas.

1.2 El problema de placas: formulaciones *delgada y gruesa*

1.2.1 *Ecuaciones básicas*. La mecánica de un problema de placas y láminas se ilustra quizá mejor en una dimensión como se aprecia en la Figura 1.1. En dicha figura se muestra una viga de ancho unidad sometida a la acción de los esfuerzos M_x, P_x y S_x.

Es intuitivo que a una cierta distancia del punto de aplicación de dichas fuerzas las secciones planas permanecerán planas durante el proceso de deformación. Esto es particularmente importante para las secciones que son originalmente normales al plano medio de la placa.

El postulado de que las secciones normales al plano medio permanecen planas durante la deformación es, por tanto, *la primera* y más importante hipótesis de la teoría de placas y láminas. A esto se añade la segunda hipótesis. Ésta simplemente afirma que las tensiones en la dirección normal



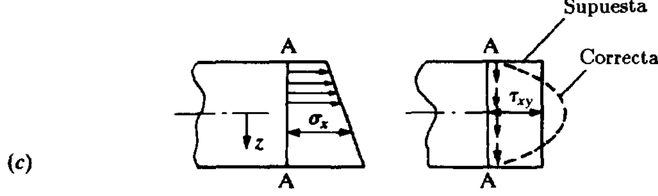


Figura 1 1 Desplazamientos y esfuerzos en una viga

z son pequeñas, esto es, del orden de las cargas laterales aplicadas q y por tanto las tensiones normales en dicha dirección pueden despreciarse. Esta "inconsistencia" en la aproximación se compensa mediante la hipótesis de tensión plana en cada plano horizontal

Con estas dos hipótesis es fácil observar que el estado total de deformación puede describirse por los desplazamientos u_0 y w_0 de la superficie media ($z = 0$) y el giro θ_x de la normal Así, los desplazamientos locales en las direcciones de los ejes x y z son

$$\begin{aligned} u &= -\theta_x z + u_0 \quad \text{con} \quad u_0 = u_0(x) \\ w &= w_0 \qquad\qquad\quad\; w_0 = w_0(x) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \theta_x = \theta_x(x) \end{aligned} \tag{1 1}$$

Inmediatamente pueden obtenerse las componentes de la deformación en el plano xz como

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} z + \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Escribiendo las ecuaciones constitutivas apropiadas pueden obtenerse las tensiones σ_x y τ_{xz} y, por consiguiente, se calculan los esfuerzos como

$$M_x = -\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z\, dz = -\frac{Et^3}{12}\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \tag{1 3a}$$

$$P_x = Et\frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{1.3b}$$

$$S_x = \beta G t\left(-\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \tag{1 3c}$$

donde E y G son el módulo de Young y el coeficiene de rigidez a cortante, respectivamente †

La formulación se completa por las tres ecuaciones de equilibrio siguientes

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + S_x = 0 \tag{1 4a}$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + q = 0 \tag{1.4b}$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = 0 \tag{1 4c}$$

En el caso elástico de una viga recta es fácil ver que los desplazamientos y las fuerzas en el plano u_0 y P_x están desacoplados y el problema de la deformación lateral puede tratarse independientemente. En este capítulo consideraremos por tanto únicamente la flexión, retornando al problema combinado, cárácterístico del comportamiento de láminas, más tarde.

Las Ecs. (1 1) a (1.4) son típicas de vigas gruesas, y la teoría de vigas delgadas introduce una hipótesis adicional Dicha hipótesis es simplemente que la deformación transversal es nula y, por consiguiente, $G = \infty$. La Ec. (1.3c) se convierte por tanto en

$$-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{1.5}$$

† Se ha introducido una constante β para tener en cuenta el hecho de que las tensiones cortantes no son constantes sobre el espesor Un valor de $\beta = 5/6$ es exacto para una sección rectangular homogénea y corresponde a una distribución de la tensión cortante parabólica

Esta hipótesis de vigas esbeltas es equivalente a suponer que las normales al plano medio permanecen normales al mismo durante la deformación y es la conocida hipótesis de Bernoulli-Euler. Esta hipótesis es muy utilizada en la práctica y demuestra ser adecuada para muchos problemas estructurales, aunque naturalmente no debe tomarse literalmente, ya que el comportamiento real cerca de apoyos o donde la acción local de las cargas es importante, es tridimensional.

En la Figura 1.2 se muestran algunas de las condiciones de contorno que se imponen en vigas (y placas) e inmediatamente se advierte que la representación esquemática de un apoyo sencillo como un triángulo conduciría a desplazamientos y tensiones infinitas. Naturalmente, añadiendo una rótula rígida como se muestra en la figura, se altera el comportamiento de manera que coincide con el usualmente supuesto.

El problema tridimensional de vigas y la introducción de las hipótesis gruesa y delgada se traslada directamente al caso de placas. En la Figura 1.3 se ilustran las extensiones necesarias y escribimos, en lugar de la Ec. (1.1) (suponiendo que u_0 y v_0 son cero)

$$u = -\theta_x z \qquad v = -\theta_y z \qquad w = w_0 \tag{1.6}$$

siendo θ_x, θ_y y w_0 funciones de x e y solamente.

Las deformaciones se separan ahora en sus componentes en el plano (flexión) y de cortante transversal, obteniendo en lugar de la Ec. (1.2)

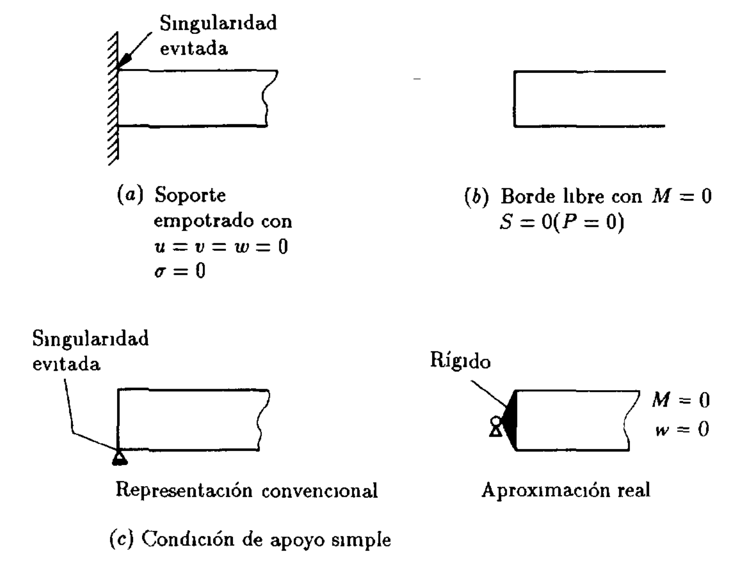
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \equiv -z\mathbf{L}\boldsymbol{\theta} \tag{1.7a}$$

y

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \equiv -\boldsymbol{\theta} + \nabla w \tag{1.7b}$$

Se advierte ahora que además de los momentos flectores normales definidos por la expresion (1.3a) en las direcciones x e y, aparece un momento torsor definido por

$$M_{xy} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz \tag{1.8}$$



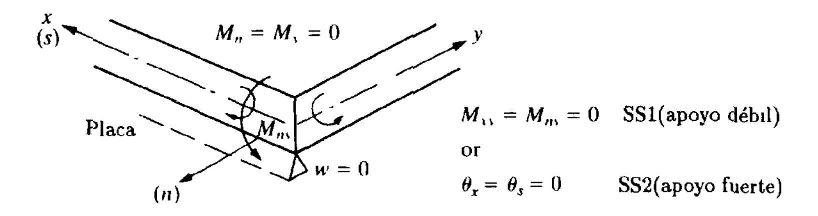


Figura 1.2 Condiciones de apoyo para una viga y una placa. (Nota: La forma para el apoyo simple conduce a desplazamientos infinitos –En la realidad esto no es así–)

e introduciendo las relaciones constitutivas apropiadas se pueden relacionar todos los momentos con las derivadas de los desplazamientos. Para una sección isótropa se puede escribir en lugar de la Ec. (1.3)

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{L}\boldsymbol{\theta} \tag{1.9}$$

donde, suponiendo un estado de tensión plana en cada capa,

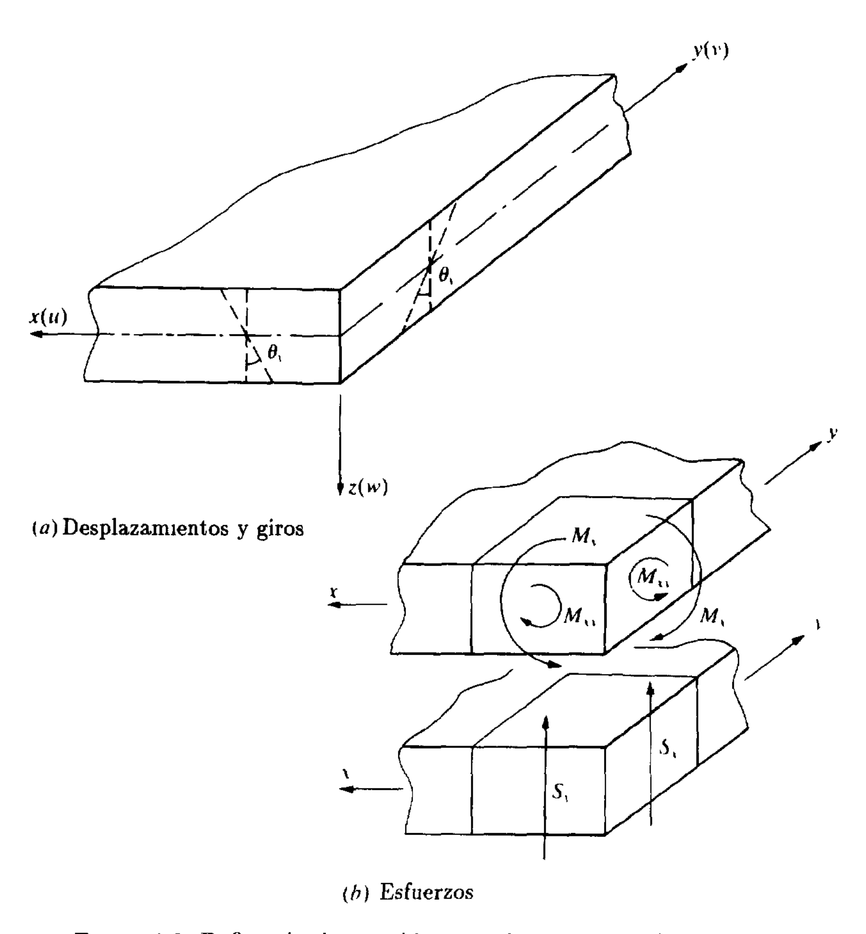


Figura 1.3 Definición de variables para la aproximación de placas

$$\mathbf{D} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

siendo ν el coeficiente de Poisson. Además, los esfuerzos cortantes son

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(-\boldsymbol{\theta} + \nabla w) \tag{1.10}$$

Para elasticidad isótropa (aunque aquí hemos relacionado de manera

deliberada E y ν para permitir posibles diferentes rigideces de cortante)

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha = \beta G t \tag{1.11}$$

Naturalmente, las relaciones constitutivas pueden ampliarse de manera sencilla al caso anisótropo o heterogéneo, tal como sucede cuando varias capas del material se ensamblan para *formar un compuesto*. La única diferencia aparente es la estructura de las matrices $\mathbf{D}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, que pueden encontrarse mediante una sencilla integración

Las ecuaciones de comportamiento de placas delgadas y gruesas se completan mediante las ecuaciones de equilibrio De nuevo, omitiendo el *comportamiento en el plano* se tiene en lugar de la Ec (1.4a)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{L}^T\mathbf{M} + \mathbf{S} = 0 \tag{1.12}$$

y, en lugar de la Ec (1.4b)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} + q \equiv \nabla^T\mathbf{S} + q = 0 \tag{1.13}$$

Las Ecs. (1.9) a (1.13) son la base a partir de la cual pueden obtenerse las soluciones de placas delgadas y gruesas Para placas gruesas, todas (o casi todas) las variables pueden aproximarse independientemente, lo que conduce a una formulación mixta como discutiremos en el Capítulo 2 y también brevemente en la Sección 1.16 de este capítulo

Para placas delgadas en las que se suprime la deformación por cortante, la Ec (1.10) se reescribe

$$-\boldsymbol{\theta} + \nabla \mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{1.14}$$

lo que permite escribir ahora ambas formas, irreducible y mixta En particular, es sencillo eliminar $\mathbf{M}$, $\mathbf{S}$ y $\boldsymbol{\theta}$ y dejar solamente w como variable.

Aplicando el operador ∇^T a la Ec (1.12) e insertando (1.9) y (1.13) y finalmente reemplazando $\boldsymbol{\theta}$ mediante (1.14) se obtiene la ecuación escalar

$$(\mathbf{L}\nabla)^T\mathbf{D}\mathbf{L}\nabla w + q = 0 \tag{1.15}$$

donde

$$(\mathbf{L}\nabla)^T \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right]$$

En el caso de **D** constante la ecuación anterior coincide con la conocida ecuación biarmónica de la teoría de placas

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + q\frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} = 0 \qquad (1.16)$$

En la primera parte de este capítulo estudiaremos dicha formulación [empezando de la Ec. (1.15)] y la presencia de las derivadas cuartas indica claramente que, incluso después de la integración por partes, necesitaremos continuidad C_1 para las funciones de forma.

1.2.2 *Condiciones de contorno.* Las condiciones de contorno que han de imponerse en el problema (ver Figuras 1.2 y 1.4) varían desde

a) *contorno cargado*, donde los esfuerzos M_n, M_{ns} y S_n toman valores prescritos, aquí n y s son direcciones ortogonales tangenciales al contorno (el borde libre es un caso especial con valores nulos de dichos esfuerzos).
b) *contorno fijo*, donde los desplazamientos conjugados a los esfuerzos, o sea, θ_n, θ_s y w están definidos† (un empotramiento es un caso especial con valores nulos de dichos movimientos).
c) "*condiciones de contorno mixtas*", donde se especifican las fuerzas y movimientos. Un caso típico aquí es el borde apoyado (ver Figura 1.2). En éste, claramente $M_n = 0$ y $w = 0$, pero es menos claro si M_{ns} y θ_s necesitan prescribirse. La prescripción de $M_{ns} = 0$ es *físicamente* una condición más correcta y no conduce a ningún problema. Esto debería siempre aceptarse para el caso de placas gruesas. En placas delgadas, θ_s está automáticamente definido como cero y se encontrarán ciertas dificultades y en algunos casos anomalías asociadas con esta hipótesis [6,7] Por ejemplo, en la Figura 1.4 se muestra como una definición de $\theta_s = 0$ en los nodos esquina, implícita en placas delgadas, conduce a la prescripción de todos los parámetros de contorno, lo que es idéntico a las condiciones de contorno en una placa empotrada.

1.2.3 *La aproximación irreducible en placas delgadas.* La formulación de placas delgadas expresada en función de una única w es claramente irreducible y, de hecho, es típica de una formulación en desplazamientos.

† Adviértase que en placas degadas la prescripción de w a lo largo de s define automáticamente θ_s mediante la Ec. (1.14), pero esto no es así en placas gruesas donde ambas cantidades tienen que prescribirse de manera independiente.

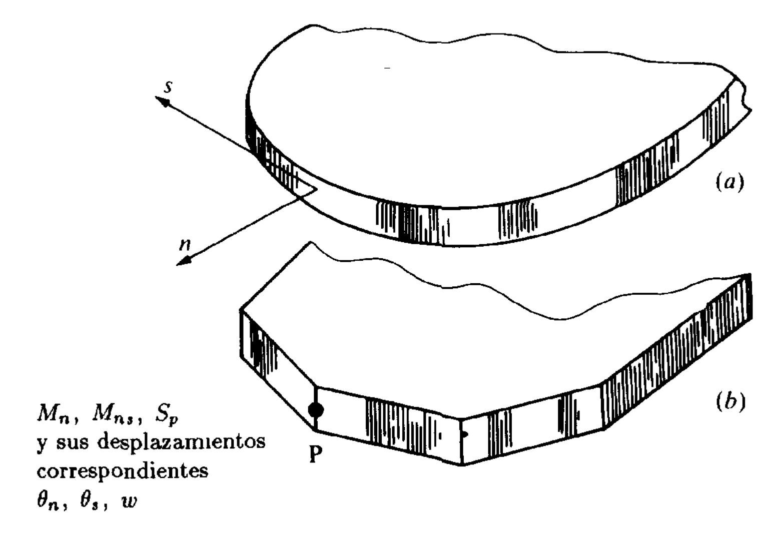


Figura 1.4 Fuerzas en el contorno y desplazamientos conjugados. Adviértase que la condición de contorno simplemente apoyado requiriendo $M_n = 0$, $\theta_s = 0$ y $w = 0$ es idéntica en un nodo esquina al prescribir $\theta_n = \theta_s = 0$, es decir, un apoyo empotrado. Esto conduce a una paradoja si un contorno curvo (a) se modela como un polígono (b).

Las Ecs. (1.12) y (1.13) pueden escribirse conjuntamente como

$$(\mathbf{L}\nabla)^T \mathbf{M} + q = 0 \qquad (1.17)$$

la relación constitutiva (1.9) puede reformularse utilizando (1.14) como

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{L}\nabla w \qquad (1.18)$$

Con una discretización

$$w = \mathbf{N}\bar{\mathbf{a}} \qquad (1.19)$$

donde $\bar{\mathbf{a}}$ son parámetros apropiados puede obtenerse para el caso lineal las ecuaciones de aproximación en desplazamientos estándar

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{f} \qquad (1.20)$$

con

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{a}} = \left(\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, d\Omega\right)\bar{\mathbf{a}} \equiv \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{M}\, d\Omega \qquad (1.21a)$$

y

$$\mathbf{f} = \int_\Omega \mathbf{N}^T q \, d\Omega + \mathbf{f}_b \qquad (1.21b)$$

donde $\mathbf{f}_b$ es la contribución del contorno que se dicutirá más tarde y

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{a}} \qquad (1.21c)$$

con

$$\mathbf{B} = (\mathbf{L}\nabla)\mathbf{N} \qquad (1.21d)$$

La expresión de las ecuaciones anteriores surge, bien de la forma débil de la Ec. (1.17) obtenida ponderando con $\mathbf{N}^T$ e integrando por partes (dos veces) o, más directamente, por aplicación del Principio de Trabajos Virtuales. Por cualquier camino que escoja el lector reconocerá los conocidos ingredientes de una formulación en desplazamientos (ver Capítulo 12, Volumen 1) y los procedimientos son casi automáticos una vez que se ha escogido $\mathbf{N}$.

Es interesante, y ciertamente importante, advertir que cuando se prescriben las fuerzas en el contorno a valores no nulos, el término de fuerzas $\mathbf{f}_b$ incluye todos los valores de M_n, M_{ns} y S independiente de si se utiliza una formulación delgada o gruesa. El lector puede verificar que este término es

$$\mathbf{f}_b = \int_\Gamma \left(\boldsymbol{\theta}_n^* \bar{M}_n + \boldsymbol{\theta}_s^* \bar{M}_{ns} + \mathbf{w}^* S_n \right) d\Gamma \qquad (1.22)$$

donde $\bar{M}_n$, etc., son valores prescritos y la flecha y los giros virtuales vienen dados por

$$\boldsymbol{\theta}_n^* = \frac{\partial}{\partial n}\mathbf{N}^T \qquad \boldsymbol{\theta}_s^* = \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{N}^T \qquad \mathbf{w}^* = \mathbf{N}^T \qquad (1.23)$$

para placas delgadas [aunque naturalmente la relación (1.22) es válida también para placas gruesas].

1.2.4 *Requisitos de continuidad para las funciones de forma (continuidad C_1)*. Como ya hemos mencionado, es necesario que las funciones de forma sean de continuidad C_1 para el caso de la formulación de placas delgadas irreducible. Esta continuidad es difícil de obtener y las razones de ello se explican a continuación.

Para asegurar la continuidad de la flecha y su pendiente normal a lo largo de un contorno entre elementos debemos definir de manera única tanto w como $\dfrac{\partial w}{\partial n}$ mediante parámetros nodales a lo largo de dicho contorno. Consideremos la Figura 1.5 que muestra los lados 1-2 de un elemento rectangular. La dirección normal n es de hecho la de y y se desea que w y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ estén definidos unívocamente por valores de w, $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ en los nodos contenidos a lo largo de dicho lado.

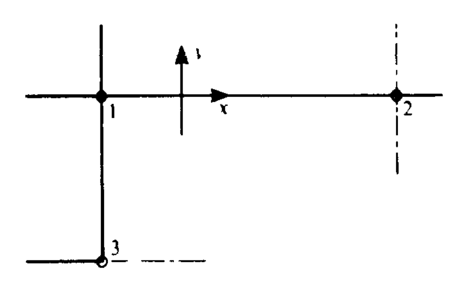


Figura 1.5 Condición de continuidad para las derivadas normales

Siguiendo los principios del Capítulo 7, escribiríamos a lo largo de 1-2,

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \cdots$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial y} = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \cdots \qquad (1.24)$$

con el número preciso de constantes en cada expresión para determinar las expresiones en función de los parámetros nodales a lo largo de cada lado en cuestión.

Así, por ejemplo, si sólo hay dos nodos estaría permitido que w fuera de tercer grado observando que $\partial w/\partial x$ y w están definidos en cada nodo. Similarmente, sólo estaría permitido que $\partial w/\partial x$ tuviese variación lineal, o de dos términos.

Nótese, sin embargo, que puede efectuarse un ejercicio similar en la dirección y, manteniendo según la misma la continuidad de $\partial w/\partial x$. Tenemos pues a lo largo de (1-2),

$\dfrac{\partial w}{\partial y}$ que sólo depende de los parámetros nodales del lado 1-2,

y a lo largo de 1-3,

$\dfrac{\partial w}{\partial x}$ que sólo depende de los parámetros nodales del lado 1-3.

Si diferenciamos la primera con respecto a x, obtenemos sobre la línea 1-2,

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ que sólo depende de los parámetros nodales del lado 1-2,

y análogamente sobre el lado 1-3,

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ que sólo depende de los parámetros nodales del lado 1-3

En el punto común, 1, surge inmediatamente una incongruencia puesto que en él no podemos satisfacer automáticamente la condición necesaria de continuidad

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \tag{1 25}$$

para valores arbitrarios de los parámetros de los nodos 2 y 3 *Es por tanto imposible definir mediante expresiones polinómicas sencillas funciones de forma que aseguren una compatibilidad completa cuando en los nodos sólo se imponen los valores de w y sus derivadas primeras.*[8]

Por tanto, si empleando tres variables nodales se encuentran funciones que satisfagan la compatibilidad, éstas deben ser tales que en los nodos de vértice no tengan derivadas continuas y la derivada segunda cruzada no sea única Algunas de estas funciones se examinan en la segunda parte de este capítulo [9–15]

La demostración anterior se refería a un elemento rectangular. Es evidente que pueden extenderse los razonamientos al caso en que, como en el nodo de vértice 1, concurren dos lados de direcciones cualesquiera

Una manera de sortear esta dificultad parece obvia. Podríamos especificar la derivada segunda cruzada como uno de los parámetros nodales. Esto, para ensamblajes de elementos rectangulares, es conveniente y por supuesto permisible. Funciones sencillas de ese tipo han sido sugeridas por Bogner *et al* [16] y usadas con cierto éxito Desafortunadamente, la extensión a nodos donde concurran varios contornos de separación bajo diferentes ángulos (Figura 1 6) no es posible en general En este caso, la continuidad de las derivadas cruzadas en varios sistemas de direcciones ortogonales implica, de hecho, la especificación de *todas las derivadas segundas en el nodo en cuestión.*

Esto, sin embargo, viola las condiciones físicas si la rigidez de la placa varía bruscamente de un elemento a otro, puesto que no podrá mantenerse la igualdad de los momentos normales a los contornos de separación No obstante, este procedimiento ha sido empleado con cierto éxito en casos de placas homogéneas [17–24] Con relación a este problema, en la referencia [17] Smith y Duncan examinan el efecto de imponer tales *continuidades excesivas* a algunas de las derivadas de orden más elevado

Las dificultades de encontrar funciones de desplazamientos compati-

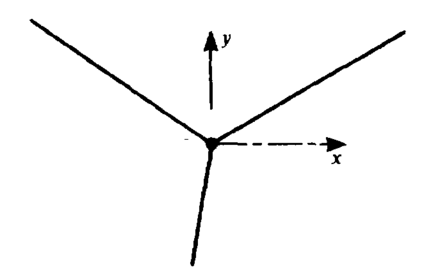


Figura 1 6 Nodos donde concurren elementos cuyos contornos poseen direcciones arbitrarias.

bles para estos casos han conducido a varios intentos de ignorar la continuidad completa de las derivadas primeras, conservando los otros criterios Partiendo quizás, de la ingenua, aunque intuitiva, idea de que imponer la continuidad en los nodos debe conducir en el límite a una continuidad completa de las derivadas primeras, se han desarrollado diversos elementos con mucho éxito.[10,25–39]

La convergencia de dichos elementos no es evidente, pero puede demostrarse aplicando el criterio de la parcela, o mediante comparación con algoritmos de diferencias finitas. Ya hemos discutido extensamente la importancia del criterio de la parcela en el Capítulo 11 del Volumen 1 En las referencias [40] a [42] se pueden encontrar más detalles al respecto

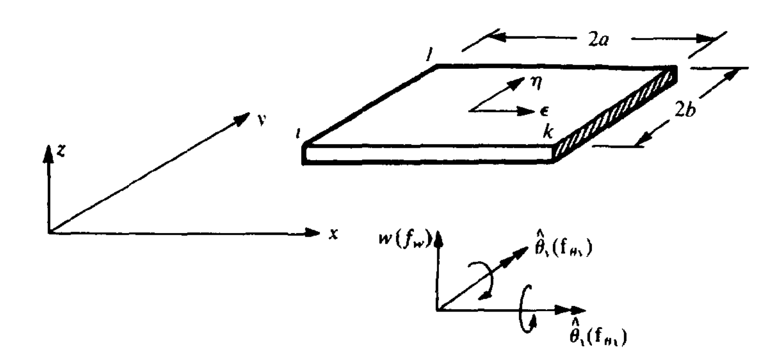
El test de la parcela es de gran importancia para diseñar y comprobar elementos de placa y nunca debe omitirse En la primera parte de este capítulo se hará uso repetido del mismo al tratar elementos no conformes En particular, mostraremos como algunos de los elementos de más éxito en la actualidad se han desarrollado a través de esta interpretación analítica [43–48]

FUNCIONES DE FORMA NO CONFORMES

1.3 Elementos rectangulares con nodos de vértice (12 GDL)[25,36–38]

1 3 1 *Funciones de forma.* Consideremos un elemento rectangular de placa *ijkl* coincidente con el plano xy, como el representado en la Figura 1.7. En cada nodo, n, se introducen los movimientos $\mathbf{a}_n$ compuestos por tres componentes: desplazamiento en la dirección z, w_n, el giro alrededor del eje x, $(\hat{\theta}_x)_n$,† y el giro alrededor del eje y, $(\hat{\theta}_y)_n$

† Adviértase que se ha cambiado aquí el convenio de la Figura 1 2 y que a partir de ahora seguiremos el de la Figura 1 7 Esto permite realizar las transformaciones necesarias para el caso de láminas de manera sencilla.



Fuerzas y desplazamientos correspondientes

Figura 1.7 Elemento de placa rectangular

Los vectores de movimientos nodales se definen como $\mathbf{a}_i$. Los movimientos del elemento vendrán dados, como siempre, por un vector que tiene ahora cuatro componentes nodales

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_l \\ \mathbf{a}_k \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} w \\ \hat{\theta}_x \\ \hat{\theta}_y \end{Bmatrix}_i \tag{1.26}$$

Es conveniente usar una expresión polinómica para definir las funciones de forma en función de los doce parámetros. Deben omitirse ciertos términos de un polinomio completo de cuarto grado. Al escribir

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y$$
$$+ \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \equiv \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \tag{1.27}$$

conseguimos algunas ventajas. En particular, a lo largo de cualquier recta x =constante o y =constante, el desplazamiento w variará según

Sin embargo, al manipular las ecuaciones del Capítulo 2 volveremos a las definiciones originales de la Figura 1.2. Estas dificultades han sido también discutidas por Hughes[49] y la tranformación siguiente puede ayudar a clarificar conceptos

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}\boldsymbol{\theta} \quad \text{con} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

una expresión de tercer grado. Los contornos del elemento, o límites de separación, se componen de rectas como las mencionadas, y puesto que un polinomio de tercer grado se define unívocamente mediante cuatro constantes, los dos valores de los giros y las flechas en los extremos de los contornos definirán, por consiguiente, de manera única los movimientos a lo largo de dichos contornos. Como dichos valores extremos son comunes para elementos adyacentes, quedará impuesta la continuidad de w a lo largo del límite de separación.

Se observará que el gradiente de w a lo largo de la normal a cualquiera de los contornos varía según terceras potencias. (Considérese, por ejemplo, $\partial w/\partial x$ a lo largo de una recta para la que x sea constante.) Puesto que en dichas líneas sólo están definidos dos valores de la derivada normal, el polinomio de tercer grado no está definido de manera única, y en general aparecerá una discontinuidad de aquélla. La función es, por tanto, "no conforme".

Se pueden calcular las constantes α_1 a α_{12} escribiendo las doce ecuaciones simultáneas que relacionan w y sus derivadas en los nodos cuando las coordenadas toman los valores apropiados. Por ejemplo

$$w_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \text{ etc}$$
$$\left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i = \hat{\theta}_{xi} = -\alpha_3 + \text{ etc}$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \hat{\theta}_{yi} = \alpha_2 + \text{ etc}$$

Agrupando las doce ecuaciones, podemos escribir en forma matricial,

$$\mathbf{a}^e = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} \tag{1.28}$$

donde $\mathbf{C}$ es una matriz 12×12 función de las coordenadas nodales y $\boldsymbol{\alpha}$ un vector formado por las doce constantes incógnitas. Invirtiendo (1.28)

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}^e \tag{1.29}$$

Esta inversión puede llevarla a cabo el computador o, si se desea una expresión explícita para las rigideces, etc., se puede efectuar algebraicamente. Así ha sido realizado efectivamente por Zienkiewicz y Cheung.[25]

Se puede ahora escribir la expresión de la flecha en el interior de un elemento en forma general como sigue

$$\mathbf{u} \equiv w = \mathbf{N}\mathbf{a}^e = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}^e \tag{1.30}$$

donde

$$\mathbf{P} = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3)$$

Una forma explícita de la expresión anterior ha sido deducida por Melosh.[35]

Las funciones de forma pueden escribirse sencillamente en función de las coordenadas normalizadas del Capítulo 7. Así podemos escribir para cualquier nodo

$$\mathbf{N}_i = \frac{1}{2}\left[(\xi_0+1)(\eta_0+1)(2+\xi_0+\eta_0-\xi^2-\eta^2),\right.$$
$$a\xi_i(\xi_0+1)^2(\xi_0-1)(\eta_0+1),$$
$$\left.b\eta_i(\xi_0+1)(\eta_0+1)^2(\eta_0-1)\right] \qquad (1.31)$$

con

$$\xi = (x-x_c)/a$$
$$\xi_0 = \xi\xi_i$$
$$\eta = (y-y_c)/b$$
$$\eta_0 = \eta\eta_i$$

La matriz $\mathbf{B}$ se obtiene directamente de la expresión (1.19) o de la (1.21d). Asi pues, tenemos

$$\mathbf{L}\nabla w = \begin{Bmatrix} 2\alpha_4 & 6\alpha_7 x & 2\alpha_8 y & 6\alpha_{11}xy & \\ 2\alpha_6 & 2\alpha_9 x & 6\alpha_{10}y & 6\alpha_{12}xy & \\ 2\alpha_5 & 4\alpha_8 x & 4\alpha_9 y & 6\alpha_{11}x^2 & +6\alpha_{12}y^2 \end{Bmatrix}$$

Podemos escribir

$$\mathbf{L}\nabla w = \mathbf{Q}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}^e = \mathbf{B}\mathbf{a}^e \quad \text{y por tanto } \mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1} \qquad (1.32)$$

en donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \qquad (1.33)$$

Es de interés observar ahora que la función de desplazamientos escogida permite, en realidad, la existencia de un estado de deformación

(curvatura)† constante y, por consiguiente, satisface uno de los criterios de convergencia establecidos en el Volumen 1.

1.3.2 *Matrices de rigidez y de cargas*. Se puede seguir ahora el procedimiento general siendo casi innecesario explicar los detalles.

La matriz de rigidez que relaciona las *fuerzas* nodales (dadas por una fuerza lateral y dos momentos en cada nodo) con los desplazamientos nodales correspondientes es

$$\mathbf{K}^e = \int\int_{V^e} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, dx\, dy \qquad (1.34)$$

y sustituyendo en ésta la (1.32) y tomando t constante en el interior del elemento,

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{C}^{-1T}\left(\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \mathbf{Q}^T\mathbf{D}\mathbf{Q}\, dx\, dy\right)\mathbf{C}^{-1} \qquad (1.35)$$

Se han sacado ahora fuera de la integral los términos que no contienen x o y. El integrando se puede multiplicar e integrar explícitamente sin dificultad si $\mathbf{D}$ es constante.

Se ha calculado explícitamente la expresión de la matriz de rigidez $\mathbf{K}$ para el caso de material ortótropo y el resultado se muestra en la Tabla 1.1. La matriz para obtener los momentos en todos los nodos se muestra en la Tabla 1.2.

Las fuerzas exteriores en los nodos debidas a cargas distribuidas se pueden asignar "por inspección", asignando un área específica como contribución para cada nodo. Sin embargo, es más lógico y preciso emplear de nuevo la expresión general (1.21b) para dicha asignación.

La contribución de estas fuerzas a cada nodo será

$$\mathbf{f}_i = -\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \mathbf{N}^T\, q\, dx\, dy \qquad (1.36a)$$

o, según (1.30)

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{C}^{-1T}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \mathbf{P}^T\, q\, dx\, dy \qquad (1.36b)$$

† Si α_7 a α_{12} son cero, la deformación será constante. Según la Ec. (1.28) se puede encontrar el correspondiente $\mathbf{a}^e$. Como existe una correspondencia unívoca entre $\mathbf{a}^e$ y α, dicho estado es, por consiguiente, único. Todo esto presupone que la matriz $\mathbf{C}^{-1}$ existe. La inversión algebraica demuestra que la matriz $\mathbf{C}$ nunca es singular.

TABLA 1.1

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO RECTANGULAR (FIGURA 1 7: MATERIAL ORTÓTROPO)

Matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \frac{1}{60ab}\mathbf{L}\{D_x\mathbf{K}_1 + D_y\mathbf{K}_2 + D_1\mathbf{K}_3 + D_{xy}\mathbf{K}_4\}\mathbf{L}$$

Siendo

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \\ \mathbf{f}_k \\ \mathbf{f}_l \end{Bmatrix} = \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_l \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = p^{-2}\begin{bmatrix}
60 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & & & & & & & & & & \\
30 & 0 & 20 & & & & & & & & & \\
30 & 0 & 15 & 60 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
15 & 0 & 10 & 30 & 0 & 20 & & & & & & \\
-60 & 0 & -30 & -30 & 0 & -15 & 60 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
30 & 0 & 10 & 15 & 0 & 5 & -30 & 0 & 20 & & & \\
-30 & 0 & -15 & -60 & 0 & -30 & 30 & 0 & -15 & 60 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
15 & 0 & 5 & 30 & 0 & 10 & -15 & 0 & 10 & -30 & 0 & 20
\end{bmatrix}$$

$p^{-2} = \frac{b^2}{a^2}$ **Simétrica**

$$\mathbf{K}_2 = p^{2}\begin{bmatrix}
60 & & & & & & & & & & & \\
-30 & 20 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
-60 & 30 & 0 & 60 & & & & & & & & \\
-30 & 10 & 0 & 30 & 20 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
30 & -15 & 0 & -30 & -15 & 0 & 60 & & & & & \\
-15 & 10 & 0 & 15 & 5 & 0 & -30 & 20 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
-30 & 15 & 0 & 30 & 15 & 0 & -60 & 30 & 0 & 60 & & \\
-15 & 5 & 0 & 15 & 10 & 0 & -30 & 10 & 0 & 30 & 20 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$p^{-2} = \frac{a^2}{b^2}$ **Simétrica**

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix}
30 & & & & & & & & & & & \\
-15 & 0 & & & & & & & & & & \\
15 & -15 & 0 & & & & & & & & & \\
-30 & 0 & -15 & 30 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 15 & 0 & & & & & & & \\
-15 & 0 & 0 & 15 & 15 & 0 & & & & & & \\
-30 & 15 & 0 & 30 & 0 & 0 & 30 & & & & & \\
15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 15 & 0 & & & \\
30 & 0 & 0 & -30 & -15 & 0 & -30 & 0 & 15 & 30 & & \\
0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & -15 & -15 & 0
\end{bmatrix}$$

Simétrica

TABLA 1 1

(continuación)

$$\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix}
84 & & & & & & & & & & & \\
-6 & 8 & & & & & & & & & & \\
6 & 0 & 8 & & & & & & & & & \\
-84 & 6 & -6 & 84 & & & & & & & & \\
-6 & -2 & 0 & 6 & 8 & & & & & & & \\
-6 & 0 & -8 & 6 & 0 & 8 & & & & & & \\
-84 & 6 & -6 & 84 & 6 & 6 & 84 & & & & & \\
6 & -8 & 0 & -6 & 2 & 0 & -6 & 8 & & & & \\
6 & 0 & -2 & -6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 8 & & & \\
84 & -6 & 6 & -84 & -6 & -6 & 84 & 6 & 6 & 84 & & \\
6 & 2 & 0 & -6 & -8 & 0 & -6 & -2 & 0 & 6 & 8 & \\
-6 & 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 6 & 0 & -8 & -6 & 0 & 8
\end{bmatrix}$$

Simétrica

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{l} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}$$

La integral se calcula de nuevo de manera sencilla. Se advertirá ahora que en general las tres componentes de la fuerza exterior tomarán valores distintos de cero en todos los nodos Esto no sería así de haber asignado las cargas exteriores de forma más sencilla. En la Tabla 1.3 se muestra el vector de fuerzas nodales para una carga uniformemente distribuida q

Si se incluye el efecto de las deformaciones iniciales, puede encontrarse de manera similar el vector de fuerzas nodales debido a dichas deformaciones y a las tensiones iniciales Con relación a esto, es preciso observar que la deformación inicial, como puede ser la originada por un incremento de temperatura, pocas veces se limita a las curvaturas Normalmente, se introducen además deformaciones directas y el problema completo sólo puede resolverse considerando el problema de tensión plana superpuesto al de flexión

1.4 Elementos cuadriláteros y paralelogramos

El elemento rectangular del apartado anterior pasa el test de la parcela[40] Sin embargo, no puede generalizarse fácilmente a formas cuadriláteras Se pueden efectuar transformaciones de coordenadas como las descritas en el Capítulo 8 del Volumen 1, pero desafortunadamente se

TABLA 1.2

MATRIZ DE MOMENTOS FLECTORES ($p = a/b$)

ELEMENTO RECTANGULAR DE LA FIGURA 1.7. MATERIAL ORTÓTROPO

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_i \\ \mathbf{M}_j \\ \mathbf{M}_k \\ \mathbf{M}_l \end{Bmatrix} = \frac{1}{4ab}\,[\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_l \end{Bmatrix}$$

$6p^{-1}D_x+6pD_1$	$-8aD_1$	$8bD_x$	$-6pD_1$	$-4aD_1$	0	$-6p^{-1}D_x$	0	$4bD_x$	0	0	0
$6pD_y+6p^{-1}D_1$	$-8aD_y$	$8bD_1$	$-6pD_y$	$-4aD_y$	0	$-6p^{-1}D_1$	0	$4bD_1$	0	0	0
$-2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	$-4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	0	$4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	0	$-2D_{xy}$	0	0
$-6pD_1$	$4aD_1$	0	$6p^{-1}D_x+6pD_1$	$8aD_1$	$8bD_x$	0	0	0	$-6p^{-1}D_x$	0	$4bD_x$
$-6pD_y$	$4aD_y$	0	$6pD_y+6p^{-1}D_1$	$8aD_y$	$8bD_1$	0	0	0	$-6p^{-1}D_1$	0	$4bD_1$
$-2D_{xy}$	0	$-4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	$4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	0	0	$-2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	0
$-6p^{-1}D_x$	0	$-4bD_x$	0	0	0	$6p^{-1}D_x+6pD_1$	$-8aD_1$	$-8bD_x$	$-6pD_1$	$-4aD_1$	0
$-6p^{-1}D_1$	0	$-4bD_1$	0	0	0	$6pD_y+6p^{-1}D_1$	$-8aD_y$	$-8bD_1$	$-6pD_y$	$-4aD_y$	0
$-2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	0	$2D_{xy}$	0	0	$2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	$-4aD_{xy}$	$-2D_y$	0	$4aD_{xy}$
0	0	0	$-6p^{-1}D_x$	0	$-4bD_x$	$-6pD_1$	$4aD_1$	0	$6p^{-1}D_x+6pD_1$	$8aD_1$	$-8bD_x$
0	0	0	$-6p^{-1}D_1$	0	$-4bD_1$	$-6pD_y$	$4aD_y$	0	$6pD_y+6p^{-1}D_1$	$8aD_y$	$-8bD_1$
$-2D_{xy}$	0	0	$2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	0	$2D_{xy}$	0	$-4aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	$4aD_{xy}$

TABLA 1 3

MATRIZ DE CARGAS PARA EL ELEMENTO RECTANGULAR DE LA FIGURA 1 7 CON CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA q

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \\ \mathbf{f}_k \\ \mathbf{f}_l \end{Bmatrix} = 4qab \begin{Bmatrix} 1/4 \\ -b/12 \\ a/12 \\ 1/4 \\ b/12 \\ a/12 \\ 1/4 \\ -b/12 \\ -a/12 \\ 1/4 \\ b/12 \\ -a/12 \end{Bmatrix}, \qquad f_i = \begin{Bmatrix} f_{wi} \\ f_{\theta xi} \\ f_{\theta yi} \end{Bmatrix}$$

encontrará entonces que ya no se cumple el criterio de curvatura constante Como es de esperar, el comportamiento de dichos elementos es pobre, pero todavía puede conseguirse la convergencia si el elemento pasa el test de la parcela en coordenadas curvilíneas, siguiendo los razonamientos del Capítulo 8 del Volumen 1 Henshell *et al*[39] han estudiado el comportamiento de un elemento como éste (y el de otros de orden superior), llegando a la conclusión de que puede obtenerse una precisión aceptable En su artículo se dan todos los detalles de las transformaciones necesarias para una transformación isoparamétrica, y de la necesidad consiguiente de la integración numérica

Si se usan exclusivamente funciones de ξ y η el estado de curvatura constante sólo puede conseguirse en el caso del paralelogramo En la discusión de la referencia 25 se sugiere un elemento de este tipo cuyas matrices de rigidez han sido obtenidas por Dawe [27]

Un conjunto de funciones de forma algo diferente ha sido sugerido por Argyris.[28] En un paralelogramo, las coordenadas locales pueden expresarse

en función de las globales mediante una relación explícita (Figura 1 8)

$$\xi = (x - y \quad \text{cotan } \alpha)/a$$
$$\eta = y \quad \text{cosec } \alpha/b \tag{1 37}$$

pudiéndose, por tanto, deducir también directamente todas las expresiones

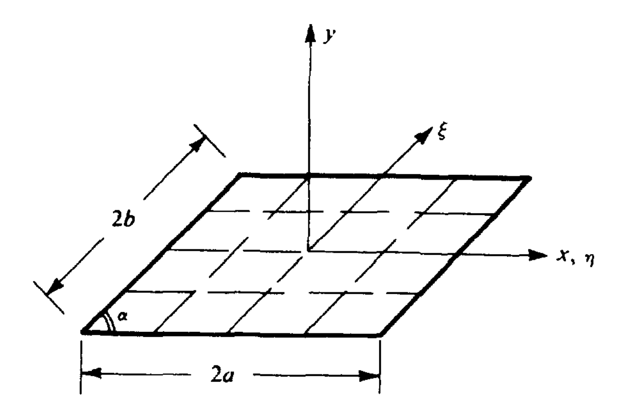


Figura 1 8 Elemento paralelogramo y coordenadas oblicuas

1.5 Elemento triangular con nodos de vértice

1.5.1 *Funciones de forma* A primera vista podría parecer que una vez más podría emplearse un simple desarrollo polinómico de la misma manera que en la sección anterior Al imponerse únicamente nueve movimientos independientes surge una dificultad, ya que el desarrollo de tercer grado completo contiene diez términos [Ec. (1 27)] y la omisión de cualquiera de ellos habrá de hacerse de manera más bien arbitraria Para mantener una cierta apariencia de simetría podrían retenerse los diez términos haciendo iguales dos coeficientes (por ej , $\alpha_8 = \alpha_9$) para limitar a nueve el número de incógnitas Se han investigado varias de estas posibilidades, pero aparece otro problema mucho más grave y es que la matriz **C** de la relación (1 28) se hace singular para determinadas orientaciones de los lados del triángulo. Esto sucede, por ejemplo, cuando dos lados del triángulo son paralelos a los ejes x e y

Una alternativa "evidente" es añadir a la formulación un nodo central y eliminarlo por condensación estática Esto podría permitir el empleo de un polinomio completo de tercer grado, pero de nuevo se encontró que un elemento deducido de esta manera no converge.

Se pueden eludir las dificultades de la asimetría empleando las coordenadas de área descritas en el Capítulo 8 del Volumen 1, que por supuesto son casi siempre una elección natural en el caso de triángulos, ver Figura 1 9.

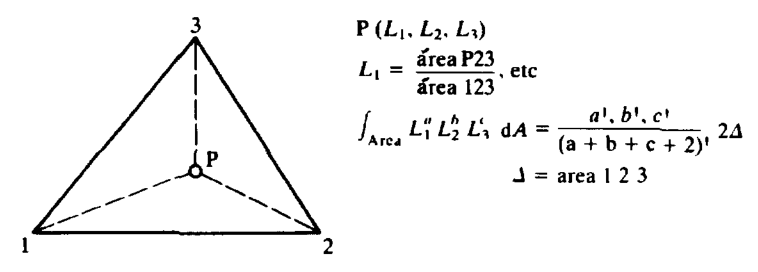


Figura 1 9 Coordenadas de área

Como antes, haremos uso de los términos de un desarrollo polinómico y conviene advertir que éstos vienen dados en función de las coordenadas de área de una forma poco corriente Por ejemplo

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 \tag{1 38}$$

proporciona los tres términos de un polinomio lineal *completo* y

$$\alpha_1 L_1 L_2 + \alpha_2 L_2 L_3 + \alpha_3 L_3 L_1 + \alpha_4 L_1^2 + \alpha_5 L_2^2 + \alpha_6 L_3^2 \tag{1 39}$$

proporciona los seis términos cuadráticos (que contienen los términos lineales)† Los diez términos de una expresión cúbica se forman de manera similar mediante los productos de todas las combinaciones de tercer grado *posibles, es decir*

$$L_1^3,\ L_2^3,\ L_3^3,\ L_1^2 L_2,\ L_2^2 L_3,\ L_3^2 L_1,\ L_1 L_2^2,\ L_2 L_3^2,\ L_3 L_1^2,\ L_1 L_2 L_3 \tag{1 40}$$

Para un elemento de nueve grados de libertad se pueden emplear *cualesquiera de los términos anteriores combinándolos adecuadamente*, recordando, sin embargo, que solamente se necesitan nueve funciones

† Sin embargo, es posible escribir también un polinomio cuadrático completo como

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_1 L_2 + \alpha_5 L_2 L_3 + \alpha_6 L_1 L_2$$

etc., para órdenes mayores. Esto tiene la ventaja de mostrar explícitamente todos los términos retenidos de polinomios de grado menor

independientes y que han de obtenerse estados de curvatura constante. En la Figura 1.10 se muestran algunas de las funciones más importantes de este tipo. La primera [Figura 1.10(a)] proporciona una de las tres funciones que representan una simple translación de sólido rígido de la placa. Es evidente que estos modos deben poder obtenerse. Además, se encontrará que las funciones del tipo $L_1^2 L_2$, de las cuales aparecen seis en la expresión de tercer grado, toman una forma similar (aunque no igual) a la Figura 1.10(b).

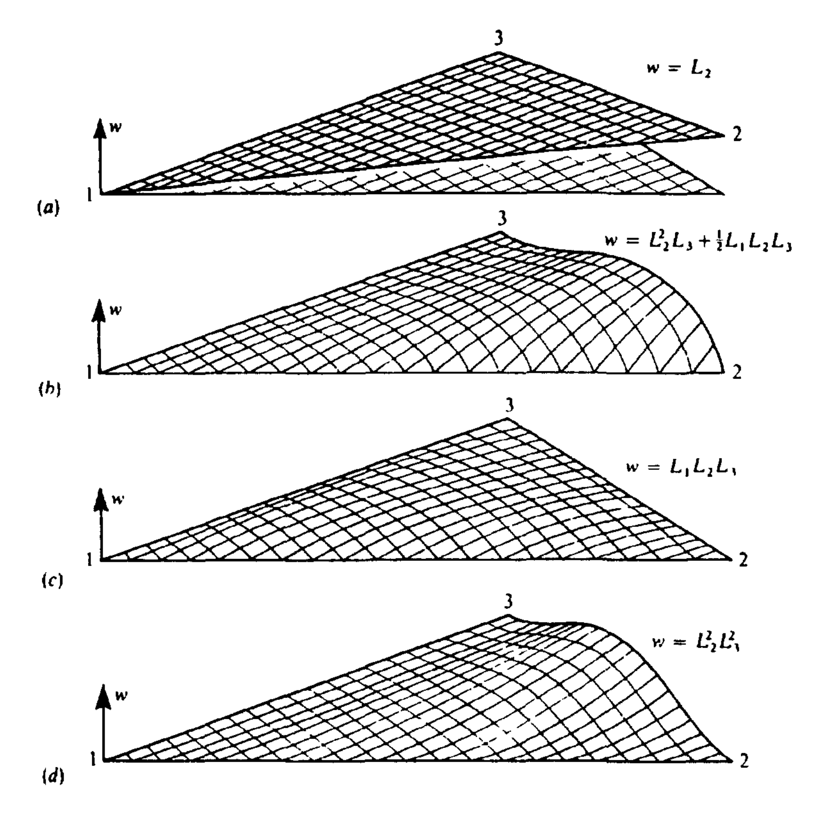


Figura 1.10 Algunas funciones básicas en polinomios de las coordenadas de área.

Por último, en la Figura 1.10(c) se representa una función $L_1 L_2 L_3$, ilustrando que éste es un modo puramente interno que tiene valores y derivadas primeras nulas en los vértices. Esta función podría, por tanto, ser útil para una variable interna anodal, pero nunca se empleará aisladamente puesto que no puede definirse en función de variables de vértice. Puede, sin

embargo, añadirse a cualquier otra forma básica en cualquier proporción relativa.

Las funciones de la segunda categoría son de especial interés. Dan valor nulo para w en los vértices y además siempre tienen derivada primera nula en la dirección de uno de los lados. Una combinación de dos de estas funciones (por ejemplo, $L_2^2 L_3$ y $L_2^2 L_1$) será capaz de proporcionar cualesquiera valores de las derivadas primeras que se deseen en las direcciones de x e y en un nodo, mientras mantiene nulas las demás derivadas primeras.

Para un elemento con nueve grados de libertad tenemos que asegurar que están presentes los seis términos cuadráticos. Adicionalmente, seleccionamos tres de los términos cúbicos. Los términos cuadráticos aseguran que está presente un estado de curvatura constante necesario para la aplicación del test de la parcela. Así podemos escribir

$$
\begin{aligned}
w &= \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_1 L_2 + \alpha_5 L_2 L_3 + \alpha_6 L_3 L_1 \\
&\quad + \alpha_7 L_1^2 L_2 + \alpha_8 L_2^2 L_3 + \alpha_9 L_3^2 L_1 \\
&= [L_1, L_2, L_3, \dots]\boldsymbol{\alpha} \qquad (1.41)
\end{aligned}
$$

Identificando los nueve valores nodales

$$
w_i, (\hat{\theta}_x)_i, (\hat{\theta}_y)_i
$$

y advirtiendo que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial L_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_3} \\
&\equiv \frac{1}{2\Delta}\left(b_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial}{\partial L_3}\right) \qquad (1.42)
\end{aligned}
$$

y similarmente

$$
\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + c_3 \frac{\partial}{\partial L_3}\right)
$$

donde Δ es el área del elemento, y

$$
\begin{aligned}
2\Delta &= b_1 c_2 - b_2 c_1 \\
b_1 &= y_2 - y_3 \\
c_1 &= x_3 - x_2 \qquad , \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

con la permutación física de los índices (ver Capítulo 8 del Volumen 1). Se puede determinar ahora la función de forma por una simple inversión [ver Sección 1.3.1, Ec. (1.30)], obteniéndose para el nodo 1

$$\mathbf{N}_1^T = \begin{Bmatrix} 3L_1^2 - 2L_1^3 \\ -b_3(L_1^2L_2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3) + b_2(L_3L_1^2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3) \\ -c_3(L_1^2L_2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3) + c_2(L_3L_1^2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3) \end{Bmatrix} \qquad (1.43)$$

con expresiones similares para los nodos 2 y 3.

El cálculo de las matrices de rigidez y los vectores de carga puede seguir de nuevo el camino estándard y la integración de las expresiones (1.21) puede efectuarse exactamente utilizando las integrales dadas en la Figura 1.9. Sin embargo, se utiliza generalmente integración numérica que demuestra ser muy eficiente (ver Capítulo 8 del Volumen 1).

El elemento así obtenido es uno de los que primero se desarrollaron en la referencia [10]. Aunque satisface el criterio de deformación constante (debido a que puede reproducir estados de curvatura constante) desgraciadamente no satisface el test de parcela para mallas arbitrarias. Ciertamente esto se destacó en la referencia original (que también es en la que se mencionó el test de la parcela por primera vez). Sin embargo, el test de la parcela se satisface completamente en este elemento para mallas triangulares creadas por tres conjuntos de líneas rectas igualmente espaciadas y su comportamiento general a pesar de estos inconvenientes hizo que este elemento fuera muy popular en aplicaciones prácticas.[37]

Es, sin embargo, posible corregir las funciones de manera que el elemento resultante satisfaga el test de la parcela para todas las configuraciones. Bergan[43–46] y Samuelsson[47] mostraron una manera de hacer esto, pero una sencilla modificación de bastante éxito es la propuesta por Specht.[48] Esta modificación utiliza tres términos de cuarto orden en lugar de los tres términos cúbicos de la Ec. (3.41). La forma particular de estos términos se diseña de manera que se satisfaga idénticamente el criterio que discutiremos más tarde en la Sección 1.7. Se escribe ahora

$$\begin{aligned} w = \; & [L_1, L_2, L_3, L_1L_2, L_2L_3, L_3L_1, \\ & L_1^2L_2 + \tfrac{1}{2}L_1L_2L_3\{3(1-\mu_3)L_1 - (1+3\mu_3)L_2 + (1+3\mu_3)L_3\}, \\ & L_2^2L_2 + \tfrac{1}{2}L_1L_2L_3\{3(1-\mu_1)L_2 - (1+3\mu_1)L_3 + (1+3\mu_1)L_1\}, \\ & L_3^2L_2 + \tfrac{1}{2}L_1L_2L_3\{3(1-\mu_2)L_3 - (1+3\mu_2)L_1 + (1+3\mu_2)L_2\}]\boldsymbol{\alpha} \\ = \; & \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \qquad (1.44)$$

donde

$$\mu_1 = \frac{l_3^2 - l_2^2}{l_1^2} \qquad \mu_2 = \frac{l_1^2 - l_3^2}{l_2^2} \qquad \mu_3 = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_3^2} \qquad (1.45)$$

siendo l_1, l_2, l_3 las longitudes de los lados del triángulo.†

Identificando los valores nodales y efectuando la inversión de las matrices, las funciones de forma pueden escribirse en función de las componentes del vector **P** definido por la Ec. (1.44). Así

$$\mathbf{N}_1^T = \begin{Bmatrix} P_i - P_{i+3} + P_{k+3} + 2(P_{i+6} - P_{k+6}) \\ -b_j(P_{k+6} - P_{k+3}) - b_kP_{i+6} \\ -c_j(P_{k+6} - P_{k+3}) - c_kP_{i+6} \end{Bmatrix} \qquad (1.46)$$

donde i, j, k son las permutaciones cíclicas de 1,2,3.

Las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas pueden determinarse, bien explícitamente o utilizando integración númerica.

El elemento así formulado satisface todos los requisitos del test de la parcela[40] y se comporta excelentemente como mostraremos más tarde. Ciertamente, si la integración númerica se realiza de forma "reducida" utilizando una cuadratura de tres puntos (ver Volumen 1, pág. 176) entonces el elemento es uno de los mejores de su clase disponibles en la actualidad, como demostraremos en el apartado que trata sobre comparaciones numéricas.

1.6 Elemento triangular de forma sencilla[29,30] (6GDL)

Si se abandona el requisito de conformidad (continuidad C_1) es posible introducir elementos más sencillos que los ya descritos reduciendo las interconexiones entre elementos. Un elemento muy sencillo de este tipo fue propuesto por primera vez por Morley.[29] En este elemento, ilustrado en la Figura 1.11, las interconexiones requieren la continuidad del desplazamiento w en los vértices del triángulo y de las pendientes normales en los lados del elemento.

Con seis grados de libertad el desarrollo puede limitarse a los términos cuadráticos, y puede escribirse como

---

† Las constantes μ_1, etc., son parámetros geoméricos que aparecen en la expresión de las derivadas normales. Así, sobre el lado l_1 la derivada normal está dada por

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{l_1}{4\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial}{\partial L_3} - 2\frac{\partial}{\partial L_1} + \mu_1\left(\frac{\partial}{\partial L_3} - \frac{\partial}{\partial L_2}\right)\right], \text{etc}$$

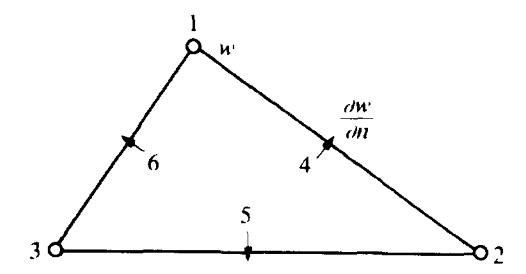


Figura 1 11 El sencillo triángulo no conforme debido a Morley[29] con seis grados de libertad

$$W = [L_1, L_2, L_3, L_1L_2, L_2L_3, L_3L_1]\alpha = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \tag{1 47}$$

La identificación de los valores nodales y la inversión conduce a las siguientes funciones de forma para los nodos esquina

$$N_1 = L_1 - L_1(1 - L_1) - \frac{b_1b_3 - c_1c_3}{b_2^2 + c_2^2}(1 - L_2)L_2 - \frac{b_1b_2 - c_1c_2}{b_3^2 + c_3^2}(1 - L_3)L_3 \tag{1 48a}$$

y para los nodos en el punto medio de los lados

$$N_4 = \frac{2\Delta}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}}L_1(1 - L_1) \tag{1 48b}$$

donde los símbolos son idénticos a los utilizados en las Ecs (1 41) y (1.45) y las otras funciones se obtienen por permutación cíclica de los subíndices

La obtención de las matrices de rigidez, etc , sigue la tónica general y se encuentra que de nuevo el elemento satisface el test de la parcela. Este elemento se comporta razonablemente, como veremos más tarde, aunque su precisión es menor que la de los elementos precedentes

Es interesante remarcar que el campo de momentos descrito por el elemento satisface exactamente las condiciones de equilibrio entre elementos como puede comprobar el lector. Ciertamente, el elemento se obtuvo originalmente como un elemento de equilibrio utilizando el principio de energía complementaria,[29] y por esta razón siempre da una cota superior de la energía de deformación por flexión Este es el elemento más sencillo posible ya que representa los requisitos mínimos de un campo de momento constante. Una forma específica de las subrutinas para obtener la matriz de rigidez de este elemento ha sido derivada por Wood [30]

1.7 El test de la parcela–un requisito analítico–

El test de la parcela en sus formas diferentes[40] (discutido precisamente en el Capítulo 11 del Volumen 1) se aplica en general numéricamente para comprobar la bondad de un elemento Sin embargo, los requisitos básicos para su cumplimiento por funciones de forma incompatibles puede predecirse con precisión si dichas funciones satisfacen ciertas condiciones Éstas se deducen de la condición de que para estados de deformaciones constantes el trabajo virtual efectuado por las fuerzas internas que actúan en la discontinuidad debe ser nulo Así, si las fuerzas de superficie que actúan sobre el contorno de un elemento de placa son (ver Figura 1.4)

$$M_n, M_{ns} \text{ y } S_n \tag{1 49a}$$

y si el correspondiente salto de desplazamientos virtuales es

$$\Delta\theta_n \equiv \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) \quad , \quad \Delta\theta_s \equiv \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right) \quad , \quad \Delta w \tag{1 49b}$$

entonces idealmente desearíamos que la siguiente integral sea cero, al menos para estados de tensión constante·

$$\int_{\Gamma^e} M_n \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) d\Gamma + \int_{\Gamma^e} M_{ns}\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right) d\Gamma + \int_{\Gamma^e} S\Delta w \, d\Gamma = 0 \tag{1 50}$$

El último término será siempre idénticamente nulo para campos constantes de M_x, M_y y M_{xy} ya que entonces $S_x = S_y = 0$ [en ausencia de momentos aplicados, ver Ec (1 2)] y puede asegurarse el cumplimiento de las condiciones restantes si

$$\int_{\Gamma^e} \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) d\Gamma = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{\Gamma^e} \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right) d\Gamma = 0 \tag{1 51a,b}$$

se satisfacen para cada lado recto Γ_e del elemento

Para elementos que comparten vértices donde se prescribe $\partial w/\partial n$, estas integrales serán idénticamente nulas solamente si los términos de *grado mayor al lineal son cúbicos antisimétricos y si existe* una variación cuadrática de los gradientes normales, como se muestra en Figura 1.12(a) Ésta es la razón de escoger las funciones de forma especiales para describir el triángulo incompatible en la Ec. (1.44), y en este caso la Ec (1 51a) se satisface automáticamente. El cumplimento de la Ec. (1 51b) se asegura *siempre si la función w y sus derivadas se prescriben en los nodos esquina.*

Para el triángulo cuadrático de la Sección 1.6 la situación es incluso más sencilla. Aquí los gradientes pueden ser sólo lineales y su valor está

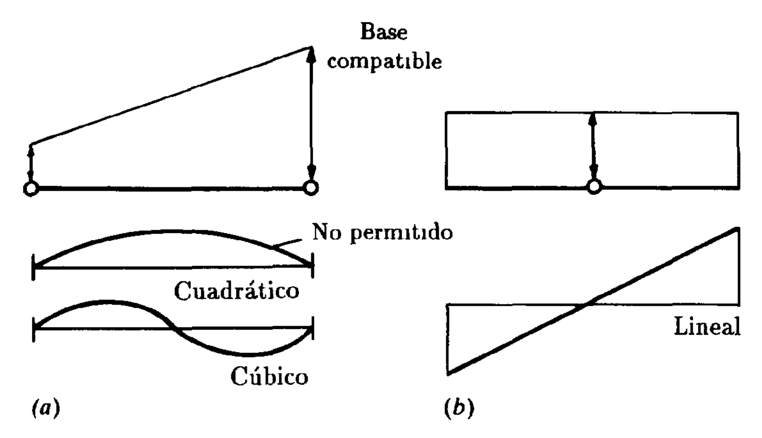


Figura 1 12 Condición de continuidad para el test de la parcela $[\int(\partial w/\partial n)\, ds = 0]$ Variación de $\partial w/\partial n$ a lo largo de un lado (a) Definición mediante nodos esquina (componente lineal compatible) (b) Definición de un nodo central (componente constante compatible)

prescrito en los puntos del centro de los lados como se muestra en la Figura 1 12(b) y la integral es idénticamente nula

Los mismos razonamientos se incumplen aparentemente cuando se examina el elemento rectangular con las funciones de forma de la Ec (1 30) Sin embargo, el lector puede comprobar mediante operaciones algebraicas sencillas que las integrales de la Ec (1 51) se satisfacen idénticamente Así, por ejemplo

$$\int_{-a}^{a} \frac{\partial w}{\partial y}\, dx = 0 \qquad \text{cuando} \quad y = \pm b$$

y $\partial w/\partial y$ se toma igual a cero en los dos nodos

Los comentarios de este apartado se comprueban en tests numéricos y conducen a una inteligente determinación *a priori* de las condiciones que deben cumplir las funciones de forma para que converjan los elementos incompatibles

1.8 Ejemplos numéricos

Los diversos elementos de placa estudiados –y los que se obtendrán en las secciones siguientes– se han introducido en muchos programas comerciales e industriales y se usan diariamente en la solución de problemas de ingeniería. El vector familiarizado con estos elementos probablemente no

requiere explicaciones en esta sección, pero para todos los usuarios es importante comprobar las posibilidades disponibles Por tanto, mostraremos aquí dos ejemplos específicos y seguiremos con un estudio general de la convergencia de los elementos presentados

En la Figura 1 13 se muestran las flechas y momentos flectores en una placa cuadrada empotrada a lo largo de sus bordes y analizada con el elemento rectangular obtenido en el Apartado 1.3[25] y una malla uniforme La Tabla 1 4[38] muestra resultados numéricos para un conjunto de ejemplos similares resueltos con el mismo elemento, y en la Tabla 1.5 se presenta otra placa cuadrada con condiciones de apoyo más complejas En este caso existen resultados exactos y se efectúan las comparaciones correspondientes [50,51]

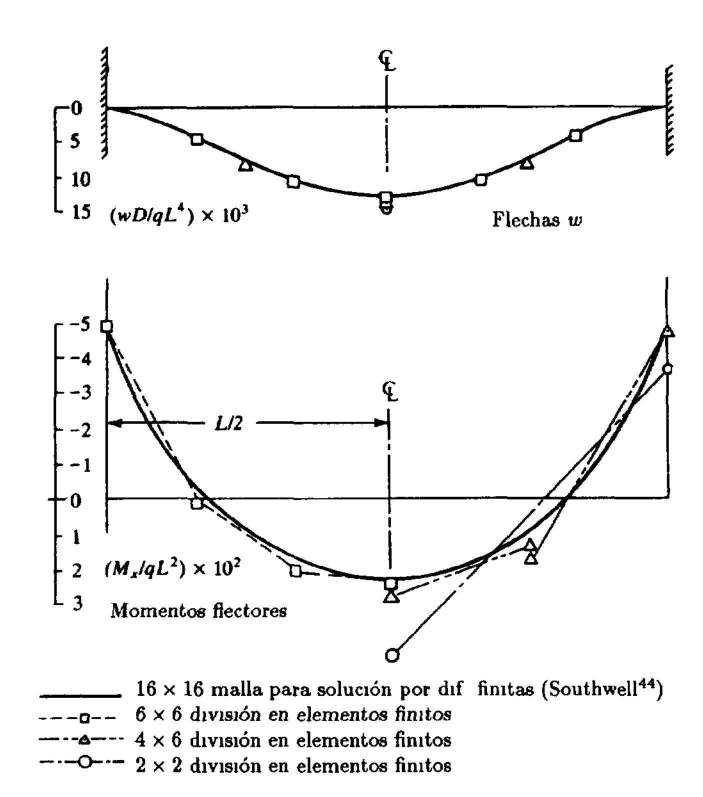


Figura 1 13 Placa cuadrada con bordes empotrados Carga uniforme q Elementos cuadrados

Las Figuras 1.14 y 1 15 muestran aplicaciones de ingeniería práctica en el análisis de losas de puentes de formas complejas. En ambos ejemplos la geometría exige utilizar un elemento triangular y aquí se ha escogido

TABLA 1 4
FLECHAS EN EL CENTRO DE UNA PLACA CUADRADA CALCULADAS CON DISTINTAS MALLAS (ELEMENTOS RECTANGULARES)

Malla	N° total de nodos	Placa sımplemente apoyada		Placa empotrada	
		α (carga unıforme)	β (carga concentrada)	α (carga unıforme)	β (carga concentrada)
2 × 2	9	0 003446	0 013784	0 001480	0 005919
4 × 4	25	0 003939	0 012327	0 001403	0 006134
8 × 8	81	0 004033	0 011829	0 001304	0 005803
12 × 12	169	0 004050	0 011715	0 001283	0 005710
16 × 16	289	0 004056	0 011671	0 001275	0·005672
Exacta (Tımoshenko)		0 004062	0 01160	0 00126	0 00560

$w_{max} = \alpha q L^4/D$ para una carga unıformemente dıstrıbuıda q
$w_{max} = \beta L^2/D$ para una carga concentrada en el centro P
(Basado en Tocher, J L y Kapur, K K [38])
(En la Fıgura 1 13 se muestra la subdıvısıón de la placa)

TABLA 1 5
PLACA CUADRADA APOYADA EN LAS ESQUINAS

		Punto 1		Punto 2	
		w	M_x	w	M_x
Elem. finıtos	2 × 2	0 0126	0 139	0 0176	0 095
	4 × 4	0·0165	0 149	0 0232	0·108
	6 × 6	0·0173	0·150	0 0244	0 109
Marcus[50]		0·0180	0·154	0 0281	0·110
Ballesteros y Lee[51]		0 0170	0 140	0 0265	0 109
Multıplıcador		qL^4/D	qL^2	qL^4/D	qL^2

Punto 1, centro de los lados punto 2, centro de la placa

el de la referencıa [10] Además, en ambos ejemplos, los bordes están reforzados por vıgas y éstas se han ıncorporado de manera sencılla en el análısıs medıante la hıpótesıs de comportamıento concéntrıco.

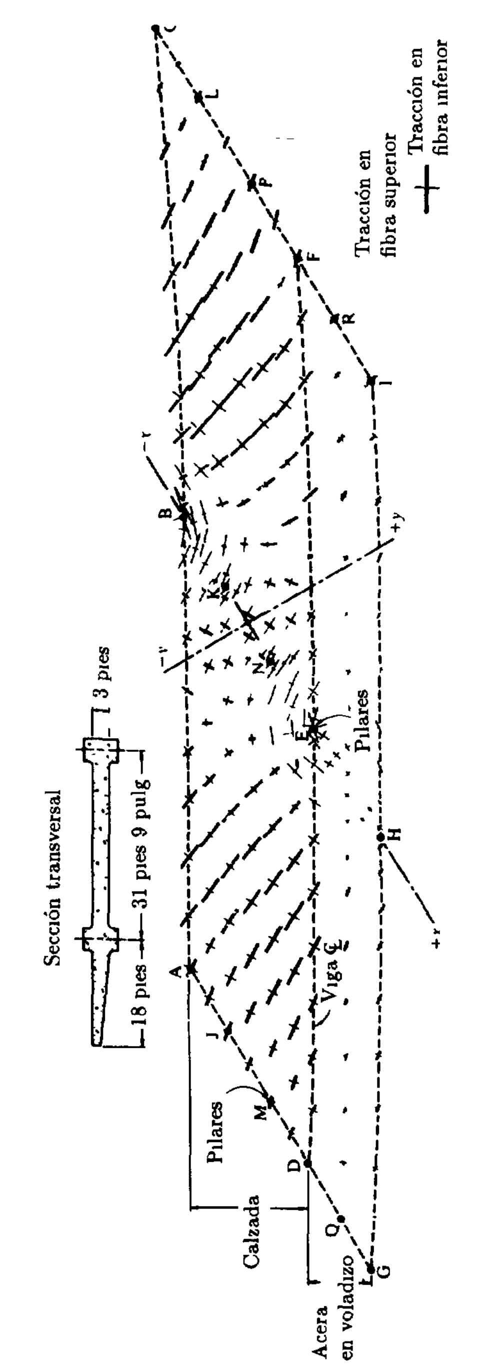
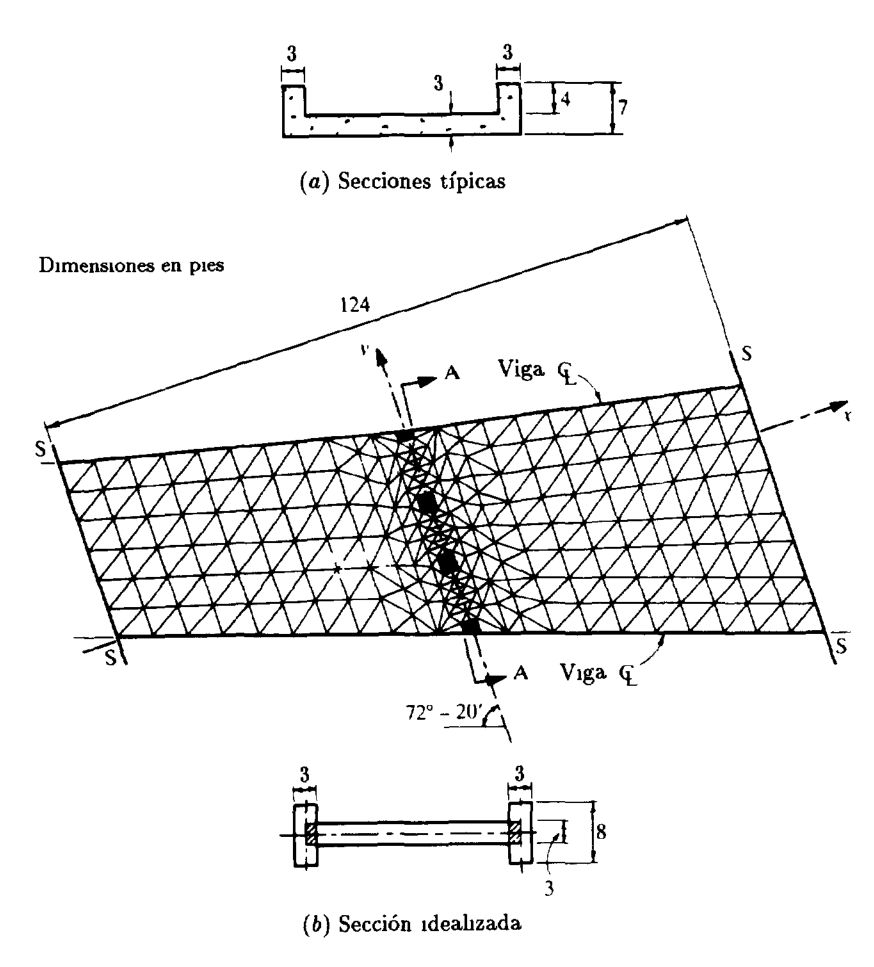


Fıgura 1 14 Puente curvo esvıado con vıgas de borde y espesor no unıforme Dıbujo de los momentos prıncıpales bajo peso propıo



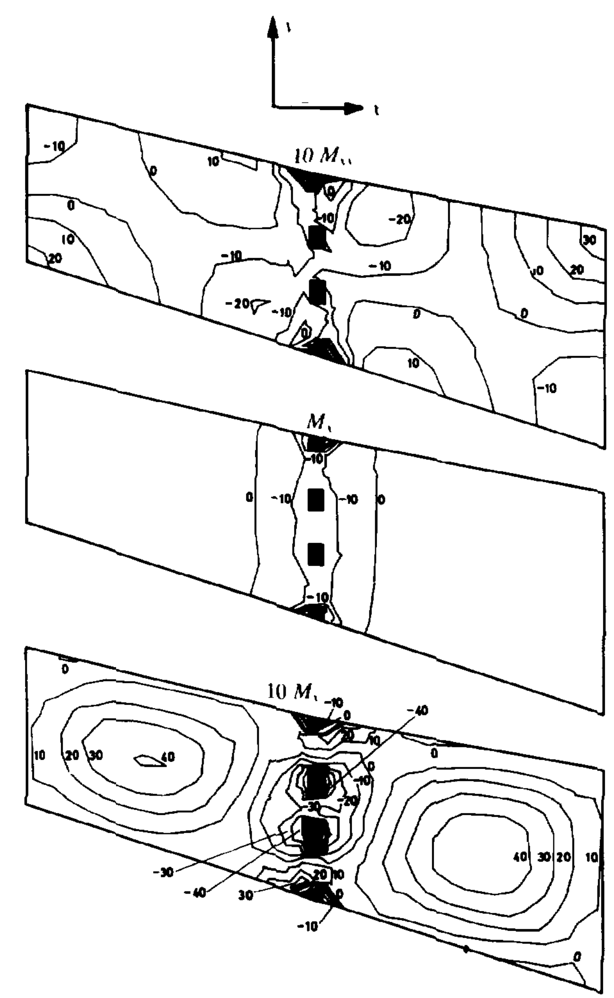
(*a*) Secciones típicas

(*b*) Sección idealizada

Figura 1.15 El puente de ferrocarril de Castleton. Geometría y detalles de la malla de elementos finitos.

Finalmente en la Figura 1 16(*a*) a (*d*) se muestran los resultados de un estudio de convergencia para una placa cuadrada simplemente apoyada y empotrada, para varios elementos triangulares y rectangulares y dos tipos de carga Este tipo de diagrama se usa convencionalmente para comparar el comportamiento de elementos diferentes y en él se muestra el comportamiento de los elementos descritos en este capítulo, así como de otros a los que nos referiremos más tarde. La Tabla 1 6 muestra el código de los diversos elementos a los que nos hemos referido [52,55]

Esta comparación se refiere a un único desplazamiento y la abcisa en



(*c*) Momentos flectores (t pie/pie) con una carga uniforme de 150 lb/pie^2 (732 kg/m^2)

Figura 1 15 (*continuación*)

los gráficos indica el número de divisiones de la malla en un cuarto de placa Es, por consiguiente, difícil deducir la velocidad de convergencia y el comportamiento de los elementos con múltiples nodos Un dibujo más conveniente es el de la norma de energía, $||u||$, versus el número de *grados de libertad N en escala logarítmica. En la Figura 1.17 se muestran* dichas comparaciones para algunos elementos en un problema de una placa esviada simplemente apoyada [6] Es interesante observar que, debido a la

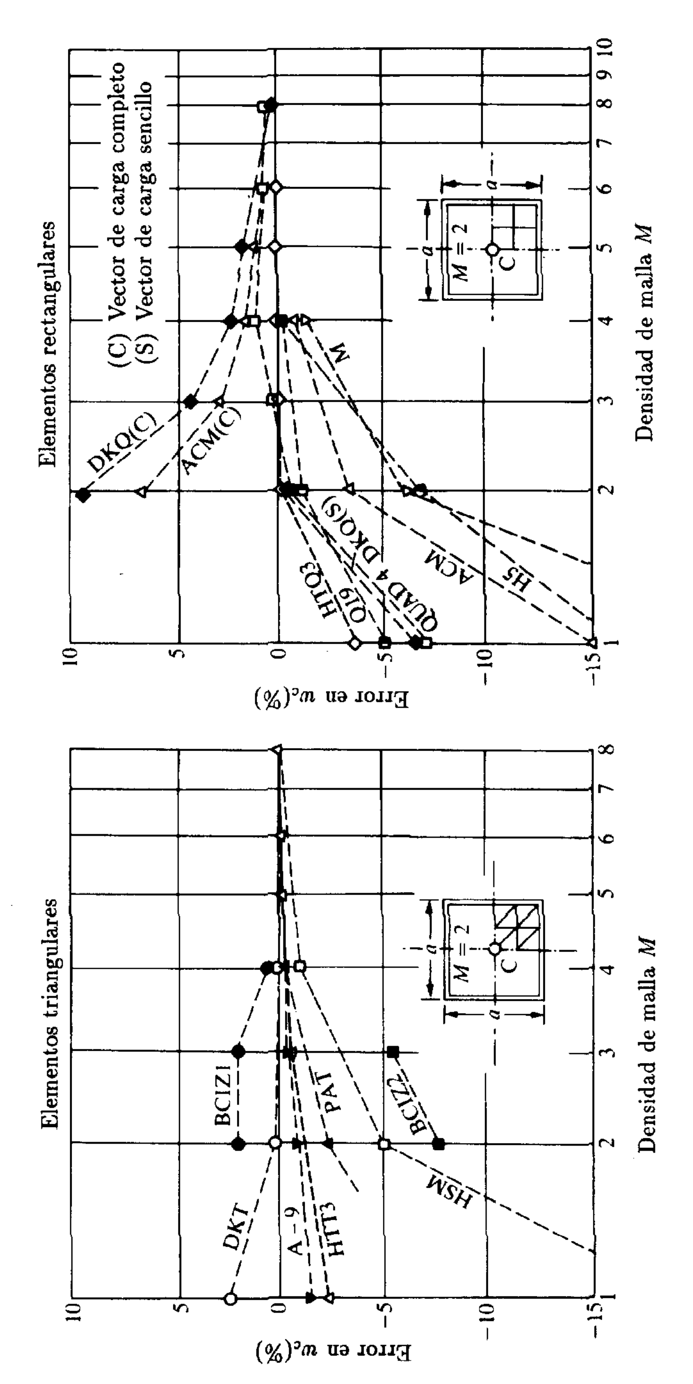


Figura 1.16(*a*) Placa cuadrada simplemente apoyada bajo carga uniforme: % de error en el desplazamiento central (ver Tabla 1.6 para el código de cada elemento).

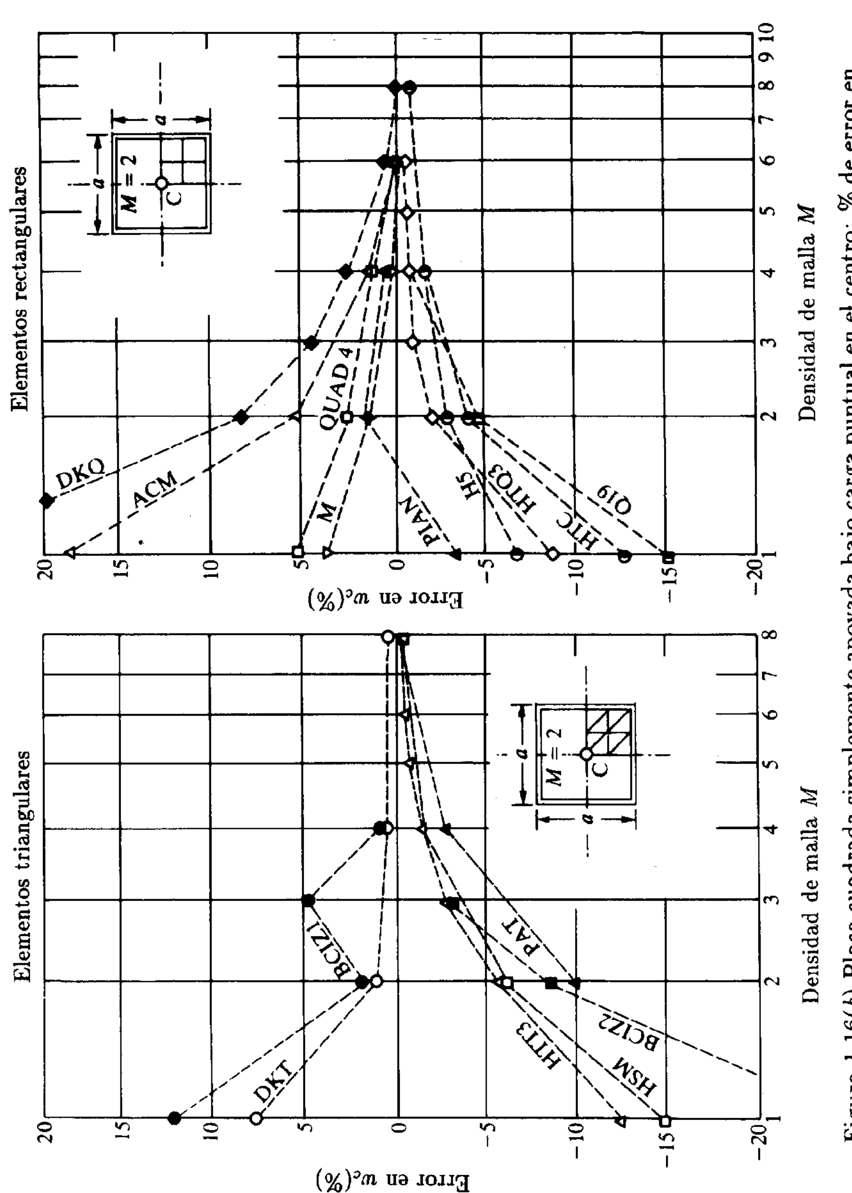


Figura 1.16(*b*) Placa cuadrada simplemente apoyada bajo carga puntual en el centro: % de error en el desplazamiento central (ver Tabla 1.6 para el código de los distintos elementos).

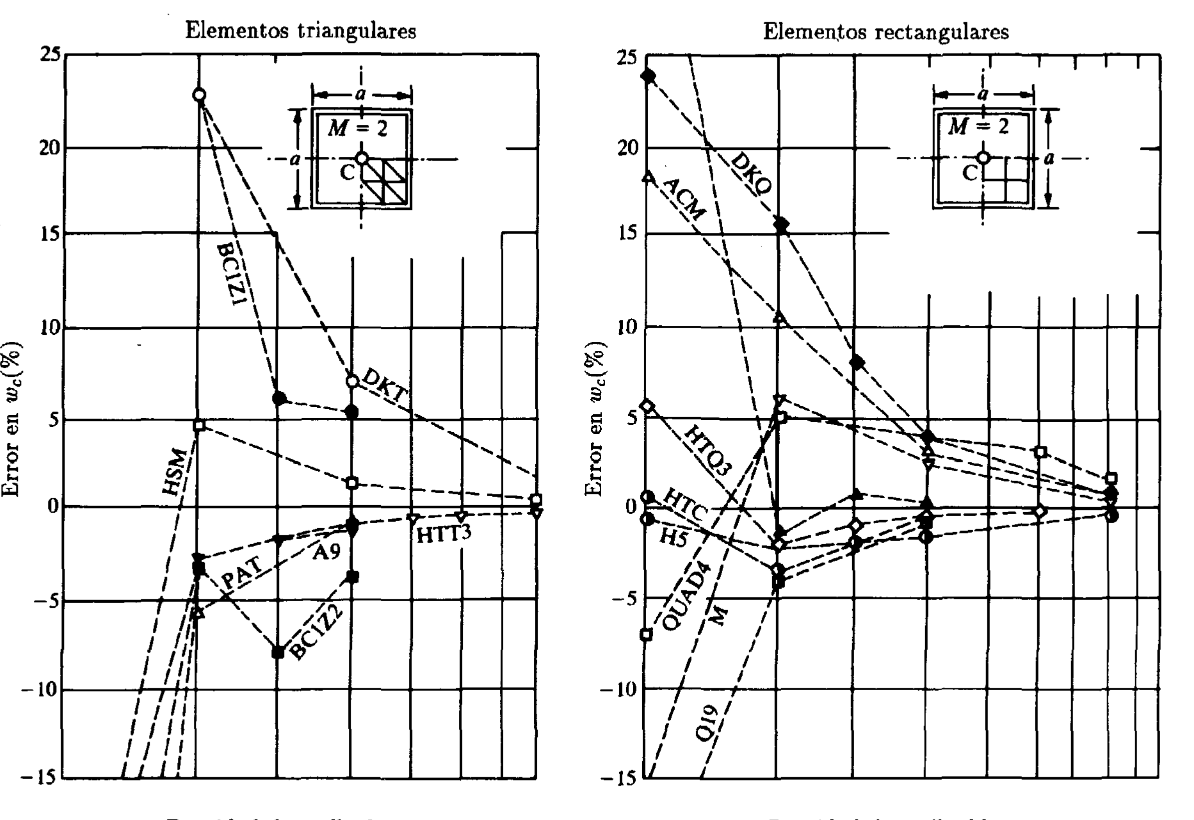


Figura 1.16(*c*) Placa cuadrada empotrada uniformemente cargada: % de error en el desplazamiento central (ver Tabla 1.6 para el código de los distintos elementos).

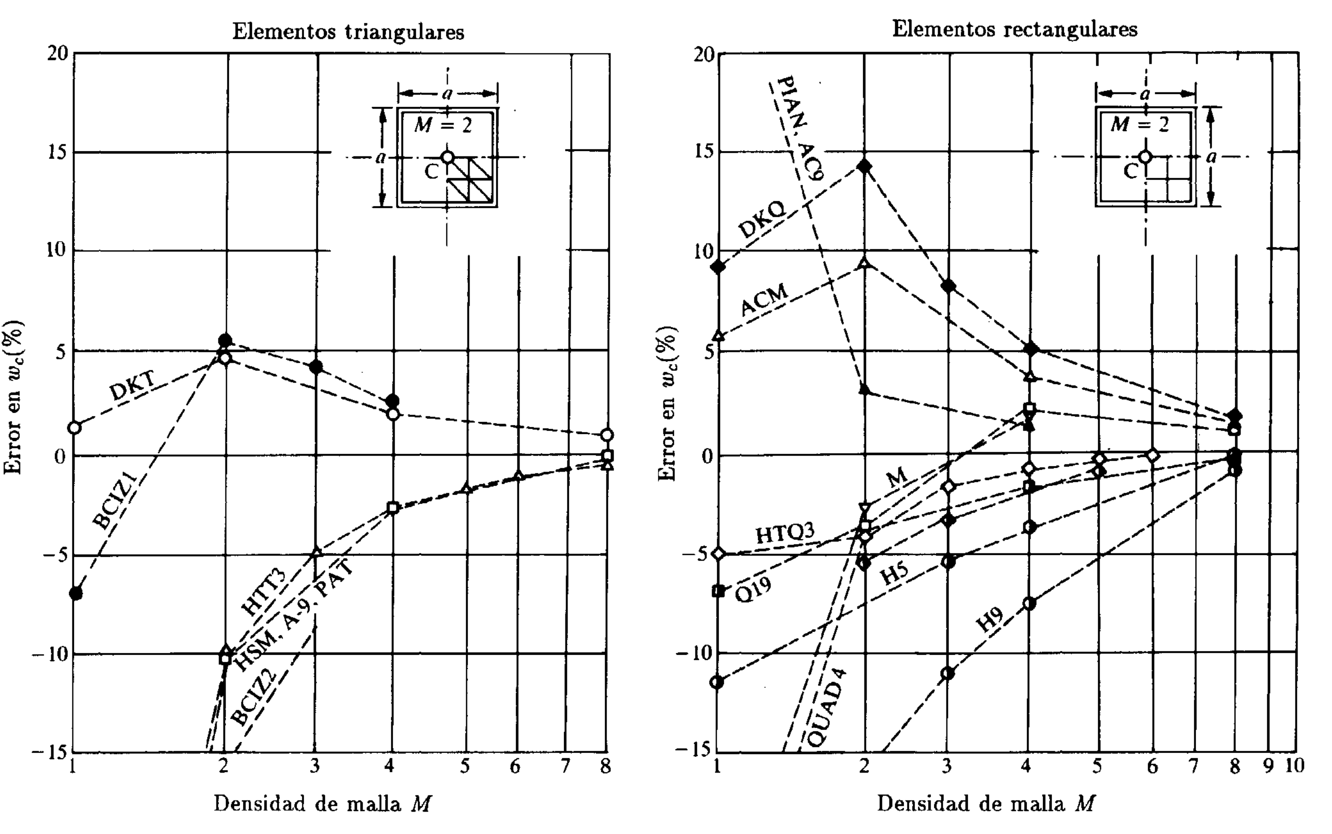
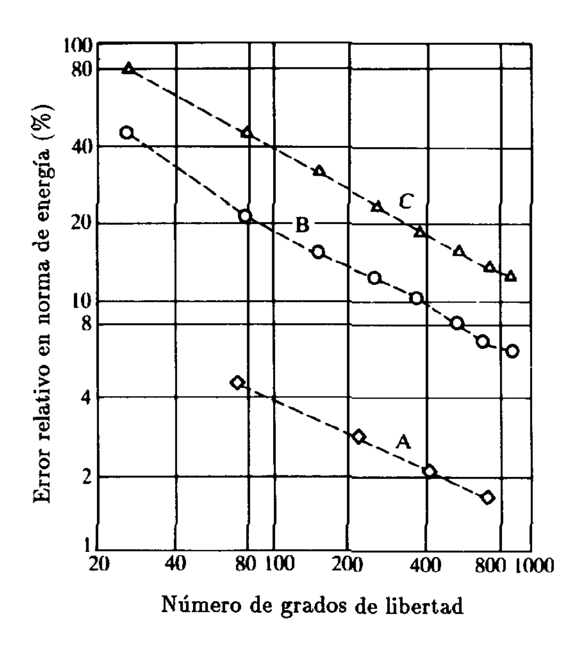


Figura 1.16(*d*) Placa cuadrada empotrada bajo carga puntual en el centro: % de error en el desplazamiento central (ver Tabla 1.6 para el código de los distintos elementos).

TABLA 1.6
CÓDIGO DE LOS ELEMENTOS CUYO COMPORTAMIENTO SE COMPARA EN LA FIGURA 1.16

Código	Referencia	Símbolo	Descripción y comentario
Triángulos de 9GDL			
BCIZ 1	Bazeley *et al* [10]	●	Desplazamiento no conforme (criterio de la parcela)
PAT	Specht[48]	▲	Desplazamiento no conforme
A 9	Razzaque[32] y Irons y Razzaque[33]	▼	Desplazamiento no conforme
BCIZ 2 (HCT)	Bazeley *et al* o Clough y Tocher[9]	■	Desplazamiento conforme
HSM	Allowood y Cornes[76]	□	Tensión híbrida
HIT 3	Jirousek [85] y Jirousek y Lan Guex[54]	△	Híbrido de Trefftz
DKT	Stricklin *et al* [87] y Dhatt[88]		Discreto de Kirchhoff
Rectángulos 12GDL			
ACM	Zinkiewicz y Cheung[25] y Adini y Clough[36]	△	Desplazamiento no conforme
Q 19	Clough y Felippa[14]	◨	Desplazamiento conforme
M	Fraeijs de Veubeke[72]	▽	Equilibrio
DKQ	Batoz y Ben Tohar[94]	◆	Discreto de Kirchhoff
PIAN	Pian[74] y Pian y Tong[75]	▲	Tensión híbrida
HTQ 3	Jirousek y Lan Guex[54]	◇	Híbrido de Trefftz
H 5/HTC	Cook[90]	◑	Tensión híbrida
QUADA	McNeal[103]	□	Hipótesis directa



A Triángulo conforme de quinto orden [18-22]
B Elemento conforme de bajo orden ($p = 2$)[9,10]
C Híbrido[76]

Figura 1.17 Velocidad de convergencia en la norma de energía versus los grados de libertad para tres elementos. Problema de una placa simplemente apoyada ligeramente esviada (80°) con una malla uniforme [6]

singularidad en la esquina, los elementos de alto y bajo orden convergen con velocidades casi idénticas (aunque naturalmente los últimos son más precisos). Si no existiera dicha singularidad se obtendrían naturalmente diferentes velocidades de convergencia (ver el Capítulo 11 del Volumen 1)

FUNCIONES DE FORMA CONFORMES CON *SINGULARIDADES NODALES*

1.9 Observaciones generales

Ya se vio en la Sección 1.3 que es imposible concebir una función polinómica sencilla con sólo tres grados de libertad en cada nodo, de

manera que satisfaga las condiciones de continuidad de las derivadas primeras La alternativa de imponer las curvaturas como parámetros nodales tiene, sin embargo, la desventaja de imponer excesivas condiciones de continuidad. Además, es aconsejable por muchas razones limitar el número de variables nodales sólo a tres cantidades Éstas permiten, gracias a una interpolación física sencilla, generalizar los elementos de tipo placa a las láminas de manera muy comprensible. También se obtienen ventajas de cálculo

La alternativa más sencilla es introducir funciones de forma adicionales *cuyas derivadas segundas tomen varios valores en los nodos* Si dichos valores no son infinitos, queda garantizada la convergencia

Estas funciones se discutirán a continuación en el contexto de los elementos triangulares y cuadriláteros Se omitirá el caso del rectángulo sencillo

1.10 Funciones de forma singulares para el elemento triangular simple

Consideremos, por ejemplo, cualquiera de los siguientes conjuntos de funciones

$$\varepsilon_{23} = \frac{L_1 L_2^2 L_3^2 (L_3 - L_2)}{(L_1 + L_2)(L_2 + L_3)}, \quad \text{etc} \tag{1 52}$$

o bien

$$\varepsilon_{23} = \frac{L_1 L_2^2 L_3^2 (1 + L_1)}{(L_1 + L_2)(L_2 + L_3)}, \quad \text{etc.} \tag{1 53}$$

Ambos tienen la propiedad de que sus valores y los de sus derivadas normales son nulos a lo largo de los lados (1-2) y (1-3) de un triángulo (Figura 1 18) En el tercer lado (2-3) el valor de la función es cero, pero no así el de la pendiente normal, cuya variación para ambos conjuntos de funciones es parabólica Ahora bien, todas las funciones empleadas para definir el triángulo no conforme [véase Ec (1 41)] eran de tercer grado y, por tanto, permitían una variación parabólica de la pendiente normal, que no está definida de manera única por los dos valores nodales en los extremos (resultando, por consiguiente, un elemento no conforme) Si se define, sin embargo, como variable adicional *la derivada primera de w según la normal* en el punto medio de cada lado, se obtiene entonces, combinando las nuevas funciones ε_{23}, etc., con las dadas previamente, *una variación parabólica única de la derivada primera según la normal* a lo largo de los contornos de separación entre elementos, resultando un elemento conforme

Aparentemente, esto puede conseguirse añadiendo los tres grados de libertad adicionales mencionados en la expresión (1.41) y procediendo

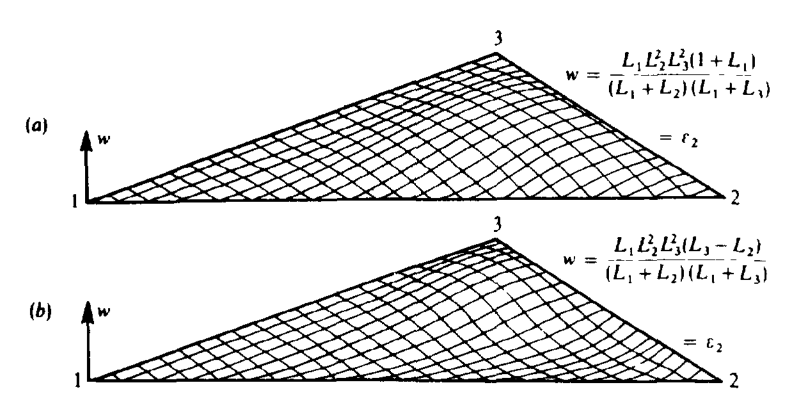


Figura 1 18 Funciones singulares de las coordenadas de área

como allí se describe Esto dará por resultado un elemento de seis nodos como el que se muestra en la Figura 1 19(a) tres nodos de vértice como antes y tres adicionales en los que se define la pendiente normal. Dicho elemento ofrece algunas dificultades de ensamblaje puesto que los nodos presentan distintos números de grados de libertad

Para evitar la dificultad anterior, puede prescribirse el grado de libertad del nodo central de cada lado Podemos suponer, por ejemplo, que la pendiente normal en el punto central de un lado venga dada como media de las dos pendientes en los extremos de cada lado Esto proporciona un elemento compatible que tiene exactamente el mismo número de grados de libertad que el descrito en las secciones anteriores [Figura 1 19(b)].

Las operaciones implicadas en la generación de funciones de forma del elemento aquí descrito son tediosas y no se exponen A continuación se ofrece un resumen simplificado de los pasos a seguir

En primer lugar, se calculan las pendientes normales en el punto medio de los lados a partir de las funciones de forma básicas del elemento [Ecuación (1 43)], como sigue

$$\begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial w}{\partial n}\right)_4 \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial n}\right)_5 \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial n}\right)_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{Z}\mathbf{a}^e \tag{1 54}$$

Análogamente, se calculan en cada uno de esos puntos los valores medios de las pendientes normales a los lados en los nodos de los vértices

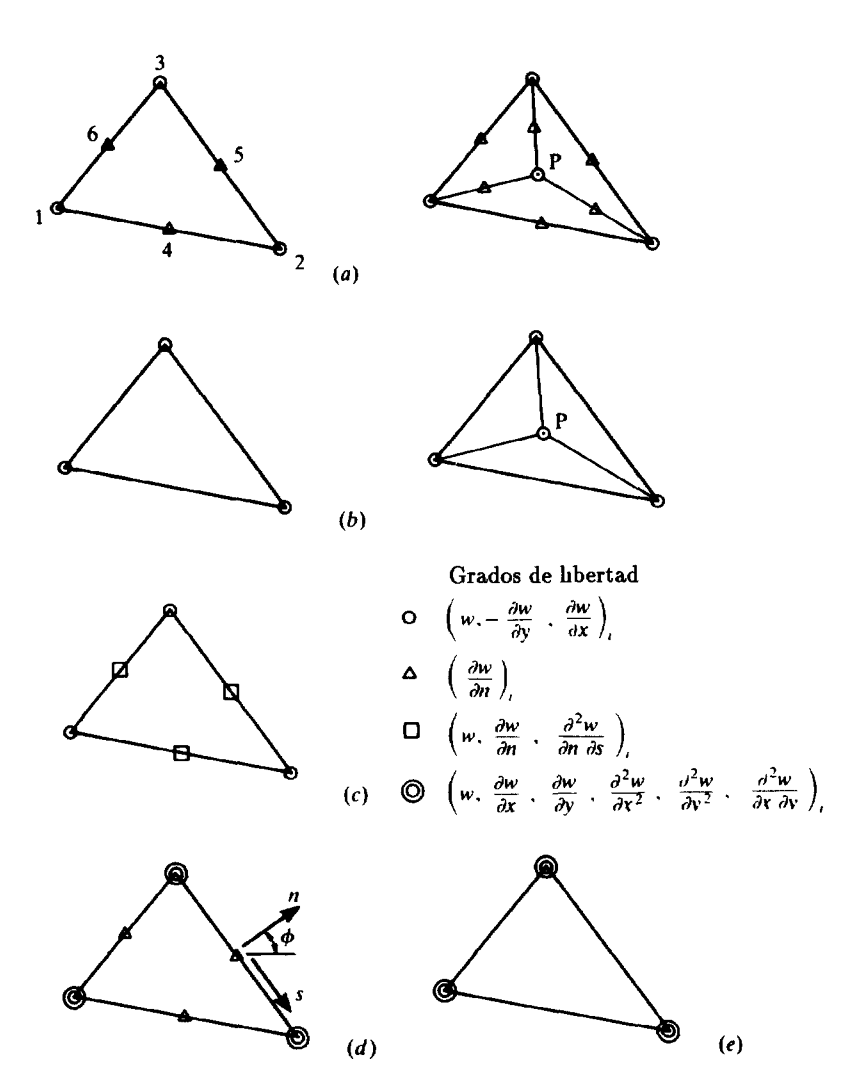


Figura 1.19 Varios elementos triangulares conformes

a partir de dichas funciones

$$\begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial w}{\partial n}\right)_4^a \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial n}\right)_5^a \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial n}\right)_6^a \end{Bmatrix} = \mathbf{Y}\mathbf{a}^e \qquad (1.55)$$

La contribución de las funciones ε a esas pendientes se añade ahora en proporciones $\varepsilon_{23} - \gamma_1$, etc , obteniéndose simplemente (puesto que ε_{23} define una pendiente normal unidad)

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{Bmatrix} \qquad (1.56)$$

Combinando (1 29) y las tres últimas relaciones, obtenemos

$$\mathbf{Y}\mathbf{a}^e = \mathbf{Z}\mathbf{a}^e + \boldsymbol{\gamma} \qquad (1\ 57)$$

de donde se deduce inmediatamente, tras encontrar $\boldsymbol{\gamma}$, que

$$w = \mathbf{N}^o\mathbf{a}^e + [\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{13}](\mathbf{Y} - \mathbf{Z})\mathbf{a}^e \qquad (1.58)$$

siendo $\mathbf{N}^o$ las funciones de forma no conformes definidas previamente en (1 43) Así pues, las funciones de forma se obtienen ahora mediante la expresión (1 58).

Otra manera de generar triángulos compatibles ha sido desarrollada por Clough y Tocher.[9] Como se aprecia en la Figura 1 19(a), cada elemento triangular se divide en primer lugar en tres partes con un vértice interior común P. Para cada triángulo se escribe un desarrollo completo de tercer grado que contenga diez términos. El desarrollo final se ha de expresar en función de nueve grados de libertad convencionales en los nodos 1, 2, 3 y pendientes normales en los nodos 4, 5, 6 Como en cada vértice los valores nodales de dos triángulos han de ser iguales, se tienen en cada uno dos sistemas de ecuaciones, o sea, un total de $9 \times 2 + 3 = 21$ ecuaciones. La condición de continuidad de desplazamientos y pendientes en el nodo central P proporciona además seis ecuaciones adicionales, y la continuidad de pendientes en los puntos medios de los lados interiores, otras tres.

Tenemos, por tanto, treinta ecuaciones y treinta incógnitas que bastan en este caso para determinar explícitamente las funciones de forma y obtener así un elemento de doce grados de libertad similar al descrito anteriormente. Si restringimos las pendientes normales a los lados exteriores, el elemento que se obtiene será de nueve grados de libertad [ver Figura 1.19(b)]

Estos elementos se consiguen a expensas de definir dos valores distintos de las derivadas segundas en los vértices. En el sistema examinado anteriormente, las funciones de forma ε proporcionan en realidad un número infinito de valores de estas derivadas dependiendo de la dirección de aproximación al vértice Naturalmente, los triángulos[9] de Clough y

Tocher pueden, por supuesto, obtenerse definiendo un sistema alternativo de funciones ε tal como se muestra en la referencia [10]

Como ambos tipos de elementos conducen a resultados numéricos casi idénticos, es preferible aquél que implique cálculos más simplificados Si se emplea integración numérica (como realmente se recomienda con insistencia para dichos elementos) resulta ventajoso utilizar funciones definidas continuas en todo el triángulo, como las expresadas en (1 43) y (1 58), aunque puede demostrarse que debido a la naturaleza singular de dichas funciones es necesario un orden de integración numérica muy elevado.

1.11 Elemento triangular de dieciocho grados de libertad con funciones de forma conformes

En la Figura 1.19(c) puede observarse un elemento que presenta una considerable ventaja sobre el representado en la 1 19(a) En este caso los doce grados de libertad se aumentan a dieciocho considerando tanto el valor de w como el de su derivada $\partial^2 w/\partial s \partial n$, además de la pendiente normal $\partial w/\partial n$ en el punto medio de los lados del elemento.†

Así pues, cada nodo presenta el mismo número de grados de libertad con la consiguiente ventaja de cálculos La imposición de continuidad de las derivadas *cruzadas* no representa una condición adicional, puesto que lo cierto es que las mismas deben ser continuas en la práctica

Estos elementos han sido deducidos por Irons[13] y basta con decir aquí que, además de los modos ya discutidos, se emplean términos de cuarto grado del tipo de los que se ilustran en la Figura 1 10(d) y funciones "de torsión" como las de la Figura 1.18(b). Por supuesto, puede comprobarse de manera sencilla que el elemento contiene la *totalidad* de los quince términos de un desarrollo de cuarto grado además de funciones "de singularidad".

1.12 Elementos cuadriláteros compatibles

Cualquiera de los triángulos anteriores puede combinarse para dar elementos cuadrilaterales compatibles con o sin grados de libertad interiores. En la Figura 1 20 se muestran tres cuadriláteros de este tipo y en ninguno de ellos existen nodos laterales exteriores con el fin de evitar las dificultades de ensamblaje ya mencionadas

El primero carece de grados de libertad interiores, y por supuesto no cabe esperar ventaja alguna sobre los otros triángulos comparables. Los

† Esto es, de hecho, idéntico a definir $\dfrac{\partial w}{\partial n}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ en el punto medio de los lados

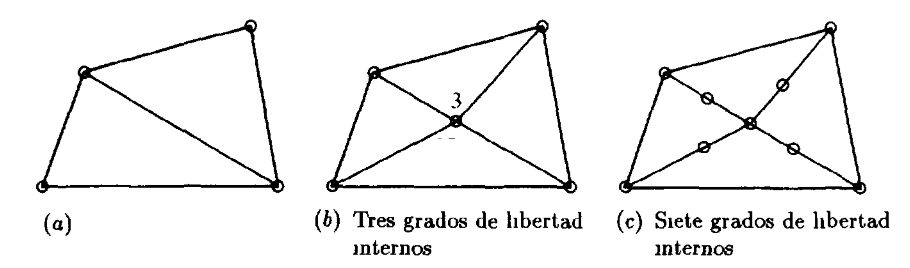


Figura 1 20 Algunos elementos cuadriláterales compatibles

dos siguientes tienen, repectivamente, 3 y 7 grados de libertad interiores. En este caso, la condición de continuidad de la pendiente normal no interfiere con el ensamblaje, puesto que los grados de libertad interiores se eliminan en todos los casos Clough y Felippa[14] han demostrado que el empleo de estos elementos mejora notablemente la precisión.

Otra manera de deducir directamente un elemento cuadrilateral ha sido propuesta por Sander[11] y Fraeijs de Veubeke [12,15] En líneas generales, la manera de proceder es la siguiente: el desplazamiento se define como suma de tres funciones, expresando la primera de ellas mediante un polinomio completo de tercer grado definido por diez constantes en el interior del cuadrilátero [Figura 1 21(a)] Así pues

$$w = w^a + w^b + w^c$$

$$w^a = \alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_{10} y^3 \tag{1 59}$$

La segunda función w^b se define a intervalos En el triángulo inferior de la Figura 1 21(b) se toma como nula, en el triángulo superior una expresión de tercer grado con tres constantes penetra sin discontinuidades en las pendientes en el triángulo inferior. Así pues, en $j\ k\ m$

$$w^b = \alpha_{11} y'^2 + \alpha_{12} y'^3 + \alpha_{13} x' y'^2 \tag{1.60}$$

en función de las coordenadas locales x', y' Similarmente para la tercera función, [Figura 1.21(c)], $w^c = 0$ en el triángulo inferior, y en $i\ m\ j$ se define

$$w^c = \alpha_{14} y''^2 + \alpha_{15} y''^3 + \alpha_{16} x'' y''^2 \tag{1.61}$$

Los dieciseis grados de libertad exteriores vienen proporcionados por las tres variables habituales de los vértices y las pendientes normales en los puntos medio de los lados, permitiendo encontrar por inversión las dieciseis constantes α_{1-16} La compatibilidad queda asegurada y una vez más las derivadas segundas no son únicas en los vértices

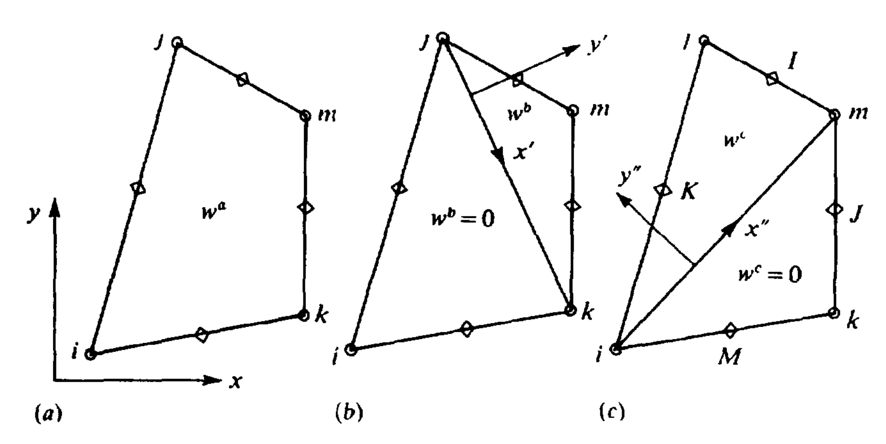


Figura 1.21 Función compatible sugerida por Fraeijs de Veubeke.[12,15]

Si se desea se pueden imponer otra vez restricciones a los nodos laterales, obteniéndose así un elemento de doce grados de libertad. El desarrollo polinómico puede encontrarse explícitamente, tal como ha sido demostrado por Veubeke,[5] y generarse así un elemento de gran aplicación.

El elemento descrito anteriormente no puede formularse si un nodo del cuadrilátero es entrante. Ello no es una limitación seria, pero hay que tenerlo en cuenta si dicho elemento degenera a una forma casi triangular.

1.13 Elementos cuasi-conformes

En la Figura 1.16 se muestran los gráficos comparativos del comportamiento de algunos de los elementos conformes discutidos en las Secciones 1.10 a 1.12. Adviértase que aunque se asegura la convergencia monotóna en la norma de energía los elementos triangulares conformes de las referencias [9] y [10] se comportan casi idénticamente, pero son considerablemente más rígidos y por lo tanto menos precisos que los elementos no conformes descritos previamente.

Para resolver este problema Razzaque e Irons[32,33] desarrollaron un elemento *cuasi-conforme* o *alisado*. Para la obtención de este elemento se utilizaron *funciones de forma sustitutivas*. Dichas funciones son polinomios cúbicos (en las coordenadas de área) diseñados de forma que aproximen en el sentido de mínimos cuadrados las funciones similares ε_i y sus derivadas utilizadas para imponer la continuidad [ver Ecs. (1.52) a (1.58)], como se muestra en la Figura 1.22.

Las operaciones algebraicas son complicadas pero en la referencia

[32] se proporciona una subrutina en FORTRAN completa para obtener la matriz de rigidez. Se advierte que este elemento se comporta muy similarmente al más sencillo elemento triangular no conforme obtenido previamente. Es interesante advertir que el elemento no conforme se desarrolla aquí de forma intuitiva.

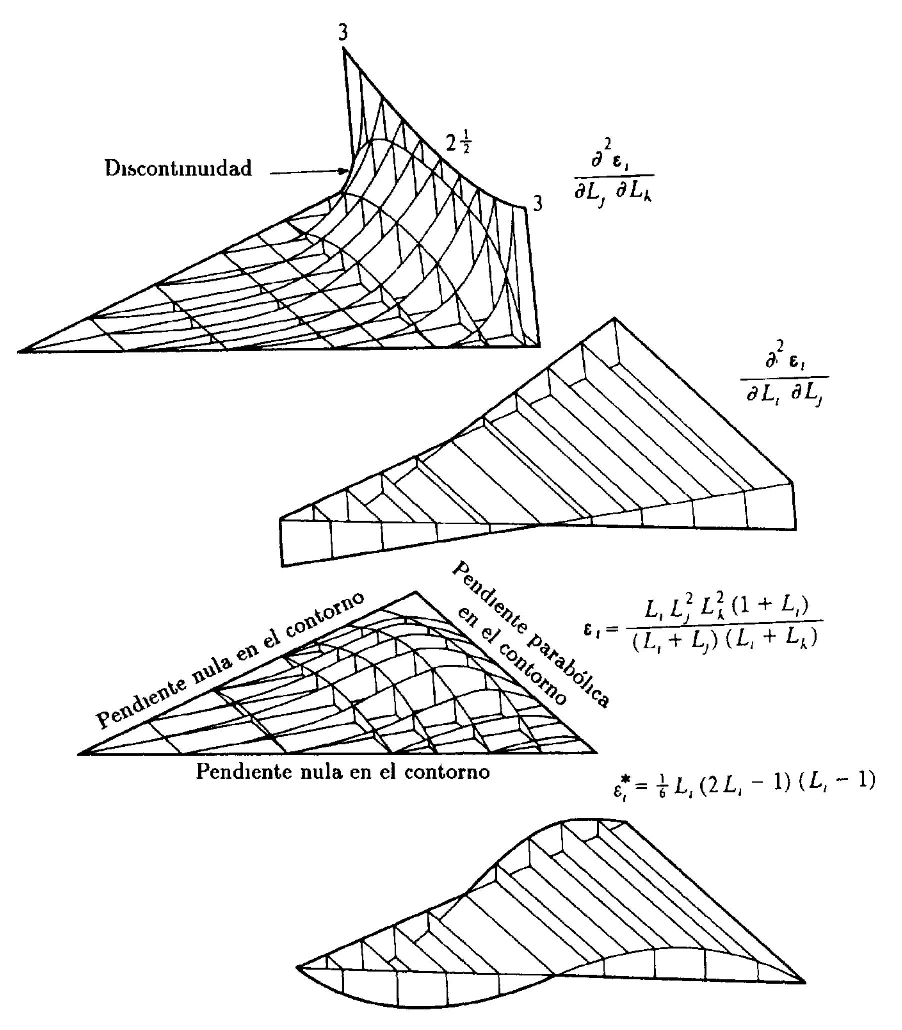


Figura 1.22 Funciones de forma cúbica sustitutivas de mínimos cuadrados reemplazando las funciones racionales ε_i para elementos de placa triangulares.

FUNCIONES DE FORMA CONFORMES CON GRADOS DE LIBERTAD ADICIONALES

1.14 Funciones de forma hermíticas para rectángulos

Siempre es posible definir en un elemento rectangular, como el de la Figura 1.7, el valor de $\partial^2 w/\partial x \partial y$ como parámetro nodal, puesto que no implica "una continuidad excesiva". Es fácil demostrar que para *dicho elemento se pueden determinar sin dificultad funciones de forma* polinómicas que lo hagan compatible.

Se podría, por ejemplo, escribir un desarrollo polinómico que contenga dieciseis constantes (número igual al de parámetros nodales) conservando los términos que no produzcan variaciones de w, o de su derivada primera con respecto a la normal, de grado superior al tercero a lo largo de los lados. Se presentan aquí muchas posibilidades, algunas de las cuales pueden originar matrices **C** que no posean inversa [ver Ec. (1.29)].

Un procedimiento alternativo es el empleo de polinomios hermíticos que permiten escribir directamente las funciones adecuadas. Un polinomio *hermítico*

$$H^n_{mi}(x) \tag{1.62}$$

es un polinomio de grado $2n+1$, tal que para $x = x_i$,

$$\frac{d^k H}{dx^k} = 1, \qquad k = m \text{ para } m = 0 \text{ hasta } n$$

y

$$\frac{d^k H}{dx^k} = 0, \qquad k \neq m \text{ o cuando } x = x_j$$

Un sistema de polinomios hermíticos de primer orden es, por tanto, un sistema de polinomios de tercer grado que proporciona funciones de forma para un elemento lineal ij en cuyos extremos se emplean como variables las derivadas primeras y los valores de la función. En la Figura 1.23 se representa dicho sistema de polinomios de tercer grado.

Se comprueba fácilmente que las funciones de forma siguiente

$$\mathbf{N}_i = [H^{(1)}_{0i}(x)H^{(1)}_{0i}(y), H^{(1)}_{1i}(x)H^{(1)}_{0i}(y), H^{(1)}_{0i}(x)H^{(1)}_{1i}(y), H^{(1)}_{1i}(x)H^{(1)}_{1i}(y)] \tag{1.63}$$

corresponden con valores de

$$w, \ \frac{\partial w}{\partial y}, \ \frac{\partial w}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

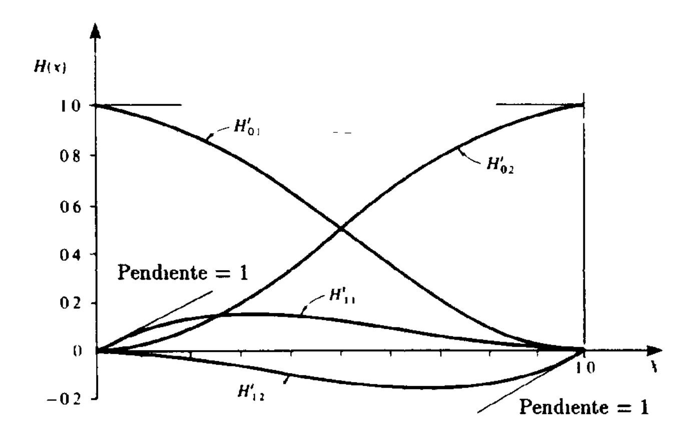


Figura 1.23 Funciones hermíticas de primer orden

tomando sucesivamente valores unidad en el nodo i y cero en todos los demás.

Bogner *et al.*[16] han desarrollado y utilizado con cierto éxito un elemento basado en estas funciones de forma. El desarrollo de los elementos de este tipo para incluir la continuidad de derivadas de orden más elevado es sencilla y se describe en la referencia [17]. Los elementos anteriores tienen en sus formas no distorsionadas un ámbito de aplicación muy limitado, como todos los rectángulos.

1.15 Triángulos con veintiún y dieciocho grados de libertad.

Si en los nodos se acepta la continuidad de las derivadas de orden superior a la primera (imponiendo así una cierta restricción para el caso de placas no homogéneas, como se explicó en la Sección 1.2.4), la generación de elementos con pendientes y flechas compatibles presenta menos dificultades.

Considerando como grados de libertad nodales

$$w, \ \frac{\partial w}{\partial x}, \ \frac{\partial w}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

un elemento triangular tendrá al menos dieciocho grados de libertad. Ahora bien, un polinomio completo de quinto grado contiene veintiún términos. Si añadimos, por tanto, tres pendientes normales en los puntos medios de los lados como grados de libertad adicionales, tendremos un número suficiente de ecuaciones de las que se pueden deducir las funciones de forma.

A lo largo de cualquier borde se tienen seis cantidades que determinan la variación de w (desplazamientos, pendientes y curvatura en los nodos de los vértices), o sea, representantes de una variación de quinto grado. Dicha variación está así definida de manera única y, por consiguiente, w será continua entre elementos Similarmente, $\partial w/\partial n$ está definida por cinco cantidades y varía como un polinomio de cuarto grado. Esto satisface además la condición de continuidad de pendientes y deformaciones entre elementos

Si escribimos el polinomio completo de quinto grado†

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_{21} y^5 \tag{1 64}$$

podemos proceder, siguiendo los razonamientos empleados para desarrollar el rectángulo de la Sección 1.4, y escribir

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \cdots + \alpha_{21} y_1^5 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1 &= \alpha_2 + \qquad + \alpha_{20} y_1^3 \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_1 &= 2\alpha_4 + \cdot \quad + 2\alpha_{19} y_1^3 \end{aligned}$$

y obtener finalmente una expresión

$$\mathbf{a}^e = \mathbf{C}\boldsymbol{a} \tag{1.65}$$

donde $\mathbf{C}$ es una matriz 21×21.

La única dificultad manifiesta que el lector puede encontrar para formar esta matriz, es la definición de pendientes normales en los nodos laterales. Sin embargo, si se advierte que

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \cos\phi \frac{\partial w}{\partial x} + \operatorname{sen}\phi \frac{\partial w}{\partial y} \tag{1 66}$$

en la cual ϕ es el ángulo que el lado considerado forma con el eje x, se simplifica la formulación Por supuesto, no es fácil determinar explícitamente la inversa de $\mathbf{C}$, y las expresiones de las rigideces, etc., se evalúan como en la expresión (1.21) mediante inversión numérica

La existencia de nodos laterales con un único grado de libertad es molesta Se puede, sin embargo, restringir éstos, permitiendo solamente una variación cúbica de la pendiente normal a lo largo de cada lado del

† Para efectuar estas operaciones se recomienda usar coordenadas cartesianas en vez de coordenadas de área; la simetría está asegurada ya que el polinomio es completo

triángulo Entonces, la matriz $\mathbf{C}$ y los grados de libertad pueden reducirse explícitamente a dieciocho para dar un elemento como el que se representa en la Figura 1.19(e), que tiene tres nodos de vértice y dieciocho grados de libertad Es éste en realidad el elemento más útil en la práctica.

Ambos elementos han sido descritos en varias publicaciones durante 1968 y obviamente las conclusiones obtenidas se alcanzaron independientemente en cada una de ellas. El hecho de su "descubrimiento simultáneo" es una de las curiosidades del progreso científico, y parece que se da en muchos campos donde se alcanza un cierto nivel adecuado para el desarrollo de un problema particular. Así, el elemento de veintiún grados de libertad ha sido descrito por Argyris *et al*,[22] Bell,[18] Bosshard,[21] Irons[13] y Visser,[23] ordenando los autores alfabéticamente

La versión reducida de dieciocho grados de libertad fue desarrollada por Argyris *et al*,[22] Bell[18] y Cowper *et al*.[20] Una formulación esencialmente similar, pero más complicada, ha sido desarrollada por Butlin y Ford,[19] siendo Withum[56] y Felippa[57] los que con anterioridad hicieron mención a las funciones de forma de este elemento

Es evidente que podrían desarrollarse muchos otros elementos de este tipo y, desde luego, algunos de ellos se sugieren en las referencias anteriores Un estudio muy completo se encuentra incluido en el trabajo de Zenisek,[58] Peano[58] y otros [60–62] Conviene, sin embargo, tener siempre presente que implican una incongruencia cuando las propiedades del material varían por intervalos, en forma no continua Aún más, la existencia de derivadas de orden elevado dificulta imponer condiciones de contorno, y por supuesto desaparece la interpretación de las derivadas de la energía como "fuerzas nodales" Así pues, los ingenieros pueden tener todavía una preferencia justificada hacia la formulación más intuitiva descrita con anterioridad, pese al hecho de que la precisión de estos elementos ha sido demostrada en el gran número de referencias citadas

EVITANDO LAS DIFICULTADES EN LA CONTINUIDAD -ELEMENTOS MIXTOS Y RETRINGIDOS-

1.16 Formulaciones mixtas–consideraciones generales–

Las Ecs (1 9) y (1.13) de este capítulo presentan numerosas posibilidades para la aproximación de problemas de placas delgadas y gruesas utilizando formas mixtas (es decir, reducibles). En éstas se aproxima directamente más de un conjunto de variables, y generalmente deben relajarse los requisitos de continuidad para dichas aproximaciones Los procedimientos utilizados en las formulaciones mixtas se han descrito de manera general en los Capítulos 12 y 13 del Volumen 1 y a ellos se remite al lector para los detalles de los principios generales

Las opciones que se abren son muchas y ciertamente lo mismo ocurre con el número de publicaciones que proponen diversas alternativas Limitaremos, por tanto, la discusión a las que son más útiles, pero incluso en este caso la presentación será breve.

Para evitar una referencia constante al comienzo de este capítulo, reescribiremos de nuevo las ecuaciones fundamentales (1 12) y (1.13) en su forma abreviada con los conjuntos de variable **M**, $\boldsymbol{\theta}$, **S** y w.

$$\mathbf{M} - \mathbf{D}\mathbf{L}\boldsymbol{\theta} = 0 \qquad (1\ 67a)$$

$$\mathbf{L}^T\mathbf{M} + \mathbf{S} = 0 \qquad (1\ 67b)$$

$$\frac{\mathbf{S}}{\alpha} + \boldsymbol{\theta} - \nabla w = 0 \qquad (1\ 67c)$$

$$\nabla^T\mathbf{S} = -q \qquad (1\ 67d)$$

A éstas, naturalmente, hay que añadir las condiciones de contorno apropiadas Para los detalles de los operadores, etc , es necesario consultar siempre la forma completa anterior

Las formas mixtas que utilizan la aproximación directa de las cuatro variables son poco usuales. El conjunto más obvio surge de la eliminación de los momentos **M**, es decir

$$\mathbf{L}^T\mathbf{D}\mathbf{L}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{S} = 0 \qquad (1\ 68a)$$

$$\frac{\mathbf{S}}{\alpha} + \boldsymbol{\theta} - \nabla w = 0 \qquad (1\ 68b)$$

$$\nabla^T\mathbf{S} = -q \qquad (1\ 68c)$$

y es la base de una formulación directamente relacionada con las consideraciones de la elasticidad tridimensional Esto es tan importante que dedicaremos todo el Capítulo 2 enteramente a este problema, aunque de nuevo puede utilizarse para el caso de placas delgadas y gruesas. Sin embargo, volveremos a él en una sección posterior de este capítulo

Uno de los procedimientos mixtos originales mantiene la aproximación de las variables **M** y w y elimina **S** y $\boldsymbol{\theta}$ La forma que se presenta aquí está restringida al caso de placas delgadas y, por consiguiente, se toma $\alpha = \infty$. Se reescriben ahora las Ecs (1 67a) y (1 67c) como

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{L}\nabla w = 0 \qquad (1\ 69a)$$

y las Ecs (1 67b) y (1.67d)

$$\nabla^T\mathbf{L}^T\mathbf{M} = -q \qquad (1\ 69b)$$

La aproximación puede hacerse ahora de manera directa tomando

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}_M\bar{\mathbf{M}} \qquad \text{y} \qquad w = \mathbf{N}_w\bar{\mathbf{w}} \qquad (1\ 70)$$

donde $\bar{\mathbf{M}}$ y $\bar{\mathbf{w}}$ indican los parámetros nodales (u otros) de los desarrollos y $\mathbf{N}_M$ y $\mathbf{N}_w$ son las funciones de forma apropiadas

Las ecuaciones de la aproximación pueden hacerse, como es conocido (ver Capítulo 9 del Volumen 1), a través de un principio variacional adecuado o directamente en forma de residuos ponderados de Galerkin, produciendo ambas resultados idénticos. Escogeremos aquí la última, aunque las primeras presentaciones de esta aproximación por Herrmann[63] y posteriormente otros autores[64–73] usan todas el principio variacional de Hellinger-Reissner

Ponderando la primera de las Ecs (1.69) por $\mathbf{N}_M^T$ y la segunda por $\mathbf{N}_w^T$ se tiene, tras integración por partes, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{M}} \\ \bar{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \qquad (1\ 71)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_\Omega \mathbf{N}_M^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}_M\, d\Omega, \qquad & f_1 &= \int_{\Gamma_t} \nabla\mathbf{N}_w^T \begin{Bmatrix} \tilde{M}_n \\ \tilde{M}_{ns} \end{Bmatrix} d\Gamma \\ \mathbf{B} &= \int_\Omega (\mathbf{L}\mathbf{N}_M)^T\nabla\mathbf{N}_w\, d\Omega & f_2 &= \int_\Omega \mathbf{N}_w^T\mathbf{q}\, d\Omega + \int_\Gamma N_w^T S_n\, d\Gamma \end{aligned} \qquad (1\ 72)$$

siendo $\tilde{M}_n$ y $\tilde{M}_{ns}$ los momentos prescritos en el contorno y S_n los esfuerzos cortantes prescritos

Es inmediatamente obvio que sólo se requiere continuidad C_0 para ambas interpolaciones de **M**† y w –y muchos tipos de elementos son, por tanto, aplicables– Naturalmente deben satisfacerse los tests de la parcela apropiados para la formulación mixta[41] y esto requiere como condición necesaria que

$$n_m \geq n_w \qquad (1\ 73)$$

donde n_m denota el número de parámetros que describe el campo de elementos y n_w el campo de desplazamientos

Basados en esta aproximación se han desarrollado muchos elementos útiles, aunque su uso es limitado debido a la dificultad de interconexión con

† Debe saberse que si se impone la continuidad C_0 para todo el campo de **M**, se produce un exceso de continuidad y, por consiguiente, es usual prescribir la continuidad de M_n y M_{ns} solamente en los contornos entre elementos.

otras estructuras y también debido al hecho de que la matriz de coeficientes en la Ec (1 71) es indefinida con muchos ceros en la diagonal.

Ciertamente, una suerte similar han seguido los numerosos "elementos de equilibrio" en los cuales se escoge el campo de momento *a priori* de forma que se satisfaga la Ec (1 69b) Hay que destacar aquí la investigación en este tema de Fraeijs de Veubeke[72] y otros [11,29] Debe advertirse, sin embargo, que el segundo de estos elementos[29] es de hecho idéntico al elemento mixto desarrollado por Herrmann[65] y Hellan[64] (ver también la referencia [73])

1.17 Elementos de placa híbridos

Los elementos híbridos son esencialmente elementos mixtos en los que el campo en su interior se define por un conjunto de parámetros y el campo en su contorno por otro conjunto, como se muestra en la Figura 1.24 Este último campo se escoge generalmente de forma similar a los modelos de desplazamientos usuales y, por tanto, puede incorporarse fácilmente en un programa general y ciertamente utilizarse con los modelos de desplazamiento estándar ya estudiados Los parámetros internos pueden eliminarse fácilmente (ya que están confinados a un elemento aislado) y por tanto la diferencia con las formas de desplazamientos usuales se concentran todas en la subrutina del elemento El concepto original es debido a T.H H Pian[74,75] quien fue pionero en utilizar con éxito este procedimiento, y hoy en día existen muchas variantes del mismo en el contexto de la teoría de placas delgadas [54,76–85]

En la mayoría de las aproximaciones se supone un campo de tensiones equilibrado expresado por funciones de forma adecuadas y parámetros incógnita. En otros casos, se toma un campo de tensión mixto en el interior Jirousek[54,85] ha desarrollado un procedimiento más refinado en el que supone una solución analítica (generalmente por desarrollos en serie) en el interior del elemento que satisface exactamente todas las ecuaciones diferenciales para un campo homogéneo

Todos los procedimientos utilizan un acoplamiento apropiado entre los parámetros del interior con los definidos en el contorno mediante parámetros de "marco" En el Capítulo 13 del Volumen 1 se describen los procedimientos para efectuar este acoplamiento en el contexto de las ecuaciones de elasticidad, siendo necesario un pequeño cambio de variables para adaptarlos a este caso Se dejan estas operaciones al lector, que puede consultar las referencias apropiadas para encontrar los detalles necesarios

En este punto debemos efectuar algunas consideraciones en relación con los elementos híbridos

Observación 1 Lo primero a destacar es que si se quiere eliminar la

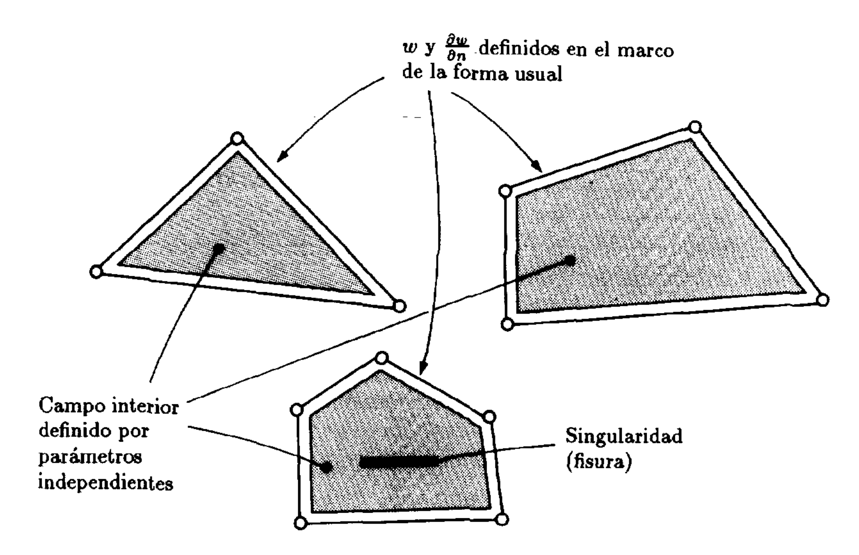


Figura 1.24 Elementos híbridos.

singularidad de las matrices (de rigidez) finales, el número de parámetros internos, n_1, debe ser al menos tan grande como el de parámetros de marco, n_F, que describen los desplazamientos en el contorno menos el número de movimientos de sólido rígido. Así se requiere que

$$n_1 \geq n_F - 3 \tag{1.74}$$

para el caso de placas.

Observación 2. Lo segundo a destacar es que es posible, aunque poco productivo, introducir un número excesivo de parámetros internos que simplemente conducen a una solución más exacta de un problema "equivocado", en el que los "marcos" están restringiendo el interior de los elementos. Así no se obtiene una precisión adicional en el conjunto de la solución.

Observación 3. La mayor parte de las formulaciones se disponen para placas heterogéneas (y, por tanto, para problemas no lineales del tipo de los que hablaremos más tarde). Sin embargo, esto no es cierto para los elementos híbridos de Trefftz[54,85] donde se necesita disponer de una solución exacta de las ecuaciones diferenciales en el interior de cada elemento. Dichas soluciones no son conocidas en dominios heterogéneos arbitrarios y por ello el procedimiento falla en estos casos. Sin embargo, para problemas homogéneos los elementos suelen ser más precisos que cualquiera de los anteriores, y ciertamente permiten desarrollar elementos

poligonales con singularidades y/o contornos interiores mediante el uso de funciones especiales (ver Figura 1 24) Obviamente siempre debe tenerse en cuenta esta ventaja

El número de elementos híbridos desarrollados es igual (o incluso mayor) que el de elementos basados en el método de desplazamientos y en la Figura 1 16 se muestra el comportamiento de algunos de los más sencillos Ciertamente puede demostrarse que muchos elementos del tipo híbrido duplican precisamente los diversos elementos incompatibles que satisfacen los requisitos de convergencia Así, es interesante advertir que el triángulo de Allman[84] da precisamente los mismos resultados que el elemento "alisado" de Razzaque de las referencias [32] y [33] o, ciertamente, del elemento de la Sección 1.5

1.18 Condiciones discretas de Kirchhoff

Concluimos este capítulo dando unas pinceladas de otro procedimiento para obtener elementos con excelente comportamiento mediante un método de restricciones (mixto).

Es conveniente aquí (aunque de ninguna manera esencial) utilizar un principio variacional para escribir las Ecs. (1 68) Éste puede escribirse simplemente como la minimización de la energía potencial

$$(min)\ \Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{L}\boldsymbol{\theta})^T\mathbf{D}(\mathbf{L}\boldsymbol{\theta})\,d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{S}^T\frac{1}{\alpha}\mathbf{S}\,d\Omega - \int_\Omega wq\,d\Omega + \text{términos de contorno} \qquad (1\ 75a)$$

sometida a la condición de que se satisfaga la Ec (1 68b), es decir

$$\frac{\mathbf{S}}{\alpha} + \boldsymbol{\theta} - \nabla w = 0 \qquad (1\ 75b)$$

Utilizaremos esta forma para el caso más general de placas gruesas del Capítulo 2, pero en el caso de placas delgadas que se trata en este capítulo podemos simplificarla haciendo $\alpha = \infty$ y reescribiendo las ecuaciones anteriores como

$$(min)\ \Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{L}\boldsymbol{\theta})^T\mathbf{D}(\mathbf{L}\boldsymbol{\theta})\,d\Omega - \int_\Omega wq\,d\Omega \qquad (1\ 76a)$$

sometida a

$$\boldsymbol{\theta} - \nabla w = 0 \qquad (1\ 76b)$$

Adviértase aquí que la mención explícita de los esfuerzos cortantes $\mathbf{S}$ ya no es necesaria

Para resolver el problema presentado por las Ecs (1 76) podemos

a) aproximar w y $\boldsymbol{\theta}$ mediante aproximaciones independientes con continuidad C_0, tal como

$$w = \mathbf{N}_w\bar{\mathbf{w}} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{N}_\theta\bar{\boldsymbol{\theta}} \qquad (1\ 77)$$

b) imponer una aproximación discreta a la restricción expresada por (1.76b) y resolver el problema de minimización resultante de sustituir (1 77) en (1 76a) mediante eliminación discreta, utilizando multiplicadores de Lagrange, o a través de procedimientos de penalización

En la aplicación del denominado método de *restricciones discretas de Kirchhoff*, se aproxima la Ec (1 76b) por colocación puntual (o subdominios) y se utiliza eliminación directa para *disminuir el número de parámetros nodales* Naturalmente podrían utilizarse otras formas de imponer las restricciones con *idéntico* efecto y volveremos a este tema en el siguiente capítulo Sin embargo, la eliminación directa tiene la ventaja de reducir el número total de variables y puede utilizarse efectivamente

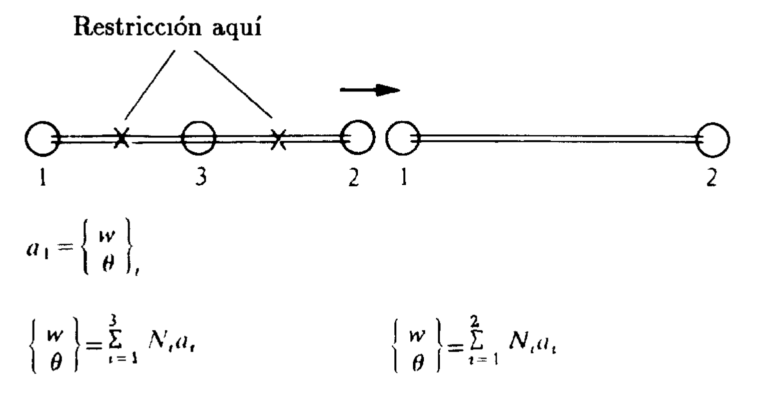


Figura 1 25 Elemento de viga con una interpolación independiente lagrangiana de w y θ con la condición $\partial w/\partial x - \theta = 0$ aplicada en los puntos ×

Ilustraremos este proceso en un sencillo ejemplo unidimensional de una viga como la que se muestra en la Figura 1 25 En este caso se interpola la flecha y el giro de idéntica manera mediante polinomios cuadráticos escribiendo en lugar de la Ec (1.77)

$$\left\{\begin{matrix} w \\ \theta \end{matrix}\right\} = \sum_{i=1}^{3} N_i \left\{\begin{matrix} \bar{w} \\ \bar{\theta} \end{matrix}\right\}_i \tag{1.78}$$

donde i son los tres nodos del elemento

Las restricciones se aplican ahora por colocación puntual en las coordenadas x_α y x_β de la viga, es decir, se requiere que en esos puntos

$$\theta - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{1.79}$$

Esto puede escribirse, utilizando la interpolación (1.78), como dos ecuaciones simultáneas

$$\sum_{i=1}^{3} N_i(\alpha)\bar{w}_i - \sum_{i=1}^{3} N_i(\alpha)\bar{\theta}_i = 0$$

y

$$\sum_{i=1}^{3} N_i(\beta)\bar{w}_i - \sum_{i=1}^{3} N_i(\beta)\bar{\theta}_i = 0 \tag{1.80}$$

donde

$$N(\alpha) \equiv N(x_\alpha) \qquad \text{y} \qquad \dot{N}(\alpha) \equiv \left(\frac{dN}{dx}\right)_{x=x_\alpha}, \quad \text{etc.}$$

Las ecuaciones (1.80) pueden utilizarse para eliminar $\bar{w}_3$ y $\bar{\theta}_3$. Escribiendo las Ecs. (1.80) explícitamente, se tiene

$$\mathbf{A}_3 \left\{\begin{matrix} \bar{w}_3 \\ \bar{\theta}_3 \end{matrix}\right\} = -\mathbf{A}_1 \left\{\begin{matrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{matrix}\right\} - \mathbf{A}_2 \left\{\begin{matrix} \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{matrix}\right\} \tag{1.81}$$

donde

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \dot{N}_i(\alpha) - N_i(\alpha) \\ N_i(\beta) - N_i(\beta) \end{bmatrix}$$

La sustitución de las expresiones anteriores en (1.78) proporciona directamente funciones de forma en las que el nodo central se ha eliminado, o sea

$$\left\{\begin{matrix} w \\ \theta \end{matrix}\right\} = \sum_{i=1}^{2} \bar{N}_i \left\{\begin{matrix} \bar{w} \\ \bar{\theta} \end{matrix}\right\}_i \tag{1.82}$$

con

$$\bar{\mathbf{N}} = N_i\mathbf{I} - \mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{A}_i$$

donde $\mathbf{I}$ es una matriz unidad 2×2.

Si se utilizan estas funciones para una viga se obtiene un elemento que es convergente. Ciertamente, en el caso particular de que x_α y x_θ se escojan en los dos puntos de Gauss del elemento éste coincide precisamente con el que se obtiene con una formulación de desplazamientos y una interpolación cúbica para w. Esta coincidencia es *exacta* para una viga de sección uniforme.

En problemas bidimensionales de placas la situación es un poco más compleja, pero si imaginamos que x coincide con la dirección tangente a un lado del elemento la eliminación anterior impone una *completa compatibilidad* a lo largo de un lado cuando se definen los gradientes de w en los extremos. Sin embargo, no está claro *a priori* que mediante una imposición discreta de las restricciones se obtenga siempre convergencia –aunque naturalmente se puede aducir eurísticamente que la colocación aplicada en un número grande de direcciones debería conducir a un elemento aceptable–. Ciertamente el test de la parcela se satisface en la mayoría de los elementos en los cuales la interpolación de w (y, por tanto, la de $\partial w/\partial s$) tiene continuidad C_0.

Las restricciones que se aplican más frecuentemente en la práctica involucran la colocación por subdominios o por líneas para incrementar su número (que debe ser naturalmente siempre menor que el número de variables finales) y se utilizan frecuentemente restricciones adicionales tales como

$$I_\Gamma \equiv \int_{\Gamma_e} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \theta_s\right) ds = 0$$

$$I_{\Omega x} \equiv \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right) d\Omega = 0 \tag{1.83}$$

o

$$I_{\Omega y} \equiv \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right) d\Omega = 0$$

El álgebra necesaria para la eliminación no es siempre fácil y se remite al lector a las referencias originales donde encontrará los detalles correspondientes a cada elemento en particular.

El concepto de restricciones discretas de Kirchhoff fue introducido por primera vez por Wempner *et al.*,[86] Stricklin *et al.*[87] y Dhatt[88] en 1968-69 y ha sido aplicado extensamente desde esa fecha,[89–102] existiendo incluso desarrollos en marcha en el momento de escribir este libro. En particular, el triángulo con nueve grados de libertad[89,90] y el complejo elemento semiloof de Irons[97,98] son ejemplos de aplicaciones con éxito de este concepto que se han incorporado en muchos programas comerciales.

La Figura 1.26 ilustra algunos de los elementos rectangulares de este tipo junto con las referencias adecuadas.

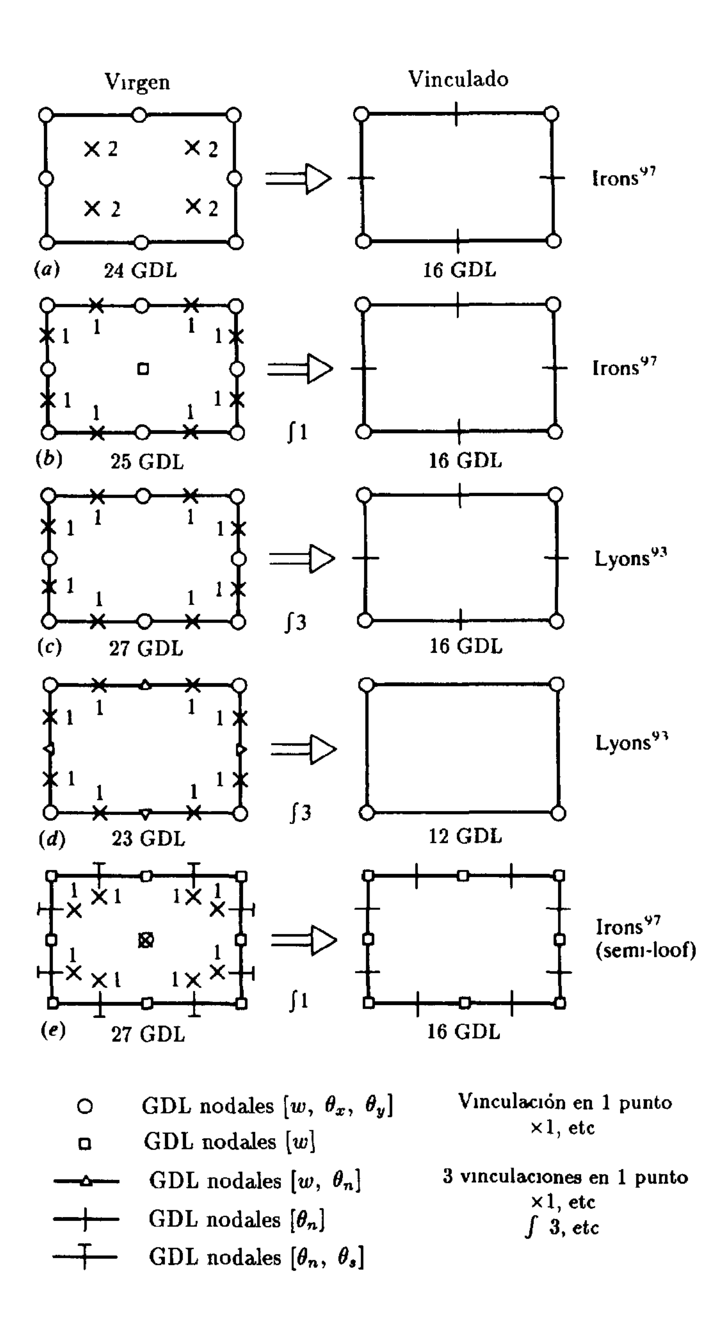


Figura 1 26 Diversos elementos de tipo DKT de forma cuadrilátera.

1.19 Conclusiones finales –¿qué tipo de elemento?–

La extensa bibliografía de este capítulo describiendo los numerosos procedimientos capaces de resolver los problemas de placas delgadas de Kirchhoff muestra la importancia del tema en ingeniería estructural – y en particular como introducción al análisis de láminas– y la gran variedad de técnicas a utilizar. Realmente sólo se ha descrito una parte de la historia ya que el próximo capítulo, que trata de la formulación de placas gruesas, presenta muchas alternativas prácticas para tratar el mismo problema

Se espera que esta presentación, además de proporcionar una guía para un problema particular, sea útil en su aplicación directa a otros campos donde las ecuaciones del problema conducen a los requisitos de continuidad C_1

Los usuarios de programas comerciales se encontrarán con el problema de *qué elemento* debe utilizarse para satisfacer sus necesidades. En la Tabla 1 6 se han listado algunos de los elementos más sencillos conocidos y cuyo comportamiento se compara en la Figura 1 16 La selección no es siempre única y mucho dependerá de las preferencias del usuario y de las modificaciones que desee hacer en cada elemento Como veremos posteriormente en problemas de láminas, los elementos triangulares son la elección óptima para muchas configuraciones. Además, dichos elementos son también los mejores si se utiliza refinamiento adaptable de la malla para obtener errores de una magnitud determinada

Referencias

1 G. KIRCHHOFF, "Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe", *J. Reine und Angewandte Mathematic*, **40**, 51–88, 1850.

2. S TIMOSHENKO y S WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed , McGraw-Hill, New York, 1959

3 L BUCCIARELLY y N. DWORSKY, *Sophie Germain, An Essay on the History of Elasticity*, Reidel, New York, 1980. Ver también E. REISSNER,"Reflections on the theory of elastic plates", *Appl Mech. Rev* , **38**, 1453–64, 1985

4 E. REISSNER, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J Appl Mech.*, **12**, 69–76, 1945

5 R.D. MINDLIN, "Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates", *J Appl. Mech* , **18**, 31–8, 1951.

6 J. BABUSKA y T SCAPOLLA, "Benchmark computation and perfomance evaluation for a rhombic plate bending problem", *Int J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 155-180, 1989.

7 I BABUSKA, "The stability of domains and the question of formulation of plate problems", *Appl. Math* , 463-7, 1962

8. B.M IRONS y J K DRAPER, "Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending", *JAIAA*, **3**, 5, 1965
9 R W CLOUGH y J L TOCHER, "Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending", *Proc Conf. on Matrix Methods in Struct Mech* , Air Force Inst of Tech , Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965
10 G P.BAZELEY, Y K CHEUNG, B M.IRONS y O.C.ZIENKIEWICZ, "Triangular elements in bending –conforming and non-conforming– solutions", *Proc Conf on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst Tech* , Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965.
11 G SANDER, "Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion-torsion", *Bull. Soc Royale des Sci de Liège*, **33**, 456-94, 1964
12. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, "Bending and stretching of plates", *Proc Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech* , Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965
13 B M IRONS, "A conforming quartic triangular element for plate bending", *Int J Num Meth. Eng* , **1**, 29-46, 1969.
14. R.W. CLOUGH y C A FELIPPA, "A refined quadrilateral element for analysis of plate bending", *Proc 2nd Conf. on Matrix Methods in Struct Mech* , Air Force Inst of Tech , Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1968.
15 B FRAEIJS DE VEUBEKE, "A conforming finite element for plate bending", *Int J Solids Struct* , **4**, 95–108, 1968.
16. F.K. BOGNER, R.L FOX y L A SCHMIT, "The generation of interelement-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae", *Proc Conf. Matrix Methods in Struct Mech.*, Air Force Inst. of Tech , Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965.
17. I.M. SMITH y W. DUNCAN, "The effectiveness of nodal continuities in finite element analysis of thin rectangular and skew plates in bending", *Int. J Num Mech. Eng* , **2**, 253-8, 1970.
18 K BELL, "A refined triangular plate bending element", *Int J Num. Meth. Eng* , **1**, 101–22, 1969.
19 G A. BUTLIN y R. FORD, "A compatible plate bending element", University of Leicester Eng. Dept. report, 68-15, 1968
20 G R COWPER, E KOSKO, G M LINDBERG y M.D OLSON, "Formulation of a new triangular plate bending element", *Trans Canad. Aero-Space Inst.*, **1**, 86-90, 1968. (Ver también NRC Aero report LR514, 1968).
21. W. BOSSHARD, "Ein neues vollverträgliches endliches Element fur Platten-biegung", *Mt. Ass. Bridge Struct. Eng. Bulletin*, **28**, 27-40, 1968

22. J H ARGYRIS, I. FRIED y D.W. SCHARPF, "The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method", *The Aeronautical J., Roy Aeronaut Soc.*, **72**, pp. 701-9, 1968
23. W VISSER, "The finite element method in deformation and heat conduction problems", Dr Wiss Dissertation, Tech. Hoch , Delft, 1968.
24 B M. IRONS, Comments on "Complete polynomial displacement fields for finite element method", por P C Dunne, *The Aeronautical J , Roy Aeronaut. Soc* , **72**, 709, 1968
25. O C ZIENKIEWICZ y Y K CHEUNG, "The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs", *Proc Inst. Civ. Eng.*, **28**, 471-88, 1964.
26 R W CLOUGH, "The finite element method in structural mechanics", Capítulo 7 de *Stress Analysis* (eds. O.C Zienkiewicz y G S. Holister), Wiley, Chichester, 1965
27 D J. DAWE, "Parallelogram element in the solution of rhombic cantilever plate problems", *J. Strain Analysis*, **1**, 223-30, 1966.
28 J.H ARGYRIS, "Continua and discontinua", *Proc Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965
29 L S D. MORLEY, "On the constant moment plate bending element", *J. Strain Analysis*, **6**, 20–4, 1971
30 R D WOOD, "A shape function routine for the constant moment triangular plate bending element", *Eng. Comp* , **1**, 189–98, 1984
31 R. NARAYANASWAMI, "New triangular plate-bending element with transverse shear flexibility", *JAIAA.*, **12**, 1761-3, 1974.
32 A RAZZAQUE, "Program for triangular bending element with derivative smoothing", *Int. J Num Meth. Eng* ., **5**, 588-9, 1973.
33. B.M. IRONS y A. RAZZAQUE, "Shape function formulation for elements other than displacement models", en *Proc 2nd Conf on Variational Methods in Engineering*, Southampton Univ., 1972.
34 J E WALZ, R E FULTON y N J CYRUS, "Accuracy and convergence of finite element approximation", en *Proc 2nd Conf on Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1968.
35. R.J. MELOSH, "Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method", *JAIAA*, **1**, 1631-7, 1963.
36. A ADINI y R W CLOUGH, "Analysis of plate bending by the finite element method", Report to National Sci Found U.S A. G.7337, 1961
37. Y K. CHEUNG, I P KING y O.C ZIENKIEWICZ, "Slab bridges with arbitrary shape and support conditions –a general method of analysis based on finite elements", *Proc. Inst. Civ Eng.* , **40**, 9–36,

1968.
38 J L TOCHER y K K KAPUR, "Comment on basis of derivation of matrices for direct stiffness method", por R J. Melosh, *JAIAA*, **3**, 1215-6, 1965
39 R D HENSHELL, D WALTERS y G B. WARBURTON, "A new family of curvilinear plate bending elements for vibration and stability", *J Sound Vibration*, **20**, 327-43, 1972
40 R.L TAYLOR, O C ZIENKIEWICZ, J.C SIMO y A H C CHAN, "The patch test– a condition for assessing FEM convergence", *Int. J Num Meth Eng*, **22**, 39–62, 1986
41 O C. ZIENKIEWICZ, S QU, R L. TAYLOR y S NAKAZAWA, "The patch test for mixed formulations", *Int. J Num Meth. Eng.*, **23**, 1873–83, 1986.
42 O.C ZIENKIEWICZ y D LEFEBVRE, "Three field mixed approximation and the plate bending problem", *Comm. Appl. Num Meth.*, **3**, 301–9, 1987.
43. P G BERGAN y L HANSSEN, "A new approach for deriving "good" element stiffness matrices", en *The Mathematics of Finite Elements and Applications*, (ed J R Whiteman), 483-97, Academic Press, London, 1977.
44 R V SOUTHWELL, "Relaxation methods in theoretical physics", Clarendon Press, Oxford, 1946
45 P G BERGAN y M.K NYGARD , "Finite elements with increased freedom in choosing shape functions", *Int J Num. Meth. Eng*, **20**, 643–63, 1984
46. C A. FELIPPA y P G. BERGAN, "A triangular plate bending element based on energy orthogonal free formulation", *Comp Meth. Appl Mech Eng.*, **61**, 129–60, 1987
47 A SAMUELSSON, "The global constant strain condition and the patch test", en *Energy Methods in Finite Element Analysis*, (eds R Glowinski, E Y Rodin y O C Zienkiewicz), Cap 3, pp 49–68, Wiley, Chichester, 1979
48. B. SPECHT, "Modified shape functions for the three node plate bending element passing the patch test", *Int J Num Meth Eng.*, **26**, 705-15, 1988.
49 T J R HUGHES, *The Finite Element Method* , pp 311–12, Prentice Hall, New Jersey, 1987
50 H MARCUS, *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten*, Springer, Berlin, 1932.
51 P BALLLESTEROS y S L LEE, "Uniformly loaded rectangular plate supported at the corners", *Int J Mech Sci.*, **2**, 206–11, 1960.
52. J.L BATOZ, K J. BATHE y L W HO, "A study of three-node triangular plate bending elements", *Int J Num Meth Eng.*, **15**, 1771–812, 1980

53 M.M. HRABOK y T M HRUDEY, "A review and catalogue of plate bending finite elements", *Comp. Struct.*, **19**, 479–95, 1984.
54. J JIROUSEK y LAN GUEX, "The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending", *Int. J. Num Meth. Eng.*, **23**, 651–93, 1986.
55 A. RAZZAQUE, "Finite element analysis of plates and shells", Ph.D thesis, Civil Engineering Department, Univ of Wales, Swansea, 1972
56 D. WITHUM, "Berechnung von Platten nach dem Ritzschen Verfahren mit Hilfe dreieckformiger Meshnetze", Mittl Inst Statik Tech Hochschule, Hannover, 1966.
57 C A FELIPPA, "Refined finite element analysis of linear and nonlinear two-dimensional structures", Ph D thesis, Structural Engineering Department, University of California, Berkeley, 1966
58. A ZENISEK, "Interpolation polynomials on the triangle", *Int. J Num Meth. Eng*, **10**, 283-96, 1976
59. A PEANO, "Conforming approximation for Kirchhoff plates and shells", *Int. J. Num Meth. Eng*, **14**, 1273–91, 1979.
60 J J GOEL, "Construction of basic functions for numerical utilization of Ritz's method", *Numerische Math*, **12**, 435-47, 1968
61. G. BIRKHOFF y L MANSFIELD, "Compatible triangular finite elements", *J. Math Analysis Appl.*, **47**, 531-53, 1974
62 C L LAWSON, "C^1-compatible interpolation over a triangle", NASA Jet. Prop. Lab , TM, 33–770, 1976
63 L.R HERRMANN, "A bending analysis for plates", en *Proc Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air force Institute of Technology, Wright-Patterson AF Base, Ohio, pp. 577–602, 1965
64 K HELLAN, "Analysis of elastic plates in flexure by a simplified finite element method ", Acta Polytechnica Scandinavica report C146, 28 pp., Trondheim, 1967.
65 L R HERRMANN, "Finite element bending analysis of plates", *Proc Am Soc. Eng*, **93**, EM 5, 13-26, 1967
66 J BRON Y G. DHATT, "Mixed quadrilateral elements for bending", *JAIAA*, **10**, 1359-61, 1972
67. W VISSER, "A refined mixed type plate bending element", *JAIAA.*, **7**, 1801–3, 1969.
68 J C. BOOT, "On a problem arising from the derivation of finite element matrices using Reissner's principle", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **12**, 1879–82, 1978
69 A CHATERJEE y A V SETLUR, "A mixed finite element formulation for plate problems", *Int J. Num. Meth. Eng*, **4**, 67-84, 1972

70 J W. HARVEY y S KELSEY, "Triangular plate bending elements with enforced compatibility", *JAIAA.*, **9**, 1023–6, 1971

71 B FRAEIJS DE VEUBEKE y O.C. ZIENKIEWICZ, "Strain energy bounds in finite element analysis by slab analogy", *J Strain Analysis*, **2**, 265-71, 1967

72. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, "An equilibrium model for plate bending", *Int J Solids Struct*, **4**, 447-68, 1968

73. L S D. MORLEY, "The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems", *Aero Q.*, **19**, 149–69, 1968

74 T H.H. PIAN, "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution", *JAIAA*, **2**, 1332-6, 1964.

75. T.H.H PIAN y P. TONG, "Basis of finite element methods for solid continua", *Int J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 3–28, 1969.

76 R.J. ALLWOOD y G M M. CORNES, "A polygonal finite element for plate bending problems using the assumed stress approach", *Int J Num. Meth. Eng*, **1**, 135-60, 1969

77 P TONG, "New displacement hybrid models for solid continua", *Int. J Num Meth Eng*, **2**, 73-83, 1970

78 I TORBE y K. CHURCH, "A general quadrilateral plate element", *Int J. Num. Meth. Eng*, **9**, 855–68, 1975.

79 B.E GREENE, R.E. JONES, R.W MCLAY y D.R. STROME, "Generalized variational principles in the finite element method", *JAIAA*, **7**, 1254-60, 1969.

80 R.D COOK, "Two hybrid elements for analysis of thick, thin and sandwich plates", *Int J Num. Meth Eng*, **5**, 277–99, 1972.

81. R.D. COOK y S.G LADKANY, "Observations regarding assumed–stress hybrid plate elements", *Int J Num. Meth. Eng.*, **8**, 513–20, 1974

82. B.K NEALE, R.D HENSHELL y G EDWARDS, "Hybrid plate bending elements", *J. Sound Vibr*, **22**, 101–12, 1972

83 C JOHNSON, "On the convergence of a mixed finite-element method for plate bending problems", *Num. Math*, **21**, 43–62, 1973.

84 D J ALLMAN, "A simple cubic displacement model for plate bending", *Int J. Num Meth. Eng.*, **10**, 263–81, 1976.

85 J JIROUSEK, "Improvement of computational efficiency of the 9 DOF triangular hybrid-Trefftz plate bending element" (Letter to Editor), *Int J. Num. Meth. Eng*, **23**, 2167–8, 1986.

86 G.A WEMPNER, J T. ODEN y D K. CROSS, "Finite element analysis of thin shells", *Proc Am. Sci Civ Eng*, **EM6**, 1273–94 , 1968.

87. J H. STRICKLIN, W HAISLER, P TISDALE y K GUNDERSON, " A rapidly convering triangle plate element", *JAIAA*, **7**, 180–1, 1969

88 G S DHATT, "Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis", en *Proc Symp. on Applications of FEM in Civil Engineering* (eds W R ROWAN y R M Hackett), Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 1969

89. G. DHATT, "An efficient triangular shell element", *JAIAA*, **8**, 2100–2, 1970

90 J L BATOZ y G. DHATT, "Development of two simple shell elements", *JAIAA*, **10**, 237–8, 1972

91 J T. BALDWIN , A RAZZAQUE y B M. IRONS, "Shape function subroutine for an isoparametric thin plate element", *Int. J. Num Meth Eng.*, **7**, 431–40, 1973

92 M A CRISFIELD, "A qualitative Mindlin element using shear constraints", *Comp. Struct.*, **18**, 833–52, 1984

93 L P.R LYONS, "A general finite element system with special analysis of cellular structures", Ph D thesis, Imperial College of Science and Technology, London, 1977.

94 J L. BATOZ y M BEN TOHAR, "Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element", *Int J Num Meth Eng*, **18**, 1655–77, 1982

95 J.L BATOZ, "An explicit formulation for an efficient triangular plate bending element", *Int J Num Meth Eng*, **18**, 1077–89, 1982.

96 G. DHATT, L MARCOTTE y Y MATTE, "A new triangular discrete Kirchhoff plate-shell element", *Int J Num Meth. Eng*, **23**, 453–70, 1986

97. B.M. IRONS, "The semi loof shell element", en *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members* (eds. D.G. Aswell y R H Gallagher), cap. 11, pp. 197–222, Wiley, Chichester, 1976

98. R.A F MARTINS y D R J. OWEN, "Thin plate semi-loof element for structural analysis including stability and structural vibration", *Int. J Num Meth Eng*, **12**, 1667–76, 1978.

99. J.L. BATOZ y G DHATT, "Development of two simple shell elements", *JAIAA*, **10**, 237–8, 1972

100. J L. BATOZ y M.B TEHAR, "Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element", *Int J Num Meth Eng*, **18**, 1655–77, 1982

101. M A. CRISFIELD, "A new model thin plate bending element using shear constraints, a modified version of Lyon's element", *Comp Meth. Appl Mech Eng.*, **38**, 93–120, 1983.

102 M.A. CRISFIELD, *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis*, Vol 1, *Linear Analysis*, Pineridge Press, Swansea, 1986.

103 R.H. MACNEAL, "A simple quadrilateral shell element ", *Comp Struct.*, **8**, 175–83, 1978.

Capítulo 2

PLACAS GRUESAS DE REISSNER-MINDLIN. FORMULACIONES IRREDUCIBLE Y MIXTA

2.1 Introducción

En el Capítulo 1 se ha estudiado la teoría completa de placas gruesas de la cual la teoría de placas delgadas (Kirchhoff) surge como un caso límite En este capítulo se mostrará cómo la solución numérica de placas gruesas puede obtenerse con facilidad y cómo, en el límite, se dispone de un procedimiento alternativo para resolver todos los problemas del Capítulo 1

Para asegurar la continuidad se repiten más abajo las ecuaciones básicas [véase Ecs (1 9) a (1 13) o (1 67a) a (1 67d)]. Refiriéndonos a la Figura 1 3 del Capítulo 1 y al texto para las definiciones, comentaremos que todas las ecuaciones se podían haber deducido igualmente a partir del análisis completo tridimensional de una porción plana y relativamente delgada de un continuo elástico, tal como se muestra en la Figura 2 1 Todo lo que es necesario suponer ahora es que, cualesquiera que sean las funciones de forma en el plano xy, las de la dirección z son solamente lineales Además, se supone que las tensiones σ_{zz} toman un valor nulo,† eliminando así el efecto de la deformación vertical Las primeras aproximaciones de este tipo fueron introducidas bastante pronto[1,2] y los elementos deducidos entonces son exactamente del tipo de Reissner-Mindlin discutidos en el Capítulo 1

Las ecuaciones de las que partiremos y en las que basaremos toda la discusión siguiente son por lo tanto

$$\mathbf{M} - \mathbf{DL}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \tag{2.1a}$$

[véase Ecs (1 9) y (1 67a)],

$$\mathbf{L}^T\mathbf{M} + \mathbf{S} = \mathbf{0} \tag{2 1b}$$

† Reissner incluye el efecto de σ_{zz} en flexión, pero por simplicidad aquí lo despreciaremos

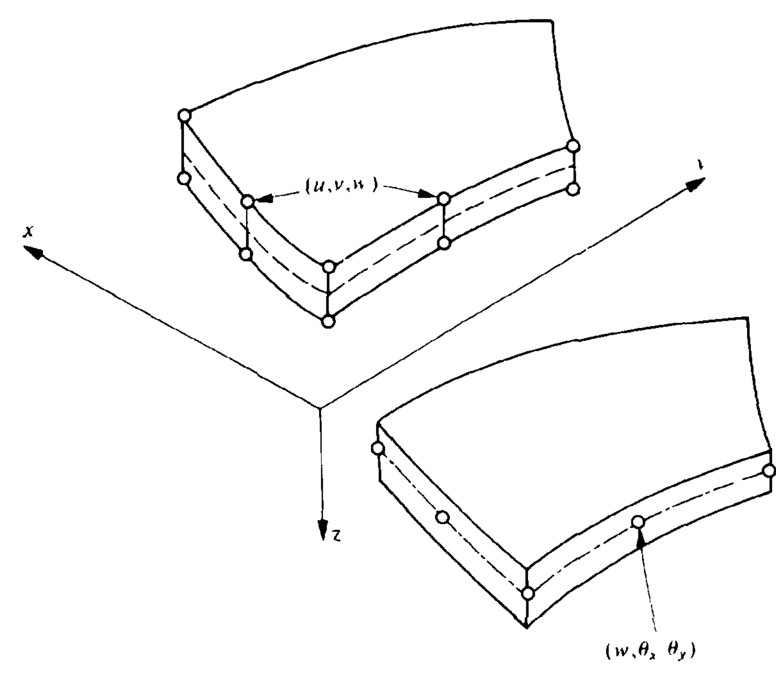


Figura 2 1 Un elemento tridimensional isoparamétrico con interpolación lineal en la dirección transversal y el elemento de placa "gruesa"

[véase Ecs (1.12) y (1 67b)],

$$\frac{\mathbf{S}}{\alpha} + \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\nabla} w = \mathbf{0} \tag{2 1c}$$

donde $\alpha = \beta G t$ es la rigidez de cortante [véase Ecs (1 10) y (1 67c)] y

$$\boldsymbol{\nabla}^T \mathbf{S} = -q \tag{2 1d}$$

[véase Ecs. (1 13) y (1 67d)] En lo anterior, los momentos **M**, las fuerzas de cortante **S** y las matrices elásticas **D** son tal como se definieron en el Capítulo 1, y

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.1e}$$

Las condiciones de contorno se imponen naturalmente en w y $\boldsymbol{\theta}$ o las tensiones correspondientes S_n, M_n, M_{ns} de la forma discutida en la Sección 1.2 2.

En lo que sigue, cuando se discute la llamada condición simplemente apoyada (véase Sección 1.2 2), nos referiremos normalmente a la especificación de

$$w = 0 \qquad \text{y} \qquad M_n = M_{ns} = 0$$

como apoyo "débil" (de hecho, el tipo de apoyo más realista) y

$$w = 0 \qquad M_n = 0 \qquad \text{y} \qquad \theta_s = 0$$

como apoyo "fuerte" Este último reproduce efectivamente las hipótesis de placas delgadas y, además, conduce a algunas de las dificultades asociadas a ellas

Es conveniente eliminar **M** de las Ecs (2 1a) a (2 1d) y escribir el sistema de tres ecuaciones [véase Ecs (1 68)] de la forma

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{S} = \mathbf{0} \tag{2 2a}$$

$$\frac{\mathbf{S}}{\alpha} + \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\nabla} w = \mathbf{0} \tag{2.2b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^T \mathbf{S} = -q \tag{2 2c}$$

Este sistema de ecuaciones puede servir de base para construir la discretización mixta, o alternativamente, puede reducirse aún más para dar una forma irreducible. En el Capítulo 1 se ha trabajado con la forma irreducible, que venía dada por una ecuación de cuarto orden en función de w, y que sólo podía servir para la solución de problemas de *placas delgadas*, esto es, cuando $\alpha = \infty$ [Ec. (1 15)] Por otro lado, es fácil deducir una forma irreducible alternativa que sea válida sólo si $\alpha \neq \infty$ Ahora las fuerzas de cortante se pueden eliminar de forma que queden dos ecuaciones

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \boldsymbol{\theta} + \alpha(\boldsymbol{\nabla} w - \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \tag{2 3a}$$

$$-\boldsymbol{\nabla}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\nabla}^T(\alpha \boldsymbol{\nabla} w) = -q \tag{2 3b}$$

Éste es un sistema *irreducible* correspondiente a la minimización de la energía potencial total

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{L}^T\boldsymbol{\theta})\mathbf{D}(\mathbf{L}\boldsymbol{\theta})\,d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} w - \boldsymbol{\theta})^T \alpha (\boldsymbol{\nabla} w - \boldsymbol{\theta})\,d\Omega - \int_\Omega w^T q\,d\Omega + \text{términos de contorno} \tag{2 4}$$

como puede verificarse fácilmente

En lo anterior, el primer término es sencillamente la energía de flexión y el segundo la energía de distorsión de cortante [véase Ec. (1 75a)]

Claramente, este sistema irreducible es sólo posible cuando $\alpha \neq \infty$, pero puede obviamente interpretarse como una solución de la energía potencial dada por la Ec. (1 75b) para placas "delgadas" cuando la restricción de la Ec (1 75a) se impone de *forma penalizada*, siendo ahora α un parámetro de penalización De esta forma, la formulación de placas delgadas es simplemente un caso límite de tal análisis, como de hecho es evidente desde el punto de vista físico

Se comprobará más adelante que la forma penalizada sólo puede proporcionar soluciones satisfactorias cuando la discretización de la formulación mixta correspondiente satisface los necesarios criterios de convergencia

2.2 La formulación irreducible. Integración reducida

Los procedimientos para discretizar la Ec (2 3) son evidentes Primeramente, las variables de desplazamientos se aproximan mediante funciones de forma y parámetros apropiados por

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{N}_\theta \bar{\boldsymbol{\theta}} \qquad \text{y} \qquad w = \mathbf{N}_w \bar{\mathbf{w}} \tag{2 5}$$

Entonces, las ecuaciones de aproximación se obtienen directamente usando el procedimiento de Galerkin e integración por partes, o, de forma equivalente, mediante el uso de la expresión del trabajo virtual Nótese que las componentes generalizadas de deformación adecuadas, correspondientes a los momentos $\mathbf{M}$ y a las fuerzas de cortante $\mathbf{S}$, son

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{L}\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{L}\mathbf{N}_\theta)\bar{\boldsymbol{\theta}} \tag{2 6a}$$

y

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla} w - \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{N}_w \bar{\mathbf{w}} - \mathbf{N}_\theta \bar{\boldsymbol{\theta}} \tag{2 6b}$$

Se obtiene, por tanto

$$\left(\int_\Omega (\mathbf{L}\mathbf{N}_\theta)^T \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{N}_\theta \, d\Omega + \int_\Omega \mathbf{N}_\theta^T \alpha \mathbf{N}_\theta \, d\Omega\right)\bar{\boldsymbol{\theta}} - \left(\int_\Omega \mathbf{N}_\theta^T \alpha \boldsymbol{\nabla}\mathbf{N}_w \, d\Omega\right)\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{f}_\theta \tag{2 7a}$$

y

$$-\left(\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{N}_w)^T \alpha \mathbf{N}_\theta \, d\Omega\right)\bar{\boldsymbol{\theta}} + \left(\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{N}_w)^T \alpha \boldsymbol{\nabla}\mathbf{N}_w \, d\Omega\right)\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{f}_w \tag{2 7b}$$

o, sencillamente

$$\mathbf{K}\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{a} = (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s)\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_w \\ \mathbf{f}_\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{f} \tag{2 8}$$

con

$$\mathbf{a}^T = [\bar{\mathbf{w}}, \bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y]$$

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{K}}_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_s & \tilde{\mathbf{K}}_{bs} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{bs}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\tilde{\mathbf{K}}_b$, $\tilde{\mathbf{K}}_{bs}$ y $\tilde{\mathbf{K}}_s$ son las definidas en la Ec (2 7), y

$$\mathbf{f}_\theta = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_\theta^T \tilde{\mathbf{M}} \, d\Omega \tag{2 9a}$$

en la cual $\tilde{\mathbf{M}}$ son los momentos prescritos en el contorno Γ_t, y

$$\mathbf{f}_w = \int_\Omega \mathbf{N}_w^T q \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_w^T \tilde{S}_n \, d\Gamma \tag{2.9b}$$

donde $\tilde{S}_n$ es el cortante prescrito en el contorno Γ_t.

La formulación es evidente y hay poco que añadir sobre ella *a priori* Aparentemente se podría usar cualquier función de forma bidimensional para interpolar los dos giros y el desplazamiento lateral. La Figura 2 2 muestra algunos elementos rectangulares (o cuadriláteros, con distorsión isoparamétrica) utilizados en los primeros trabajos.[1-3] En principio, todos deberían ser convergentes ya que existe continuidad C_0 y se dan los estados de deformación constante En la Figura 2.3 se muestra lo que en realidad ocurre con una subdivisión fina de rectángulos cuadráticos serendípitos y lagrangianos a medida que la relación luz canto, L/t, varía

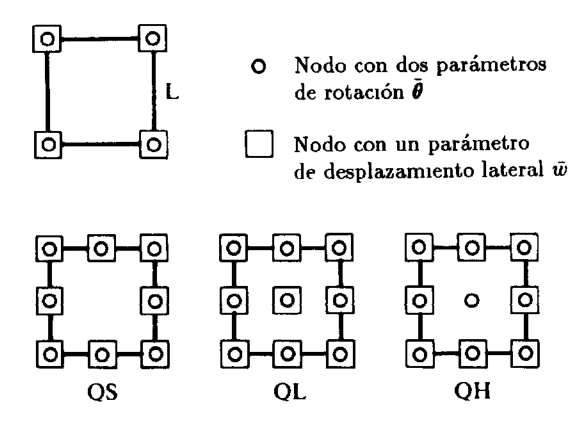
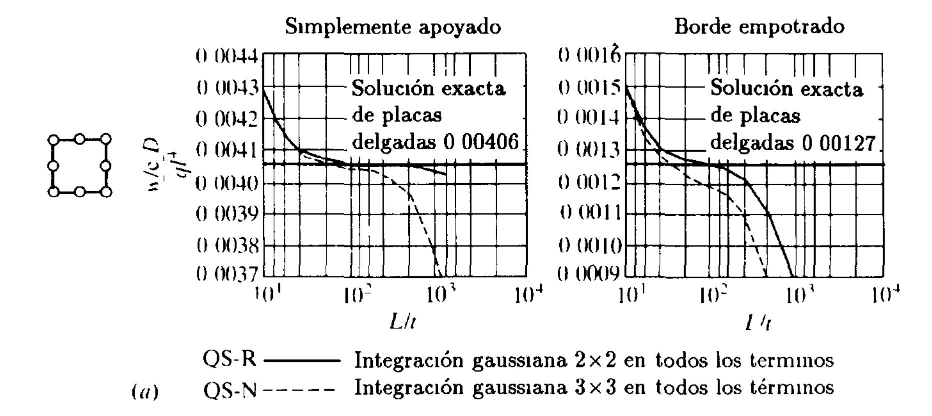


Figura 2 2 Algunos primeros elementos para placas gruesas.



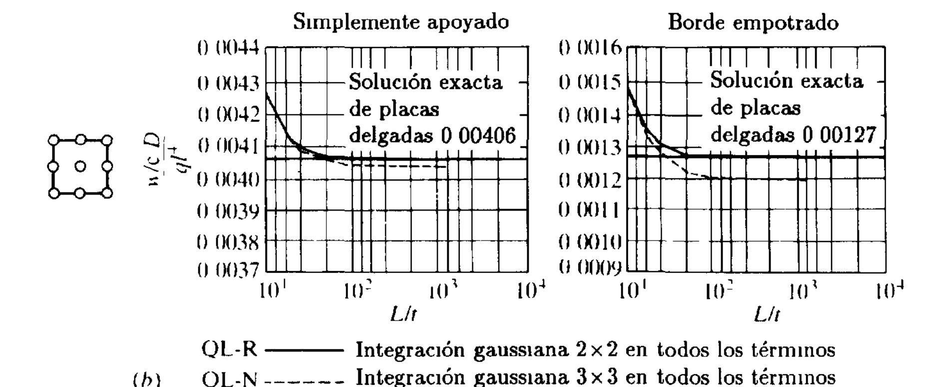


Figura 2 3 Comportamiento de elementos (a) serendípitos cuadráticos (QS) y (b) lagrangianos (QL) al variar la relación L/t, carga uniforme en una placa cuadrada con una subdivisión normal 4×4 en un cuarto R es integración reducida 2×2 y N es integración normal 3×3

Nótese que la magnitud del coeficiente α se mide mejor como la relación entre las rigideces de cortante y de flexión y que se puede calcular su valor en forma adimensional Así, para un material isótropo con $\alpha = Gt$ esta relación es

$$\frac{Gt}{Et^3}12(1-\nu^2)L^2 \propto \left(\frac{L}{t}\right)^2 \tag{2.10}$$

Obviamente, el comportamiento "grueso" y "delgado" depende por lo tanto de la relación L/t

Es evidente en la Figura 2 3 que mientras que las respuestas son bastante buenas para las relaciones mayores de L/t, los elementos cuadráticos serendípitos con integracion reducida (QSN) se separan rápidamente de la solución para placas delgadas, y de hecho tienden a resultados nulos (bloqueo) cuando esta relación se hace pequeña Para los elementos cuadráticos lagrangianos (QLN) las respuestas son mejores, pero a medida que la placa tiende a ser delgada de nuevo dan resultados demasiado rígidos.

¿Cuál es la razón para esto? Puesto que ambos elementos contienen polinomios cuadráticos completos su comportamiento debería ser similar ¿ Por qué aparece el comportamiento de bloqueo? Ya en los primeros tiempos se dieron varias razones físicas, la más válida de las cuales es que la restricción de cortante que implica la Ec (2 2b), y que se ha utilizado para eliminar los esfuerzos cortantes, es demasiado fuerte si los términos en los que ésta aparece se integran con integración completa En consecuencia, el problema se elimina utilizando *integración numérica reducida*, bien en todos los términos, a lo que se ha llamado R en la figura,[4,5] o sólo de forma selectiva en los términos de cortante[6,7] (lo que se denomina S en lo sucesivo) La mejora sustancial en los resultados se nota inmediatamente

La misma mejora en los resultados se observa para cuadriláteros lineales en los que la integración completa (exacta) da resultados que son totalmente inaceptables (como se muestra en la Figura 2.4), pero en los que la integración reducida de los términos de cortante (con un solo punto) tiene un funcionamiento excelente. (La integración reducida en todos los términos da, naturalmente, una matriz singular)

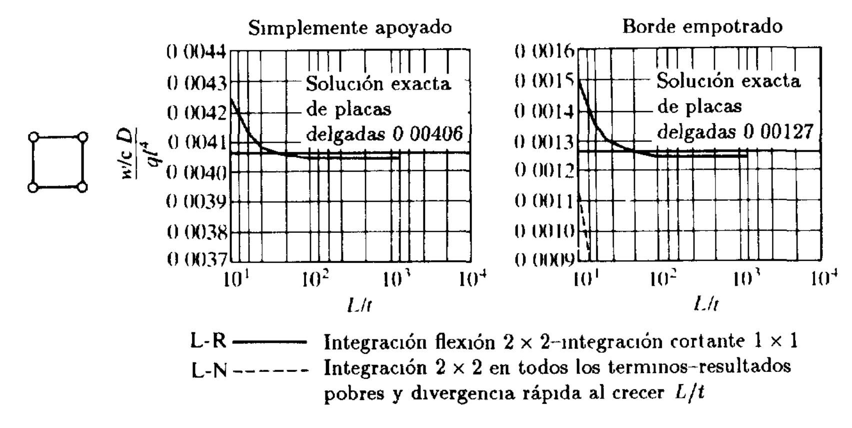


Figura 2 4 Comportamiento de los elementos bilineales al variar la relación L/t

Se sugiere por lo tanto una solución que, sin embargo, no es universal Se observa en la Figura 2.3 que, incluso sin reducción del orden de integración, los elementos lagrangianos se comportan mejor que los también

cuadráticos serendípitos En los elementos cúbicos (Figura 2 5), sin embargo, se nota que (*a*) casí no se produce cambio cuando se reduce la integración y (*b*), de nuevo, los elementos del tipo lagrangiano se comportan mucho mejor

Se han propuesto muchos argumentos heurísticos para inventar mejores elementos,[8–12] haciendo uso todos ellos de los conceptos de integración reducida. Algunos de éstos se comportaron bastante bien, por ejemplo, el llamado elemento "heterosis" de Hughes y Cohen,[9] que se muestra en la Figura 2.3 (en el que se usa la interpolación serendípita para w y la lagrangiana para θ), pero todos los elementos sugeridos en esa época fallan en algunas ocasiones, bien por bloqueo o bien mostrando comportamiento singular. Por tanto, tales elementos no son "robustos" y no deberían ser usados de forma universal

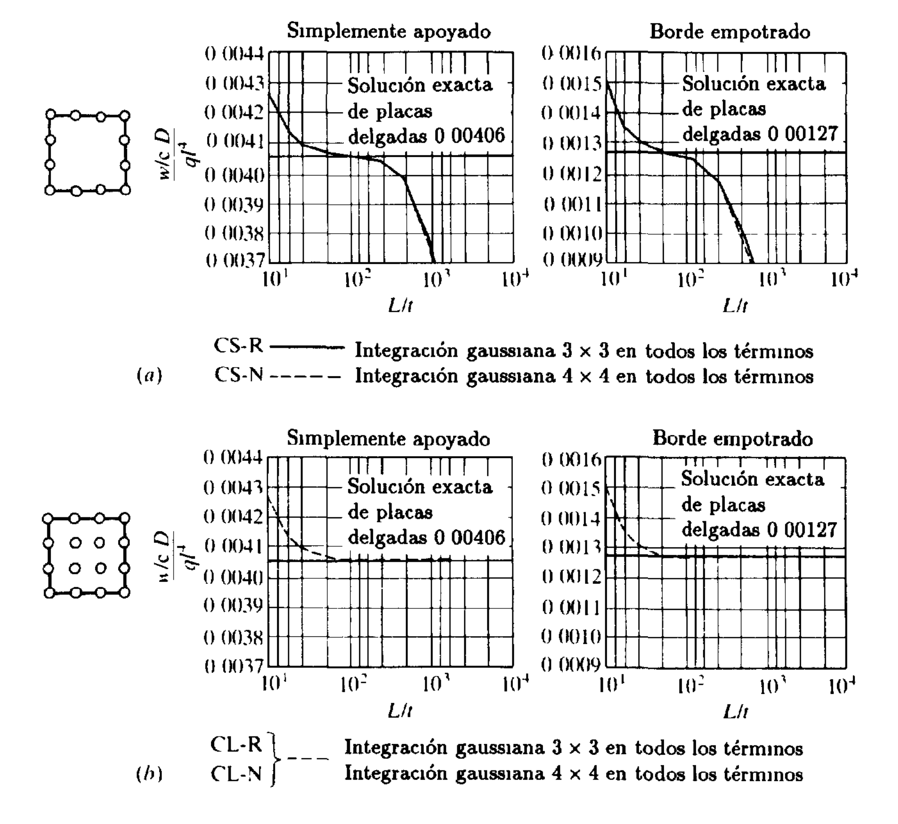


Figura 2 5 Comportamiento de elementos cuadriláteros cúbicos. (*a*) serendípito (CS) y (*b*) lagrangiano (CL), al variar la relación L/t

Seguramente se necesita una mejor explicación de por qué fallan y, por tanto, una comprensión más profunda de cómo deberían diseñarse tales elementos En la próxima sección nos ocuparemos de este problema considerando la formulación mixta.

El lector reconocerá aquí argumentos utilizados en el Capítulo 12 del Volumen 1, que nos llevaron a una mejor comprensión del fallo de algunos elementos de elasticidad sencillos a medida que se acercaban al comportamiento incompresible La situación es aquí completamente similar.

2.3 Formulación mixta para placas gruesas y equivalencia con la integración numérica

2 3 1 *La aproximación* Naturalmente, el problema de placas gruesas se puede resolver como un problema mixto, comenzando por las Ecs (2 2) y aproximando directamente cada una de las variables $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{S}$ y w independientemente. Se escribe entonces

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{N}_\theta \bar{\boldsymbol{\theta}} \qquad \mathbf{S} = \mathbf{N}_s \bar{\mathbf{S}} \qquad \text{y} \qquad w = \mathbf{N}_w \bar{\mathbf{w}} \tag{2.11}$$

y se obtiene la ecuación de aproximación aplicando el procedimiento estándar de Galerkin a cada una de las ecuaciones (aunque naturalmente se pueden utilizar otras funciones de ponderación, como se verá más tarde)

Por tanto, promediando la primera ecuación de (2.2) con $\mathbf{N}_\theta^T$, la segunda con $\mathbf{N}_s^T$ y la última con $\mathbf{N}_w^T$ se tiene, después de integrar por partes, el sistema de ecuaciones discreto y simétrico de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{H} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\theta}} \\ \bar{\mathbf{S}} \\ \bar{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_\theta \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_w \end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_b &= \int_\Omega (\mathbf{L}\mathbf{N}_\theta)^T \mathbf{D} (\mathbf{L}\mathbf{N}_\theta)\, d\Omega \\ \mathbf{C} &= -\int_\Omega \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_s \, d\Omega \\ \mathbf{H} &= -\int_\Omega \mathbf{N}_s^T \frac{1}{\alpha} \mathbf{N}_s \, d\Omega \\ \mathbf{E} &= -\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}^T \mathbf{N}_s) \mathbf{N}_w \, d\Omega \end{aligned} \tag{2 13}$$

y $\mathbf{f}_\theta$ y $\mathbf{f}_w$ tal como se definieron en las Ecs. (2.9).

Esto representa un típico problema mixto de tres campos del tipo discutido en el Capítulo 12 del Volumen 1, que tiene que satisfacer ciertos criterios para que la aproximación sea estable a medida que se acerca al límite de placas delgadas (y que ahora puede resolverse exactamente) Para este límite se tiene

$$\alpha = \infty$$

y (2 14)

$$\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

En este caso límite se puede probar fácilmente que uno de los criterios de estabilidad más importantes para cualquier ensamblaje de elementos y condiciones de contorno es que

$$n_\theta + n_w \geq n_s \quad \text{o} \quad \alpha_P \equiv \frac{n_\theta + n_w}{n_s} \geq 1 \tag{2 15a}$$

y

$$n_s \geq n_w \quad \text{o} \quad \beta_P \equiv \frac{n_s}{n_w} \geq 1 \tag{2 15b}$$

donde n_θ, n_s y n_w son los números de parámetros que definen las aproximaciones de $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{S}$ y w en las Ecs. (2 11)

Si esta condición necesaria no se satisface, entonces *el sistema de ecuaciones será siempre singular* Naturalmente, esto debe satisfacerse para el sistema completo, pero además deberá ser satisfecho para las parcelas de elementos,[13–15] de forma que se eviten las inestabilidades y oscilaciones locales

Los criterios anteriores nos ayudarán, como veremos más tarde, al diseñar elementos adecuados de placas gruesas que converjan hacia las soluciones de placas delgadas

2 3 2 *Requisitos de continuidad* La aproximación de la forma presentada en las Ecs (2 12) y (2 13) exige ciertas continuidades Es evidente que se precisa continuidad C_0 para las funciones de forma para los giros $\mathbf{N}_\theta$ (ya que en la aproximación aparecen las primeras derivadas), pero tanto $\mathbf{N}_s$ como $\mathbf{N}_w$ pueden ser discontinuas (aunque naturalmente se necesita alguna conexión entre elementos de las variables w por razones físicas)

En todas las aproximaciones que se han discutido en la sección previa se ha supuesto continuidad C_0 tanto para las variables $\boldsymbol{\theta}$ como w, ya que esto era muy fácil de imponer Nótese que no se puede describir tal continuidad como *excesiva* (ya que no se violan condiciones físicas), pero se mostrará más adelante que se pueden generar elementos muy satisfactorios con una interpolación discontinua para w.

Para $\mathbf{S}$ es obviamente más conveniente utilizar una interpolación completamente discontinua, ya que entonces (para $1/\alpha$ distinto de cero) se puede eliminar el cortante a nivel elemental y las matrices de rigidez finales se pueden escribir simplemente en función de $\bar{\boldsymbol{\theta}}$, $\bar{\mathbf{w}}$ para los nodos de los contornos de los elementos

Naturalmente, la interpolación continua de la componente normal de $\mathbf{S}$ es físicamente correcta si no hay cargas en laja o puntuales Sin embargo, con tal interpolación no es posible eliminar $\bar{\mathbf{S}}$ y la retención de tales variables adicionales en el sistema parece demasiado costosa para su uso en la práctica y hasta ahora no ha sido adoptada Sin embargo, debe notarse que un proceso de solución iterativa aplicable a las formas mixtas y descrito en el Capítulo 12 del Volumen 1 puede reducir sustancialmente el coste de tales variables adicionales,[16] y que este procedimiento podría posiblemente aplicarse aquí. En el momento de escribir esta edición la investigación de tal formulación iterativa está todavía en marcha, pero hasta la fecha no se han desarrollado elementos prácticos con interpolación C_0 de los esfuerzos cortantes

2 3.3 *Equivalencia entre las formas con interpolación discontinua de* $\mathbf{S}$ *y la integración reducida (selectiva)* La equivalencia entre las formas mixtas penalizadas con interpolación discontinua de la variable de restricción y las formas irreducibles correspondientes con la misma variable de penalización fue demostrada en el Capítulo 12 del Volumen 1 para problemas incompresibles, siguiendo el trabajo de Malkus y Hughes.[17] De hecho se puede efectuar una demostración exactamente análoga para el presente caso y, por tanto, los detalles se dejan para el lector

En consecuencia, por ejemplo, si se considera un cuadrilátero serendípito, como el mostrado en la Figura 2 6(a), en el que se realiza la integración de los términos de cortante (en los que aparece α) con cuatro puntos de Gauss en una formulación irreducible [véase Ecs (2 7) a (2 9)], se encuentra que las respuestas son *idénticas* a la forma mixta en la cual las variables $\mathbf{S}$ vienen dadas por una interpolación bilineal a partir de nodos colocados en los mismos puntos de Gauss

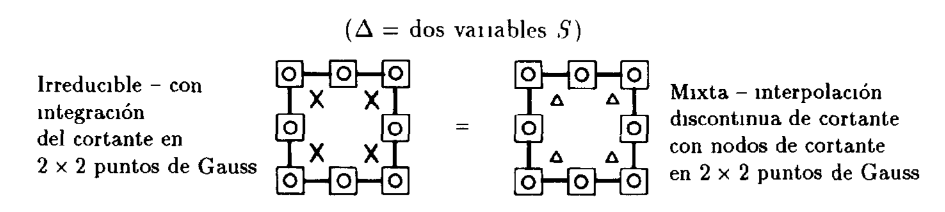


Figura 2 6 Equivalencia de la forma mixta y la integración reducida de cortante en un rectángulo serendípito cuadrático

Este resultado también puede argumentarse a partir del principio de limitación establecido por primera vez por Fraeijs de Veubeke [18]. Éste establece que si la forma mixta en la que la tensión se interpola independientemente es capaz de reproducir exactamente la variación de tensión que da la forma irreducible correspondiente, entonces los resultados de ambas formulaciones resultarán ser idénticos. Está claro que los cuatro puntos de Gauss en los cuales se calculan las tensiones de cortante sólo pueden definir una variación bilineal y, por tanto, se cumple dicha identidad.

La equivalencia entre la integración reducida y la interpolación mixta discontinua de **S** será útil en nuestras discusiones para señalar las razones por las cuales fallan muchos de los elementos de la sección previa. Sin embargo, en la práctica es igualmente conveniente (y a menudo más eficiente) utilizar la interpolación mixta de forma explícita y eliminar las variables **S** a nivel elemental por condensación en vez de usar reglas especiales de integración.

Debe señalarse que la equivalencia falla si α varía dentro de un elemento, o, de hecho, si la transformación isoparamétrica implica diferentes interpolaciones. En tales casos los procedimientos mixtos son generalmente más precisos.

2.4 El test de la parcela para elementos de flexión de placas

2.4.1 *Por qué fallan los elementos.* La naturaleza y aplicación del test de la parcela han cambiado considerablemente desde su introducción inicial. Como se muestra en las referencias [13] a [15] (y como se ha discutido con detalle en el Capítulo 11 del Volumen 1), este test puede probar, además de los requisitos de consistencia (que inicialmente era el único asunto que se comprobaba), la estabilidad de la aproximación, al exigir que para una parcela consistente en un ensamblaje de uno o más elementos, las matrices de rigidez no sean singulares para cualesquiera que sean las condiciones de contorno impuestas.

Para estar absolutamente seguros de tal no singularidad el test debe llevarse a cabo numéricamente. No obstante, se encuentra que las condiciones de "cuenta" necesarias para la no singularidad, y que se dan en la Ecs. (2.15), son a menudo suficientes y hacen que el test numérico sea sólo una confirmación final [14,15]. Demostraremos cómo la aplicación simple de tales cuentas indica de forma inmediata *qué elementos fallan* y cuáles tienen una probabilidad de supervivencia. De hecho, es fácil mostrar por qué el elemento cuadrático serendípito original con integración reducida (QS–R) no es robusto.

En la Figura 2.7 se considera este elemento en parcelas de uno y cuatro elementos sujetas a las llamadas condiciones de contorno *completamente restringidos* en las que se prescriben todos los desplazamientos del contorno

exterior de la parcela, y también bajo las condiciones de contorno *relajadas*, en las que la prescripción de sólo tres movimientos (dos θ y una w) eliminan los modos de sólido rígido. Para facilitar la presentación en esta figura, así como en los tests siguientes, se citarán simplemente los valores de los parámetros α_P y β_P, definidos en las Ecs. (2.15), con un subíndice C o R para señalar los tests restringidos o relajados. Se asignará el símbolo (F) a cualquier fallo que no satisfaga la condición *necesaria*. En los tests de la Figura 2.7 se observa que ambos tests de la parcela fallan cuando el parámetro $\alpha_C < 1$, y, en consecuencia, los elementos bloquean bajo ciertas circunstancias (o son singulares en la evaluación de **S**). Un fallo en los tests "relajados" normalmente predice la singularidad de la matriz de rigidez ensamblada, y es aquí también donde se observan frecuentemente muchos fallos computacionales.

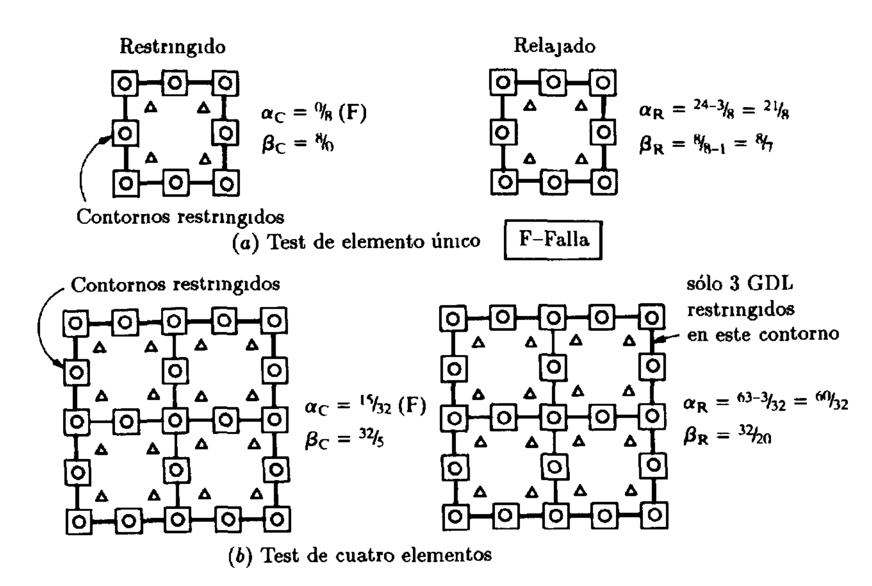


Figura 2.7 Tests de la parcela de cuenta "completamente restringido" y "relajado" para el cuadrilátero serendípito. (En el test C se fijan todos los movimientos del contorno. En el test R se fijan solamente tres movimientos del contorno, eliminando los movimientos de sólido rígido)

Puesto que en este caso los elementos mixtos y con integración reducida son idénticos se ve inmediatamente por qué el elemento falla en el problema de la Figura 2.3 (de forma más espectacular bajo condiciones de empotramiento). De hecho está claro por qué, en general, el funcionamiento de los elementos de tipo lagrangiano es mejor ya que añaden más grados de libertad para aumentar n_θ (y también n_w)

TABLA 2 1

ELEMENTOS CUADRILATEROS MIXTOS–CONDICIONES DE ESTABILIDAD

Elemento	Referencia	Parcela de 1 elemento				Parcela de 2 elementos			
		α_C	β_C	α_R	β_R	α_C	β_C	α_R	β_R
	[4] Q8S Q8R	$\frac{0}{8}$ (F)	$\frac{8}{0}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{15}{32}$ (F)	$\frac{32}{5}$	$\frac{60}{32}$	$\frac{32}{20}$
	[6,7] Q9S	$\frac{3}{8}$ (F)	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{27}{32}$ (F)	$\frac{32}{9}$	$\frac{72}{32}$	$\frac{32}{24}$
	[9] Q9H	$\frac{2}{8}$ (F)	$\frac{8}{0}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{23}{32}$ (F)	$\frac{32}{5}$	$\frac{68}{32}$	$\frac{32}{20}$
	[4] Q12R	$\frac{0}{18}$ (F)	$\frac{18}{0}$	$\frac{23}{18}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{27}{72}$ (F)	$\frac{72}{9}$	$\frac{96}{72}$	$\frac{72}{32}$
	[19] Q16R	$\frac{12}{18}$ (F)	$\frac{18}{4}$	$\frac{45}{18}$	$\frac{18}{15}$	$\frac{75}{72}$	$\frac{72}{25}$	$\frac{150}{72}$	$\frac{72}{50}$
	[4,7] Q4S Q4R	$\frac{0}{2}$ (F)	$\frac{2}{0}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{2}{3}$ (F)	$\frac{3}{8}$ (F)	$\frac{8}{1}$	$\frac{24}{8}$	$\frac{8}{8}$
	Q4BS	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{0}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{2}{3}$ (F)	$\frac{11}{8}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{32}{8}$	$\frac{8}{8}$

□ w – 1 GDL
○ $\boldsymbol{\theta}$ – 2 GDL
△ S – 2 GDL

En la Tabla 2 1 se muestra una lista de los valores de α_P y β_P para parcelas de varios rectángulos con uno y cuatro elementos, y de nuevo se observa que ninguno de éstos satisface completamente los requisitos *necesarios* y, por tanto, no se puede considerar robusto a ninguno Sin embargo, es interesante notar que los elementos más cercanos a satisfacer las condiciones (2 15) son los que funcionan mejor, y esto explica por qué el elemento de heterosis[9] es bastante popular y se usa en muchos programas, y por qué el lagrangiano cúbico es casi robusto y se usa con éxito [19]

Naturalmente, se pueden hacer aproximaciones y cuentas similares para varios elementos triangulares. En la primera parte de la Tabla 2 2 se listan algunos de los triángulos típicos y obvios, así como algunos tests de la parcela De nuevo, ninguno se comporta adecuadamente y, usados en programas de elementos finitos, todos mostrarán bloqueo o modos espúreos

Señalemos de nuevo que el fallo del test de la parcela (con respecto a la estabilidad) significa que bajo ciertas circunstancias el elemento fallará No obstante, se puede obtener un funcionamiento razonable en muchos problemas y no observar singularidad alguna, siempre que naturalmente se satisfagan las condiciones de consistencia Ésta es la razón por la cual muchos elementos no robustos aparecen aún en programas comerciales.

Tests de la parcela numéricos Mientras que la condición "de cuenta" de las Ecs (2 15) es necesaria para la estabilidad de las parcelas, a veces puede aparecer singularidad incluso si esta condición se satisface (y, por tanto, inestabilidad y bloqueo) Por esta razón se deben realizar siempre tests numéricos que prueben la suficiencia de rango de las matrices de rigidez y también la consistencia

En el Capítulo 11 del Volumen 1 se ha discutido con detalle el test de consistencia para formas irreducibles en las que sólo aparece un conjunto de variables $\mathbf{u}$ Resultaba que con un operador de segundo orden las ecuaciones discretas deberían satisfacer exactamente *al menos* la solución correspondiente a un campo lineal $\mathbf{u}$, dando por tanto tensiones constantes (primeras derivadas de $\mathbf{u}$) Para el conjunto de ecuaciones mixtas (2 2) la solución exacta de más bajo orden que tiene que satisfacerse corresponde a

a) valores constantes de los momentos $\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}$ y, por tanto, un campo lineal θ,
b) campo lineal w,
c) campo constante $\mathbf{S}$

Las soluciones para las cuales deben probarse los elementos de placa y donde se precisa la satisfacción exacta de las ecuaciones en los nodos consisten en

a) campos arbitrarios de $\mathbf{M}$ constantes y campos arbitrarios lineales de $\boldsymbol{\theta}$ con fuerzas de cortante nulas ($\mathbf{S} = 0$) Se supone aquí una forma cuadrática de w que, sin embargo, proporciona una solución exacta de elementos finitos

b) campos constantes en $\mathbf{S}$ y lineales en w que resultan en campos constantes de $\boldsymbol{\theta}$ La solución precisa de un momento distribuido en el segundo miembro de la Ec (2 2a) y esto no ha sido incluido en la formulación original Un procedimiento simple consiste en no tener en cuenta la satisfacción del equilibrio de momentos en este test Esto se consigue fácilmente poniendo un valor muy grande para la rigidez a flexión $\mathbf{D}$

2 4 2 *Diseño de algunos elementos útiles* El sencillo test de la parcela de cuenta indica cómo deberían diseñarse los elementos para pasarlo, y de esta forma evitar la singularidad (inestabilidad). Muy recientemente se han presentado dos elementos triangulares diseñados sobre esta base y que han resultado ser robustos y al mismo tiempo se comportan de forma excelente Ninguno de estos elementos es "obvio", y en ambos la interpolación de los giros es del mismo orden o mayor que la de w Esto es una clara violación del "sentido común", pero en este caso está justificada por las cuentas de la parcela y por el funcionamiento

La Figura 2 8 muestra ambos elementos triangulares, y la segunda parte de la Tabla 2 2 muestra su funcionamiento en parcelas. El elemento cuadrático de alto orden fue diseñado por Zienkiewicz y Lefebvre[20] y el de bajo orden por Arnold y Falk[23] La Tabla 2 2 muestra que ambos pasan el test, al menos en la condición de cuenta, de forma brillante, y también se satisface el test numérico Es interesante notar que el segundo elemento utiliza una interpolación discontinua de w, y es, en cierta forma, directamente opuesto al triángulo elemental de Morley discutido en el Capítulo 1 Dejamos la consideración de los resultados obtenidos con estos elementos para una sección posterior, pero señalaremos aquí que su funcionamiento es excelente

El último elemento mostrado en la Tabla 2 2 es más convencional y ha demostrado pasar el test de cuenta. Se demuestra que este elemento, sugerido en la referencia [15], no es satisfactorio si se adoptan para las funciones de forma interpolaciones del tipo usado en la Ec. (2 5) No obstante, es posible y a menudo conveniente usar funciones de forma de las siguientes características.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{N}_\theta \bar{\boldsymbol{\theta}} \\ w &= \mathbf{N}_w \bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{N}}_w \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \qquad (2.16)$$

que permiten una interpolación polinómica de alto orden para w Naturalmente esto tiene ventajas cuando nos acercamos al límite de placa delgada Ahora se puede conseguir la continuidad C_0 fácilmente siempre que los polinomios sean del grado correcto y si los valores de w se determinan a lo largo de cualquiera de los lados a partir únicamente de los parámetros especificados en los nodos de dicho lado Por ejemplo, se pueden utilizar

TABLA 2 2
ELEMENTOS TRIANGULARES MIXTOS-CONDICIONES DE ESTABILIDAD

Elemento	Referencia	Parcela de 1 elemento				Parcela de 6 elementos			
		α_C	β_C	α_R	β_R	α_C	β_C	α_R	β_R
I		$\frac{0}{2}$ (F)	$\frac{2}{0}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{12}$ (F)	$\frac{12}{1}$	$\frac{18}{12}$	$\frac{12}{6}$
		$\frac{0}{6}$ (F)	$\frac{6}{0}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{21}{36}$ (F)	$\frac{36}{7}$	$\frac{54}{36}$	$\frac{36}{18}$
		$\frac{3}{6}$ (F)	$\frac{6}{6}$	$\frac{27}{6}$	$\frac{6}{9}$ (F)	$\frac{57}{36}$	$\frac{36}{19}$	$\frac{108}{36}$	$\frac{36}{36}$
II		$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{0}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{2}{5}$ (F)	$\frac{33}{12}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{66}{12}$	$\frac{12}{18}$ (I)
	20 T6B3	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{0}$	$\frac{21}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{75}{36}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{108}{36}$	$\frac{36}{18}$
III	22 T3B1	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{0}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{12}{1}$	$\frac{30}{12}$	$\frac{12}{6}$
	21 T3B1	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{0}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{20}{12}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{35}{12}$	$\frac{12}{11}$

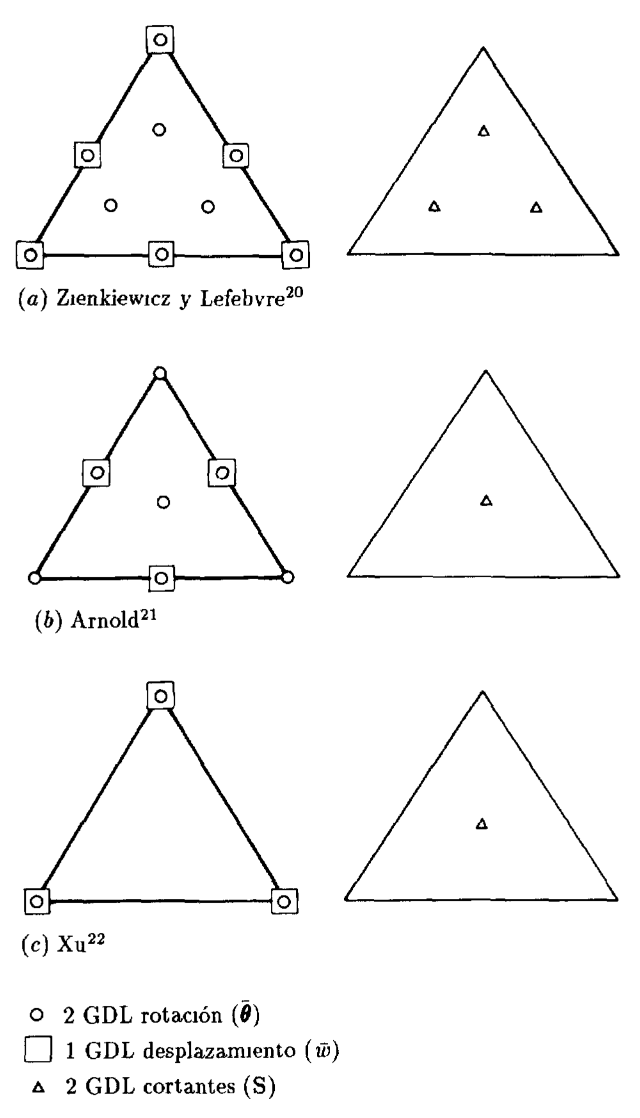


Figura 2 8 Elementos triangulares robustos recientes.

aquí algunas de las funciones discutidas en el Capítulo 1 para elementos incompatibles, ya que éstas aseguran siempre la continuidad de w y sólo fallan en las direcciones de la pendiente normal

Utilizando dichas funciones para un triángulo, Xu[22] dedujo un elemento de buen funcionamiento, robusto, con nueve GDL Claramente esto abre el camino para otros elementos similares Tessler y Hughes[23,24] han utilizado también interpolaciones similares a la de la Ec (2.16)

2.5 Elementos con restricciones discretas de colocación

2 5 1 *Posibilidades generales para cuadriláteros con restricciones discretas de colocación.* Parece evidente a partir de la discusión precedente que la posibilidad de utilizar interpolaciones convencionales para conseguir elementos de tipo mixto con un comportamiento satisfactorio es limitada.

Una posible alternativa es la de aumentar el orden del elemento y ya se ha observado que la interpolación lagrangiana cúbica casi satisface los requisitos de estabilidad y se comporta bien [2,7,19] Sin embargo, la complejidad de la formulación es formidable y no se recomienda seguir esta dirección.

Un procedimiento diferente consiste en utilizar restricciones de colocación para la aproximación de cortante en los contornos elementales [véase Ec (2 2b)], limitando de esta forma el número de parámetros **S** y haciendo que la cuenta de la parcela se satisfaga más fácilmente Ésta es la dirección que se marca en el trabajo de Hughes y Tezduyar,[25] Bathe y Dvorkin[26,27] y Hinton y Huang[28,29] así como, más recientemente, la generalización de Zienkiewicz *et al.*[30] y otros [31,32] El procedimiento tiene mucha relación con la llamada DKT (Teoría Discreta de Kirchhoff), desarrollada en el Capítulo 1 (véase Sección 1 18), que explica por qué estas aproximaciones, esencialmente de placa delgada, son satisfactorias

La clave de la formulación discreta es evidente si se considera la Figura 2.9, donde se muestra un elemento bilineal sencillo Se observa que con una interpolación C_0 de $\boldsymbol{\theta}$ y w, la deformación de cortante

$$\gamma_x = \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right] \tag{2 17}$$

está determinada de forma única en cualquier punto del lado 1–2 (tal como en el punto I, por ejemplo) y que por consiguiente [por la Ec (1 1c)]

$$S_x = \alpha\gamma_x \tag{2 18}$$

está también determinada de forma única

Por tanto, si se colocara un nodo especificando la distribución de la resultante de cortantes en ese punto y si las restricciones [por satisfacción de la Ec (2 1c)] se impusieran solamente ahí, entonces

a) el valor nodal de S_x sería compartido por los elementos adyacentes (suponiendo continuidad de α), y
b) los valores nodales de S_x estarían prescritos si los valores de $\boldsymbol{\theta}$ y **w** estuviesen restringidos, como lo están en un test de la parcela completamente restringido

De hecho, si α, la rigidez de cortante, variase entre los elementos adyacentes, los valores de S_x sólo diferirían en una constante multiplicativa,

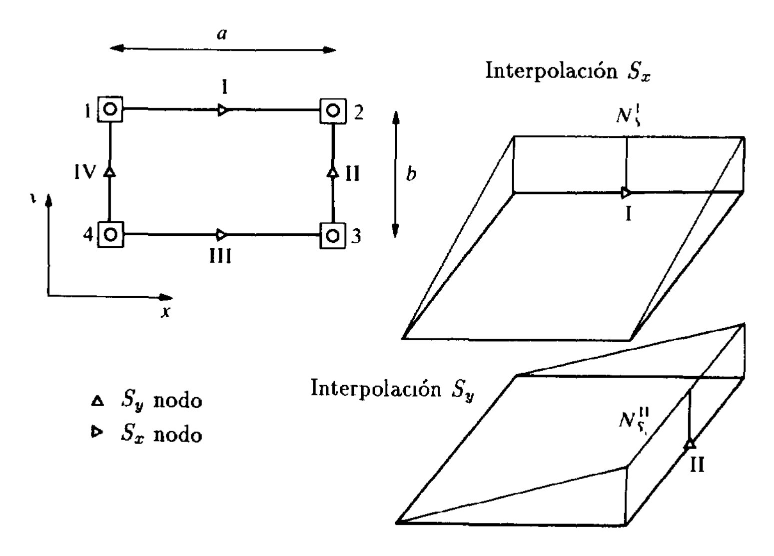


Figura 2.9 Restricciones de colocación en un elemento bilineal. Interpolación independiente de S_x y S_y

y los argumentos continuarían siendo esencialmente los mismos.

La prescripción del campo de cortante en función de dichos valores de contorno es sencilla. En el caso mostrado en la Figura 2.9 se interpola de forma independiente

$$S_x = \mathbf{N}_{sx}\bar{\mathbf{S}}_x \qquad \text{y} \qquad S_y = \mathbf{N}_{sy}\bar{\mathbf{S}}_y \tag{2.19}$$

utilizando las funciones de forma dibujadas. Tal interpolación define naturalmente $\mathbf{N}_s$ de la Ec. (2.11).

La introducción de la restricción discreta en el análisis es algo más complicada. Se puede proceder utilizando diferentes funciones de ponderación (Petrov-Galerkin) y, en particular, aplicando la ponderación de delta de Dirac o colocación puntual a la Ec. (2.1c) en la forma aproximada. Sin embargo, es ventajoso volver al principio variacional restringido y buscar la estacionariedad de

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{L}\boldsymbol{\theta})^T\mathbf{D}(\mathbf{L}\boldsymbol{\theta})\,d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{S}^T\frac{1}{\alpha}\mathbf{S}\,d\Omega - \int_\Omega wq\,d\Omega \tag{2.20a}$$

donde el primer término corresponde a la energía de *flexión* y el segundo a la energía de *cortante transversal*. En lo anterior

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{N}_\theta\bar{\boldsymbol{\theta}} \qquad w = \mathbf{N}_w\bar{\mathbf{w}}$$

y

$$\mathbf{S} = \mathbf{N}_s\bar{\mathbf{S}} \qquad \mathbf{N}_s = [\mathbf{N}_{sx}, \mathbf{N}_{sy}] \tag{2.20b}$$

sujetas a la restricción de la Ec. (2.1c)

$$\mathbf{S} = \alpha(\boldsymbol{\nabla} w - \boldsymbol{\theta}) \tag{2.20c}$$

aplicada directamente de forma discreta, esto es, por colocación en puntos tales como los I a IV en la Figura 2.9 y con una apropiada selección de la dirección. Eliminaremos $\mathbf{S}$ del cálculo, pero antes de seguir con los detalles del álgebra es interesante observar la relación del elemento de la Figura 2.9 con el test de la parcela, notando que todavía tenemos un problema mixto que requiere que se satisfagan las condiciones de cuenta. (Éste es, de hecho, el elemento de las referencias [26] y [27]). Las cuentas se muestran en la Figura 2.10 y se observa que aunque fallan para el ensamblaje de cuatro elementos el margen es aquí muy pequeño (y para parcelas mayores las cuentas son satisfactorias). Los resultados que se obtienen con este elemento son bastante buenos como se mostrará más tarde.†

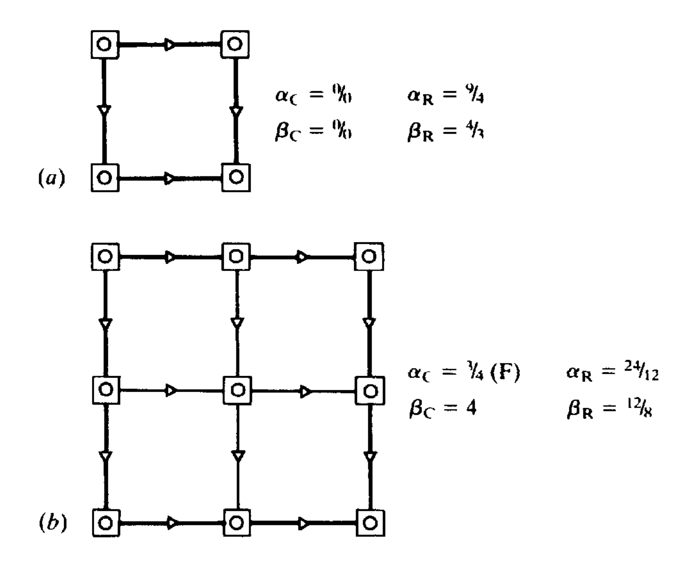


Figura 2.10 Test de la parcela en (a) un elemento y (b) cuatro elementos del tipo de la Figura 2.9. (Obsérvese que en el test completamente restringido los valores de $\mathbf{S}$ en el contorno están prescritos)

Naturalmente las restricciones discretas y la interpolación basada en los valores en el contorno pueden ser usadas de otras formas. En la

† La referencia [31] incluye un estudio matemático de la estabilidad de este elemento.

Figura 2 11 se muestra el elemento cuadrático de Huang y Hinton [28,29] Aquí, S_x y S_y están definidas mediante dos puntos en cada lado del cuadrilátero, pero además se introducen cuatro parámetros interiores de la forma mostrada. Tanto el contorno como los "nodos internos" se usan como puntos de colocación para imponer las restricciones

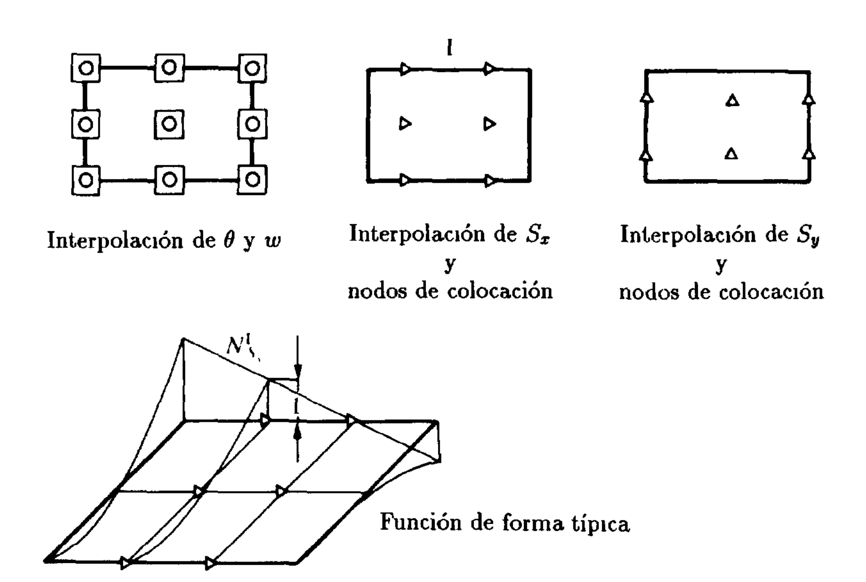


Figura 2 11 Elemento lagrangiano cuadrático con restricciones de colocación en los contornos y en el dominio interno [28,29]

Las cuentas para parcelas de uno y cuatro elementos se dan en la Tabla 2.3 Este elemento sólo falla en una parcela de un único elemento en condiciones completamente restringidas, y de nuevo la verificación numérica muestra un funcionamiento generalmente excelente Más adelante se darán detalles sobre ejemplos numéricos.

Resulta claro que con restricciones discretas aparecen muchas más alternativas para el diseño de elementos satisfactorios que pasen el test de la parcela En la Tabla 2 3 se muestran varios cuadriláteros que satisfacen las condiciones de cuenta El primero es una modificación del elemento de Hinton y Huang con las restricciones del cortante interno reducidas Aquí se usan "funciones burbuja" y cuadráticas en la interpolación del cortante en el interior, tal como se muestra en la Figura 2 12 Se pueden obtener mejoras similares en la cuenta utilizando una interpolación de tipo serendípito, pero naturalmente el funcionamiento del elemento distorsionado no puede compararse (por las razones discutidas en el

TABLA 2 3

ELEMENTOS CON RESTRICCIONES DE COLOCACION-COND DE ESTAB

Elemento	Referencia	Parcela 1 elemento				Parcela 4 elementos			
		α_C	β_C	α_R	β_R	α_C	β_C	α_R	β_R
	28 29 Q9*	$\frac{3}{4}$ (F)	$\frac{4}{1}$	$\frac{24}{12}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{27}{24}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{72}{40}$	$\frac{40}{24}$
		$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{24}{10}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{72}{32}$	$\frac{32}{24}$
		$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{60}{24}$	$\frac{24}{21}$
		$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{36}{20}$	$\frac{20}{12}$
	26 27 Q4*	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$ (F)	$\frac{4}{1}$	$\frac{24}{12}$	$\frac{12}{8}$
	30 TRI-6	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{6}{5}$	Parcela 6 elementos $\frac{21}{12}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{43}{24}$	$\frac{24}{23}$
	30 DRM	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{45}{12}$	$\frac{12}{6}$

□ w - 1 GDL
○ θ - 2 GDL
△ S - 1 GDL
⌓ θ - 1 GDL (normal)

Volumen 1, Sección 8 7) También se muestra cómo la adición de funciones burbuja en todos los parámetros w y θ puede hacer que el elemento de Dvorkin-Bathe sea totalmente robusto

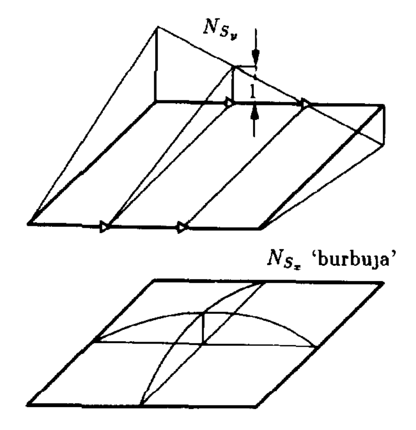


Figura 2 12 Una burbuja jerárquica y cuadrática para S_x

Todos los elementos cuadriláteros pueden naturalmente ser transformados isoparamétricamente, recordando que ahora deben usarse las componentes de cortantes S_ξ y S_η paralelas a las coordenadas ξ y η para asegurar la conservación de las propiedades de restricción deseadas previamente discutidas. Esta interpolación de cortante "direccional" es esencial cuando se consideran elementos triángulares, a los cuales se dedica la próxima sección Sin embargo, antes de hacer esto completaremos la deducción algebraica de las propiedades de los elementos

2.5 2 *Matrices elementales para restricciones discretas de colocación.* El punto de comienzo será aquí el uso del principio variacional dado por la Ec. (2 20a) con las variables de cortante eliminadas directamente

La aplicación de las restricciones discretas de la Ec. (2 20b) permiten determinar explícitamente los parámetros "nodales" $\bar{\mathbf{S}}$ que definen la distribución del esfuerzo cortante en función de los parámetros $\bar{\mathbf{w}}$ y $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ Esto da, en términos generales

$$\bar{\mathbf{S}} = \alpha[\mathbf{Q}_w\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{Q}_\theta\bar{\boldsymbol{\theta}}] \tag{2 21}$$

dentro de cada elemento. Por ejemplo, para el elemento rectangular de la Figura 2.9 se puede escribir

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{S}}_x^{I} &= \alpha\left[\frac{\bar{w}_2-\bar{w}_1}{a} - \frac{\bar{\theta}_x^1+\bar{\theta}_x^2}{2}\right]\\
\bar{\mathbf{S}}_x^{III} &= \alpha\left[\frac{\bar{w}_3-\bar{w}_4}{a} - \frac{\bar{\theta}_x^3+\bar{\theta}_x^4}{2}\right]\\
\bar{\mathbf{S}}_y^{II} &= \alpha\left[\frac{\bar{w}_2-\bar{w}_3}{b} - \frac{\bar{\theta}_x^2+\bar{\theta}_x^3}{2}\right]\\
\bar{\mathbf{S}}_y^{IV} &= \alpha\left[\frac{\bar{w}_1-\bar{w}_4}{b} - \frac{\bar{\theta}_y^1+\bar{\theta}_y^4}{2}\right]
\end{aligned} \tag{2 22}$$

que puede ser fácilmente reescrito en la forma de la Ec. (2 21)

En el caso general, volviendo al principio variacional de la Ec. (2.20a), se escribe éste en forma discreta como

$$\begin{aligned}
\Pi =& \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{L}\mathbf{N}_\theta\bar{\boldsymbol{\theta}})^T\mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{N}_\theta\bar{\boldsymbol{\theta}})\,d\Omega\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{Q}_\theta\bar{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{Q}_w\bar{\mathbf{w}})^T\mathbf{N}_s^T\alpha\mathbf{N}_s\,d\Omega(\mathbf{Q}_\theta\bar{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{Q}_w\bar{\mathbf{w}})\\
&-\int_\Omega (\mathbf{N}_w\bar{\mathbf{w}})^T\bar{q}\,d\Omega
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Este es un principio de energía potencial restringido del cual, mediante minimización, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\theta\theta} & \mathbf{K}_{\theta w}\\ \mathbf{K}_{\theta w}^T & \mathbf{K}_{ww}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\boldsymbol{\theta}}\\ \bar{\mathbf{w}}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathbf{f}_\theta\\ \mathbf{f}_w\end{Bmatrix} \tag{2 24}$$

Las contribuciones elementales son simplemente

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\theta\theta}^e &= \int_{\Omega^e}[(\mathbf{L}\mathbf{N}_\theta)^T\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{N}_\theta + (\mathbf{N}_s\mathbf{Q}_\theta)^T\alpha(\mathbf{N}_s\mathbf{Q}_\theta)]\,d\Omega\\
\mathbf{K}_{\theta w}^e &= \int_{\Omega^e}(\mathbf{N}_s\mathbf{Q}_\theta)^T\alpha(\mathbf{N}_s\mathbf{Q}_\theta)\,d\Omega\\
\mathbf{K}_{ww}^e &= \int_{\Omega^e}(\mathbf{N}_s\mathbf{Q}_w)^T\alpha(\mathbf{N}_s\mathbf{Q}_w)\,d\Omega
\end{aligned} \tag{2.25}$$

con los términos de fuerza idénticos a los definidos en las Ecs (2.9)

Las expresiones generales deducidas anteriormente se pueden usar para cualquier forma de elementos con restricciones discretas y no presentan dificultades computacionales.

En lo anterior se han impuesto las restricciones mediante colocación puntual sobre nodos colocados en los contornos exteriores, o incluso en el interior del elemento. Se puede utilizar otras integrales sin introducir dificultades en la construcción final de la matriz de rigidez. Se podría, por ejemplo, exigir que integrales tales como $\int_\Gamma W[S_s - \alpha(\partial w/\partial s - \theta_s)]d\Gamma$ se anularan en segmentos del contorno, o que $\int_\Omega W[S_s - \alpha(\partial w/\partial s - \theta_s)]d\Omega$ se anulara en el interior. Todos estos procedimientos conseguirían el mismo objetivo siempre que fuese posible la eliminación de los parámetros S_s.

Se puede probar fácilmente que el uso de restricciones discretas es equivalente a usar *matrices de deformación de cortante de sustitución* en la forma irreducible de la Ec. (2.8). Esto permite la introducción fácil de tales formulaciones en los programas estándar. Oñate *et al.*[32,33] dan detalles de este procedimiento.

2.5.3 *Relación con la formulación discreta de Kirchhoff (DKT).* En el Capítulo 1, Sección 1.18, se ha discutido con detalle la llamada formulación DKT, en la que se aplican las restricciones de Kirchhoff [esto es, Ec. (2.20c) con $\alpha = \infty$] de forma discreta. La razón para el éxito de tales restricciones discretas no era obvia con anterioridad, pero creemos que la formulación presentada aquí en función de la forma mixta explica completamente sus bases. Es bien conocido que el estudio de las formas mixtas a menudo revela la robustez de las formas irreducibles, o la falta de éstas.

En el Capítulo 12 del Volumen 1 se ha explicado por qué ciertos elementos basados en la forma irreducible funcionan bien a medida que se acercan a los límites de incompresibilidad, mientras otros fallan. Aquí se ilustra una situación análoga.

Está claro que cada uno de los elementos discutidos hasta ahora tiene su análogo en la forma DKT. De hecho, la formulación de placas gruesas que se ha presentado aquí con $\alpha \neq \infty$ es sencillamente una forma penalizada de las restricciones DKT en las que se usa eliminación directa de las variables. Quedan por tanto abiertas muchas oportunidades para el desarrollo de elementos de placa interesantes y quizás eficientes tanto para el rango de espesores grueso o delgado.

Se muestran en la siguiente sección algunos elementos triangulares particularmente útiles, así como sus homólogos DKT. Quizás todos los elementos que estamos discutiendo deberían ser llamados elementos DRM (Reissner-Mindlin discretos) para facilitar la clasificación.

2.5.4 *Restricciones de colocación para elementos triangulares.* La Figura 2.13 muestra un triángulo en el que se utiliza una interpolación cuadrática directa de $\boldsymbol{\theta}$ y w. Tomaremos los esfuerzos cortantes dados por un campo lineal completo definido por seis valores del esfuerzo cortante en los contornos del elemento y en direcciones paralelas a éstos. Los nodos de

cortante se colocan en los puntos de Gauss y las restricciones de colocación se hacen en las mismas posiciones.

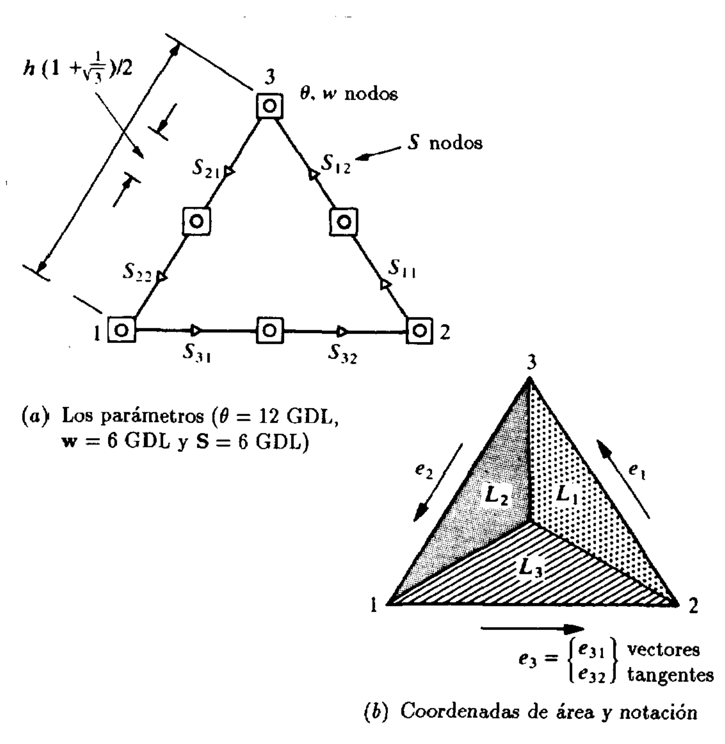


Figura 2.13 El nuevo elemento triangular de placa cuadrático.

Escribiendo la interpolación en coordenadas de área se tiene

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{3} L_i \mathbf{a}_i \tag{2.26}$$

en la cual $\mathbf{a}_i$ son seis parámetros todavía indeterminados. Éstos pueden determinarse escribiendo las expresiones para el cortante tangencial en los seis nodos donde se aplican las restricciones, obteniendo finalmente

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{3} \frac{L_i}{\Delta_i} \begin{bmatrix} e_{ky} & -e_{jy} \\ -e_{kx} & e_{jx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1\bar{S}_{j1} + g_2\bar{S}_{j2} \\ g_2\bar{S}_{k1} + g_2\bar{S}_{k2} \end{Bmatrix} \tag{2.27}$$

Esto define de forma única las funciones de forma de la Ec. (2.11) y, al aplicar las restricciones, expresa finalmente el campo de cortantes en

función de los desplazamientos $\bar{\mathbf{w}}$ y giros $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ nodales, en la forma de la Ec (2 21)

En la Ec (2 27) $\bar{S}_{j1}$ y $\bar{S}_{j2}$ son los esfuerzos cortantes en los dos puntos de Gauss del lado j-ésimo (en el que $L_j = 0$) y

$$g_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \qquad g_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \tag{2 28a}$$

$$\Delta_i = e_{jx}e_{ky} - e_{jy}e_{kx} \tag{2 28b}$$

con

$$\mathbf{e}_j = \begin{Bmatrix} e_{jx} \\ e_{jy} \end{Bmatrix} \tag{2 28c}$$

definiendo los cosenos directores del lado j-ésimo La deducción completa de la expresión anterior figura en la referencia [27] y la deducción final de las matrices elementales sigue los procedimientos de las Ecs. (2 23) a (2 25)

El elemento deducido satisface completamente las condiciones de cuenta del test de la parcela, como se muestra en la Tabla 2 3 para el elemento TRI-6 Este elemento se comporta de forma bastante satisfactoria en todas las configuraciones, pero es algo demasiado flexible como se verá más tarde Un elemento triangular alternativo que muestra una mejora considerable en su funcionamiento está esbozado en la Figura 2 14. Aquí la variable de desplazamiento w se interpola linealmente y $\boldsymbol{\theta}$ es *casi* cuadrática, como resultado de una interpolación completamente cuadrática con la rotación normal a los lados restringida a variar linealmente, y una única variable de cortante y un único punto de restricción para cada lado del elemento

Como se muestra en la Tabla 2.3 las condiciones de "cuenta" se satisfacen completamente para las parcelas de uno y varios elementos

El elemento tiene particular interés ya que resulta ser el equivalente exacto del triángulo de DKT con 9 grados de libertad, que daba una solución muy satisfactoria para placas delgadas [34,36] De hecho, en el límite los dos elementos tienen un comportamiento idéntico, aunque naturalmente el elemento DRM es también aplicable a placas con deformación de cortante.†

Quizá el único punto de detalle que merece la pena mencionar es la interpolación de la variable **S**. En el elemento cuadrático TRI-6 se tenía un desarrollo lineal completo de **S** Con sólo tres parámetros de cortante el

† Es interesante resaltar que el elemento original DKT puede ser modificado de forma diferente para conseguir deformación por cortante[37] y obtener resultados similares Sin embargo, el elemento presentado en esa referencia no es totalmente convergente

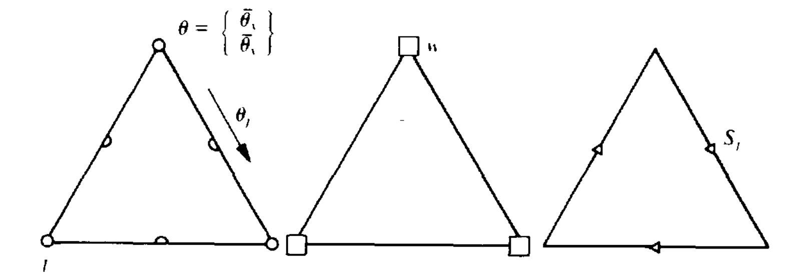


Figura 2 14 El triángulo DRM (Reissner-Mindlin Discreto) de la referencia [30] con $\boldsymbol{\theta}$ interpolado a partir de los valores en las esquinas y los giros paralelos a los lados θ_j, w lineal, y el cortante $\bar{S}$ paralelo a los lados constante e igual a $\bar{S}_j$

campo de cortante difiere sólo ligeramente de valores constantes definidos por dos parámetros y la definición más simple utiliza la expresión de la Ec (2 27) con

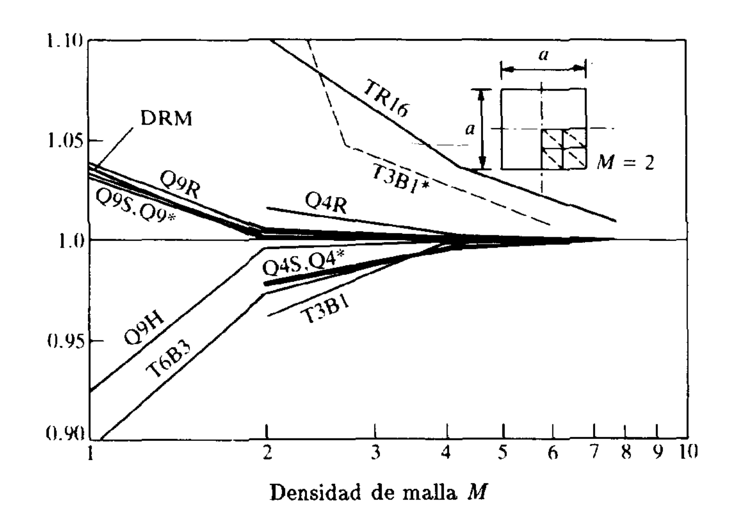
$$\bar{S}_{j1} = \bar{S}_{j2} = \bar{S}_j \tag{2 29}$$

2.6 Comportamiento de varios elementos de placa "gruesa". Limitaciones de la teoría de placas delgadas

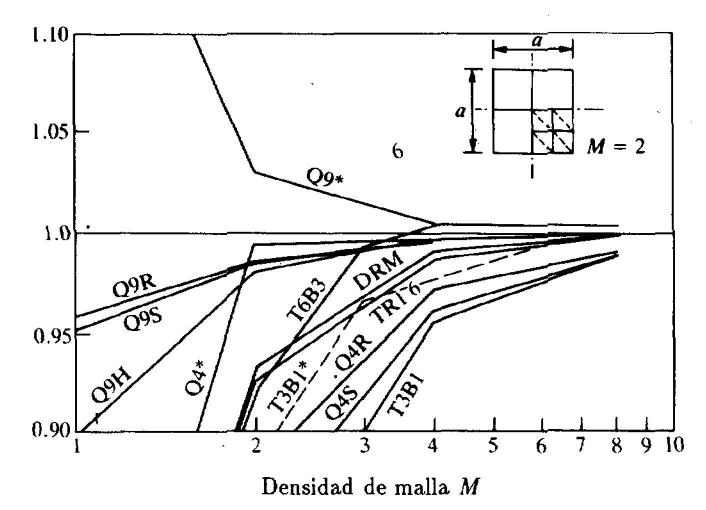
El comportamiento de los elementos "gruesos" y "delgados" se compara frecuentemente en ejemplos de placas cuadradas empotradas y simplemente apoyadas, aunque naturalmente se podría y debería diseñar tests más exigentes La Figura 2 15(a) a (d) muestra el comportamiento de varios elementos discutidos aquí en el caso de una relación luz/espesor (a/t) de 100, considerada generalmente dentro del rango de la teoría de placas delgadas Estos resultados son directamente comparables a los de la Figura 1 16 del Capítulo 1, y es evidente que los elementos de placa gruesa se comportan tan bien como los mejores de placa delgada

Es interesante notar que en la Figura 2.15 se han incluido algunos elementos que no pasan completamente el test de la parcela y que por lo tanto no son robustos Muchos de tales elementos se utilizan todavía y sólo fallan en ocasiones

Todos los elementos "robustos" del tipo de placa delgada se pueden transformar fácilmente isoparamétricamente y su funcionamiento continúa siendo excelente y convergente. La Figura 2.16 muestra cómo se ha usado la transformación isoparamétrica en una malla de lados curvos para el análisis de una placa circular con dos de los elementos discutidos previamente Obviamente esta falta de sensibilidad a la distorsión será considerablemente ventajosa cuando se traten las láminas, como veremos en el Capítulo 5

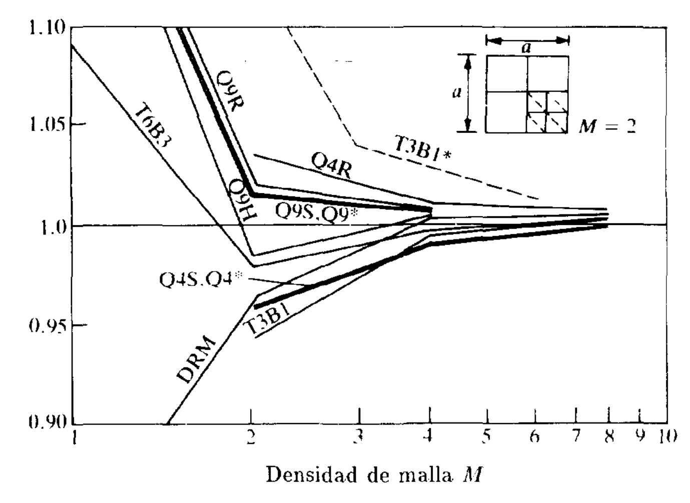


(*a*) **Desplazamiento central normalizado respecto a la teoría de placas delgadas para una placa cuadrada, simplemente apoyada, con carga uniforme**

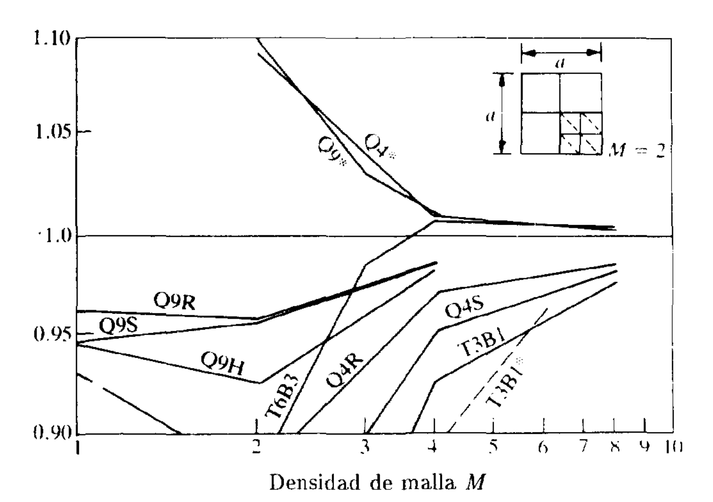


(*b*) **Momento en el punto de Gauss más cercano al centro (o punto central) normalizado respecto al momento central de la teoría de placas delgadas para una placa cuadrada simplemente apoyada, con carga uniforme**

Figura 2.15 Estudio de convergencia para una placa relativamente delgada ($a/t = 100$). Las Tablas 2.1 a 2.3 dan las claves sobre los elementos usados.

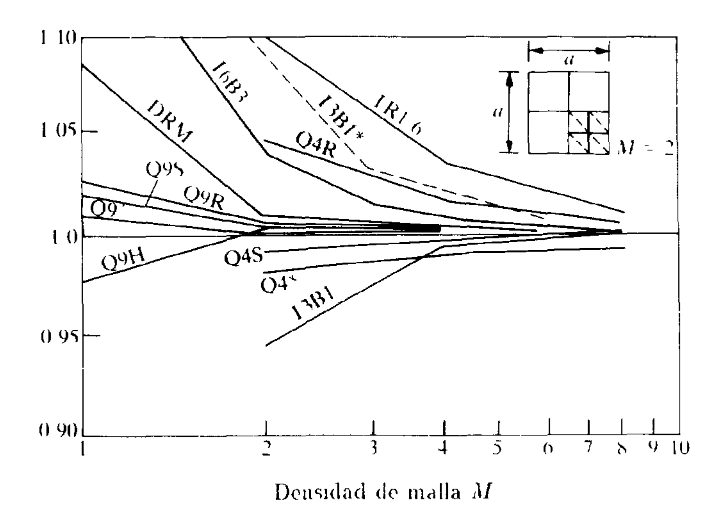


(*c*) Desplazamiento central normalizado respecto a la teoría de placas delgadas para una placa cuadrada empotrada y con carga uniforme

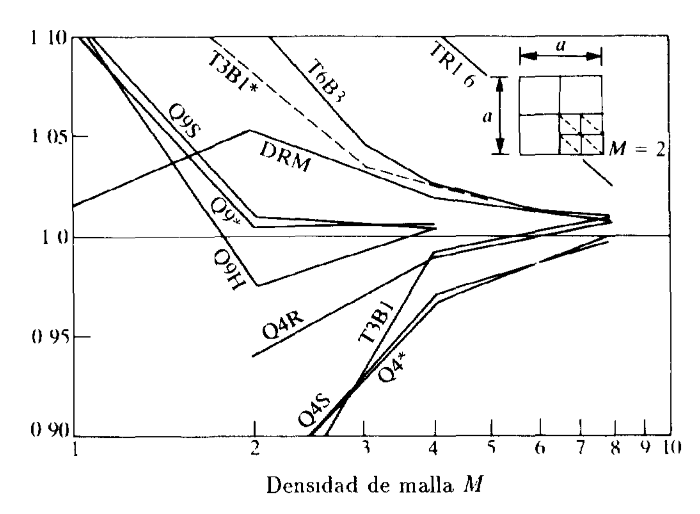


(*d*) Momento en el punto de Gauss más cercano al centro normalizado respecto al momento central de la teoría de palcas delgadas para una placa cuadrada empotrada con carga uniforme

Figura 2.15 (*continuación*).

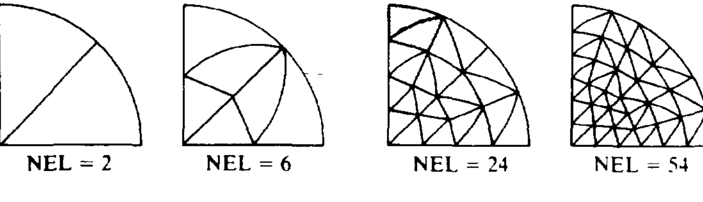


(*e*) Momento central normalizado respecto a la teoría de placas delgadas para una placa cuadrada simplemente apoyada, bajo carga concentrada (nótese que la solución segun la teoria de placas gruesas es infinita bajo la carga concentrada)

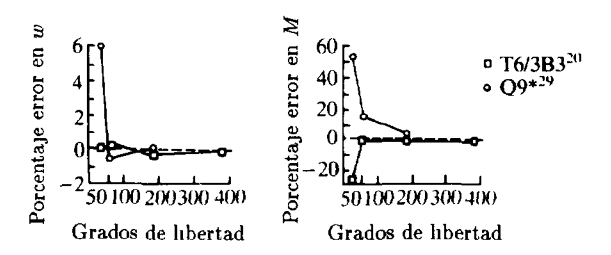


(*f*) Desplazamiento central normalizado respecto a la teoría de placas delgadas para una placa cuadrada empotrada bajo carga concentrada

Figura 2.15 (*continuación*)



(*a*) Mallas usadas



(*b*) Porcentaje de error en desplazamiento y momento en el centro

Figura 2.16 Elementos curvilíneos transformados en la solución de una placa circular empotrada bajo carga uniforme

Naturalmente, cuando la importancia del espesor y la deformación por cortante aumenta, los elementos de placa gruesa con capaces de dar resultados no obtenibles con la teoría de placa delgada. En la Tabla 2.4 se muestran algunos resultados para una placa simplemente apoyada, cargada uniformemente, para dos relaciones diferentes de a/t. En este ejemplo se muestra también el efecto de las condiciones de apoyo simple *fuerte* y *débil* (véase Capítulo1, Sección 1.1.2). En el apoyo fuerte se supone, como para placas delgadas, que el giro a lo largo del apoyo es nulo. En el apoyo débil se toma, de forma más racional, que el momento torsor es cero a lo largo del apoyo.

Es inmediatamente evidente que

1. La placa gruesa ($a/t = 10$) tiene flechas que convergen a valores muy diferentes dependiendo de las condiciones de apoyo, siendo ambas considerablemente mayores que los que da la teoría de placas delgadas.
2. Para la placa delgada ($a/t = 100$) las flechas convergen uniformente a los resultados de placa delgada (Kirchhoff) para las condiciones de apoyo *fuerte*, pero las condiciones de apoyo *débil* dan respuestas un 0.3% mayores en flechas.

Ésta es quizás una diferencia insignificante que ocurre en este ejemplo

TABLA 2.4

FLECHA EN EL CENTRO DE UNA PLACA SIMPLEMENTE APOYADA BAJO CARGA UNIFORME PARA DOS RELACIONES a/t (ELEMENTO DRM[30]*)*

$E = 10.92 \quad \nu = 0.3 \quad a = 10 \quad q = 1.0$

Malla M	$a/t = 10$ Apoyo fuerte	$a/t = 10$ Apoyo débil	$a/t = 100$ Apoyo fuerte	$a/t = 100$ Apoyo débil
2	4.8665	4.3992	4.0582	4.0903
4	4.2829	4.4600	4.0671	4.0737
8	4.2739	4.5393	4.0659	4.0719
16	4.2728	4.5906	4.0649	4.0756
	$\times 10^{-1}$		$\times 10^{-4}$ Solución de placa delgada 4.0623	

para las dos condiciones de apoyo, pero podría ser más importante en otras configuraciones diferentes.

En la Figura 2.17 se muestran los resultados del estudio de una placa rómbica simplemente apoyada con $a/t = 100$ y 1000. Para este problema existe una solución exacta de la teoría de placas de Kirchhoff,[38] pero puede apreciarse que los resultados de placa gruesa convergen uniformente a un desplazamiento casi 4% en exceso de las soluciones de placa delgada para los casos en que $a/t = 100$.

Este problema es ilustrativo de la diferencia sustancial que puede aparecer a veces en situaciones que caen dentro de los límites supuestos para la teoría convencional de placas delgadas ($a/t = 100$), y por esta razón este problema ha sido investigado por Babuska y Scapolla,[39] que lo resuelven como un problema de elasticidad bidimensional utilizando condiciones de apoyo del tipo "débil", que parecen ser más cercanas a la realidad física. Sus resultados tridimensionales son muy cercanos a la solución de placas gruesas y confirman su validez, y, de hecho, su superioridad sobre los de placas delgadas. Sin embargo, observamos que para placas muy delgadas, incluso con el apoyo débil, se tiene convergencia a los resultados de placa delgada.

2.7 Consideraciones finales. Refinamiento adaptable

La simplicidad para obtener y usar elementos con interpolaciones independientes de los giros y los desplazamientos en los que se incluye

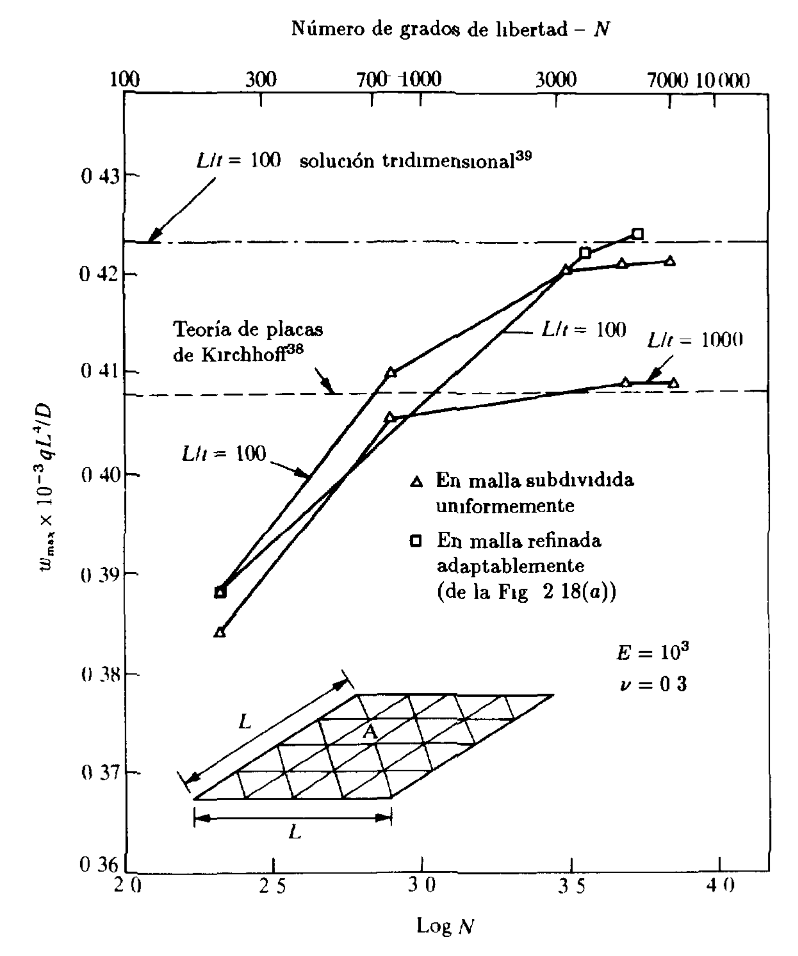


Figura 2.17 Placa esviada a 30° simplemente apoyada (apoyo débil). Flecha máxima en el centro (punto A), para varios grados de libertad N. Se utiliza el elemento triangular de la referencia [20]

la deformación por cortante asegura la popularidad de esta formulación. Los grados de libertad final usados son exactamente del mismo tipo que los utilizados en la formulación directa de la teoría de placa delgada del Capítulo 1, y se incluye la deformación por cortante en el análisis sin coste adicional.

Siempre que se ponga cuidado en asegurar la robustez, los elementos del tipo discutidos en este capítulo son de aplicacion general y, de hecho, se pueden usar con restricciones similares a las de otras aproximaciones de

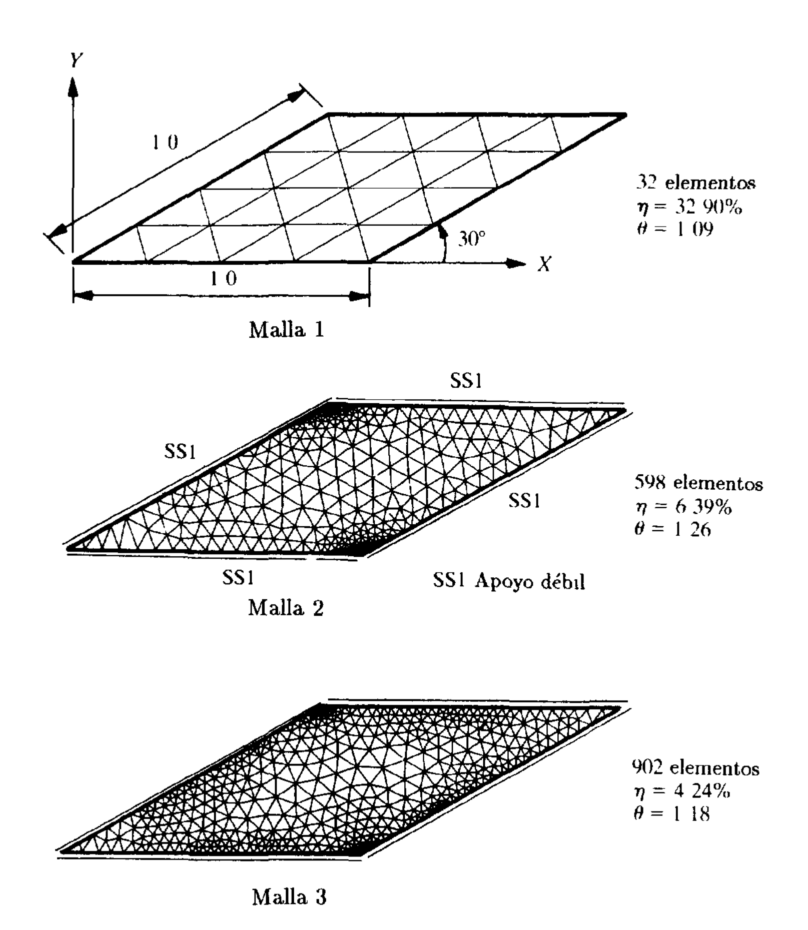


Figura 2.18a Placa esviada a 30° simplemente apoyada con carga uniforme (problema de la Figura 2.17). Análisis adaptable para conseguir un 5% de precisión. $a/t = 100$, $\nu = 0.3$, elemento de seis nodos de la referencia [20], θ = índice de efectividad, η = porcentaje de error en la norma de energía del estimador

elementos finitos que precisan en el límite continuidad C_1.

La facilidad para distorsionar elementos hace que los elementos del tipo estudiados aquí sean la primera opción para la solución de láminas curvas y pueden adaptarse fácilmente a la no linealidad debida al comportamiento material o geométrico.

En el Volumen 1 se discutió la necesidad de un procedimiento adaptable en el que se usa la estimación de error conjuntamente con la generación de malla para obtener una precisión dada. Dichos procedimientos adaptables se pueden usar fácilmente en problemas de flexión de placas, con una forma casi idéntica de estimación del error.[40]

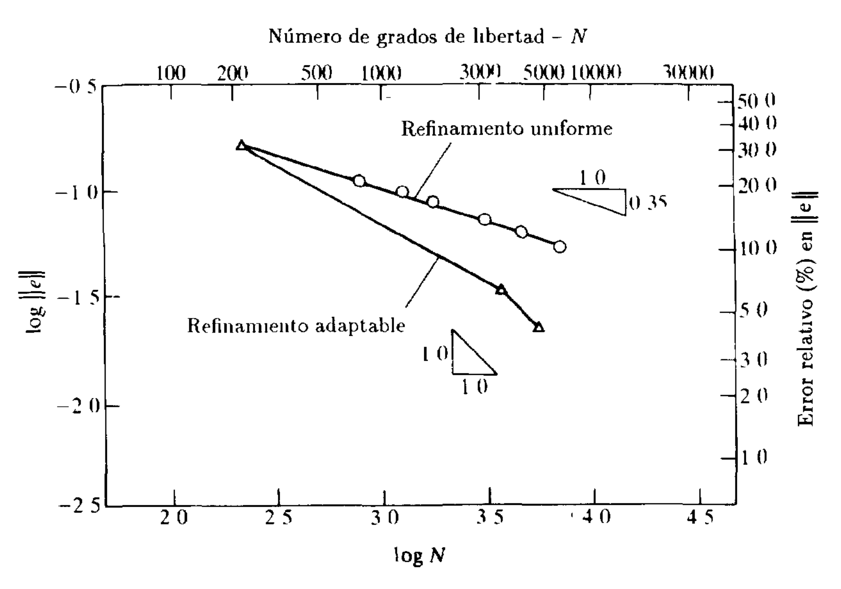


Figura 2.18b Velocidad de convergencia en norma de energía para la placa esviada a 30° de la Figura 2.17 utilizando refinamiento uniforme y adaptable. El análisis adaptable es para conseguir el 5% de precisión

En la Figura 2.18 se muestra una secuencia de mallas generadas automáticamente para el problema de una placa esviada. Es de particular interés notar:

a) el refinamiento inicial en la cercanía de la singularidad de las esquinas, y

b) el refinamiento final en una capa próxima al contorno, causado por las condiciones de apoyo simple en las que las hipótesis de desplazamiento y tensión nulas son bastante "forzadas"

De hecho, tales capas límite aparecen en los lados libres de todas las placas y es normal que el error en el cortante represente una parte importante del error total de la aproximación

Referencias

1. S. AHMAD, B. M. IRONS y O. C. ZIENKIEWICZ, "Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric

problems", en *Proc 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1968
2 S AHMAD, B M IRONS y O C ZIENKIEWICZ, "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", *Int J Num Meth Eng*, **2**, 419–51, 1970
3 S. AHMAD, "Curved finite elements in the analysis of solids, shells and plate structures", Ph D. thesis, University of Wales, Swansea, 1968
4 O C ZIENKIEWICZ, J TOO y R.L TAYLOR, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", *Int J. Num Meth Eng*, **3**, 275–90, 1971
5 S.F PAWSEY y R W CLOUGH, "Improved numerical integration of thick slab finite elements", *Int J. Num Meth. Eng*, **3**, 575–86, 1971
6. O C ZIENKIEWICZ y E HINTON, "Reduced integration function smoothing and non-conformity in finite element analysis", *J. Franklin Inst.*, **302**, 443–61, 1976
7 E.D L. PUGH, E HINTON y O C. ZIENKIEWICZ, "A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration", *Int J Num Meth Eng.*, **12**, 1059–79, 1978.
8 T.J R HUGHES, R L. TALOR y W KANOKNUKULCHAI, "A simple and efficient finite element for plate bending", *Int J Num Meth Eng*, **11**, 1529–43, 1977
9 T J R. HUGHES y M COHEN, "The "heterosis" finite element for plate bending", *Comp Struct.*, **9**, 445–50, 1978
10 T R.J HUGHES, M COHEN y M HAROU, "Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates", *Nuclear Eng Des.*, **46**, 203–22, 1978.
11 E HINTON y N BICANIC, "A comparison of Lagrangian and serendipity Mindlin plate elements for free vibration analysis", *Comp Struct*, **10**, 483–93, 1979.
12 R D. COOK, "*Concepts and Applications of Finite Element Analysis*", Wiley, Chichester, 1982
13 R L TAYLOR, O.C ZIENKIEWICZ, J C SIMO y A H C CHAN, "The patch test–a condition for assessing FEM convergence", *Int J Num Meth Eng*, **22**, 39–62, 1986
14 O.C ZIENKIEWICZ, S QU, R.L TAYLOR y S. NAKAZAWA, "The patch test for mixed formulations", *Int J. Num Meth Eng*, **23**, 1873–83, 1986.
15 O C ZIENKIEWICZ y D LEFEBVRE, "Three field mixed approximation and the plate bending problem", *Comm Appl. Num Meth*, **3**, 301–9, 1987
16 O C ZIENKIEWICZ, J P VILOTTE, S TOYOSHIMA y S NAKAZAWA, "Iterative method for constrained and mixed approximation An inexpensive improvement of FEM performance", *Comp. Meth Appl Mech Eng*, **51**, 3–29, 1985

17 D S MALKUS y T J R HUGHES, "Mixed finite element methods–reduced and selective integration techniques a unification of concepts", *Comp. Meth Appl Mech Eng*, **15**, 63–81, 1978
18 B FRAEIJS DE VEUBEKE, "Displacement and equilibrium models in finite element method", en *Stress Analysis* (eds O C Zienkiewicz y G S Holister), cap 9, pp 1–20, Wiley, Chichester, 1982.
19 K J BATHE y L.W. HO, "Some results in the analysis of thin shell structures", en *Nonlinear Finite Elements Analysis in Structural Mechanics* (eds W. Wunderich *et al*), pp 122–56, Springer–Verlag, Berlin, 1981
20 O C ZIENKIEWICZ y D. LEFEBVRE, "A robust triangular plate bendig element of the Reissner–Mindlin type", *Int J. Num Meth Eng*, **26**, 1169–84, 1988
21 D N ARNOLD and R S FALK, "A uniformly accurate finite element method for Mindlin–Reissner plate", IMA Preprint Series No 307, Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota, April, 1987
22 Z XU, "A simple and efficient triangular finite elment for plate bending", *Acta Mechanica Sinica*, **2**, 185–92, 1986.
23 A TESSLER y T.J.R. HUGHES, "A three node Mindlin plate element with improved transverse shear", *Comp Math. Appl Eng*, **50**, 71–101, 1985
24 A TESSLER, "A C^0 isoparametric three node shallow shell element", *Comp Meth Appl. Mech Eng*, **78**, 89–103, 1990
25 T J R HUGHES y T E TEZDUYAR, "Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four node bilinear isoparametric element", *J Appl Mech*, **46**, 587–96, 1981.
26 E N DVORKIN y K J BATHE, "A continuum mechanics based four node shell element for general non-linear analysis", *Eng Comp*, **1**, 77–88, 1984
27 K J BATHE y E N DVORKIN, "A four node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation", *Int. J Num. Meth Eng.*, **21**, 367–383, 1985
28 H C HUANG y E HINTON, "A nine node Lagrangian Mindlin element with enhanced shear interpolation", *Eng. Comp*, **1**, 369–80, 1984
29 E HINTON y H C HUANG, "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields", *Comp Struct*, **23**, 409–31, 1986

30. O C ZIENKIEWICZ, R.L TAYLOR, P PAPADOPOULOS y E OÑATE, "Plate bending elements with discrete constraints, new triangular elements", *Comp Struct*, **35**, 505–22, 1990
31. K J BATHE y F BREZZI, "On the convergence of a four node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation", en *The Mathematics of Finite Elements Applications* (ed J. Whiteman), Vol. V, pp 491–503, Academic Press, London, 1985
32 E. OÑATE, R L TAYLOR y O C ZIENKIEWICZ, "Consistent formulation of shear constrained Reissner-Mindlin plate elements", en *Discretization Methods in Structural Mechanics* (eds C Kuhn y H Mang), pp 169–80, Springer-Verlag, Berlin, 1990
33 E OÑATE, O C ZIENKIEWICZ, B SUÁREZ y R.L TAYLOR, "A general methodology for deriving shear constrained Reissner–Mindlin plate elements", *Int. J Num Meth Eng.*
34 G S DHATT, "Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis", en *Proc Symp on Applications of FEM in Civil Engineering* (eds W R Rowan y R.M Hackett), Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 1969
35 J L BATOZ, "An explicit formulation for an efficient triangular plate bending element", *Int. J Num Meth Eng*, **18**, 1077–82, 1982
36 J.L BATOZ, K J BATHE y L W HO, "A study of three node triangular plate bending elements", *Int J Num Meth Eng*, **15**, 1771–812, 1980
37 J.L BATOZ y P. LARDEUR, "A discrete shear triangular nine d o f. element for the analysis of thick to very thin plates", *Int J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 533–60, 1989
38 L S D. MORLEY, "*Skew Plates and Structures*", International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, Macmillan, New York, 1963
39 I BABUSKA y T. SCAPOLLA, "Benchmark computation and performance evaluation for a rhombic plate bending problem", *Int J Num Meth Eng*, **28**, 155–79, 1989
40. O C ZIENKIEWICZ y J Z ZHU, "Error estimation and adaptive refinement for plate bending problems", *Int J. Num Meth Eng*, **28**, 2839–53, 1989

Capítulo 3

LAS LÁMINAS COMO ENSAMBLAJE DE ELEMENTOS PLANOS

3.1 Introducción

Una lámina es, en esencia, una estructura que puede obtenerse a partir de una placa delgada transformando inicialmente el plano medio en una superficie de curvatura única (o doble). Aunque sigan siendo válidas las mismas hipótesis que en la teoría de placas acerca de la distribución transversal de deformaciones y tensiones, la manera en que las láminas resisten las cargas exteriores es completamente diferente a la de una placa plana Las resultantes de las tensiones paralelas al plano medio de la lámina tienen ahora componentes normales a la superficie y soportan la mayor parte de la carga, razón por la cual se explica la economía de las láminas como estructuras portantes y su merecida popularidad

La obtención detallada de las ecuaciones de comportamiento en los problemas de láminas presenta muchas dificultades y, en realidad, conduce a distintas formulaciones posibles dependiendo cada una de las aproximaciones introducidas Para una explicación más detallada acerca del tratamiento clásico de la teoría de láminas se remite al lector a los textos de carácter general del tema, por ejemplo, al conocido tratado de Flugge.[1]

En el análisis de problemas de láminas mediante elementos finitos descrito en este capítulo se eliminan las dificultades a que nos referíamos antes a expensas de introducir una aproximación adicional Esta aproximación es más de naturaleza física que matemática En ella se supone que el comportamiento de una superficie de curvatura continua puede representarse adecuadamente por el comportamiento de otra superficie formada por elementos planos de tamaño pequeño Intuitivamente, al disminuir el tamaño de los elementos parece que debería conseguirse la convergencia, y efectivamente así lo corrobora la experiencia.

Muchos expertos en láminas podrían aducir que al comparar la solución *exacta* de una lámina aproximada mediante piezas planas con la solución exacta correspondiente a una lámina curva, resultarán diferencias considerables en la distribución de momentos flectores, etc Esto es

cierto, sin duda, pero para *elementos simples* el error de discretización es aproximadamente del mismo orden y pueden obtenerse excelentes resultados aproximando la lámina mediante elementos planos. La base matemática de este problema ha sido discutida con detalle por Ciarlet.[2]

En una lámina, cada elemento estará sometido generalmente a esfuerzos de flexión y "membranales". En un elemento plano, si las deformaciones locales son pequeñas, dichas acciones originan deformaciones independientes y, por consiguiente, los ingredientes necesarios para formar las correspondientes matrices de rigidez pueden encontrarse en la parte del texto ya estudiada.

Para dividir una lámina de geometría arbitraria en elementos planos sólo pueden usarse elementos triangulares. Aunque la idea de emplear estos elementos ya fue sugerida por Greene *et al.*[3] hacia 1961, su buen resultado se ha visto impedido por la inexistencia de una matriz de rigidez correcta para un elemento de placa triangular bajo flexión.[4-7] La exposición ofrecida en los Capítulos 1 y 2 abre el camino para desarrollar modelos adecuados aptos para representar el comportamiento de láminas divididas de esta manera.

Ciertas láminas, como las de forma cilíndrica, pueden representarse bien mediante elementos planos de forma rectangular o cuadrilateral. Al disponerse de matrices de rigidez correctas para dichos elementos el avance en este terreno ha sido más satisfactorio. Los primeros problemas prácticos que se resolvieron con este tipo de subdivisiones fueron los de diseño de presas de arco, y otros relativos a cubiertas cilíndricas.[8,9]

Es evidente que para el estudio de estructuras laminares las posibilidades del método de los elementos finitos son enormes. Una vez escritos los programas generales, los problemas debidos a la existencia de grietas, variaciones de espesor o anisotropía carecen de importancia.

Las láminas de revolución son un caso particular. Aunque obviamente puedan tratarse siguiendo los métodos descritos en este capítulo, es posible emplear un procedimiento más sencillo que se presentará en el Capítulo 4.

Como alternativa al tipo de análisis aquí descrito, se podrían emplear elementos laminares curvos. Las coordenadas curvilíneas son en tal caso indispensables y pueden definirse ampliando los procedimientos expuestos en el Capítulo 8 del Volumen 1. Se evita así la aproximación de naturaleza física implicada en el uso de elementos planos, a expensas de volver a introducir las hipótesis más o menos arbitrarias de las distintas teorías de láminas. En las referencias 10-30 se exponen varios procedimientos basados directamente en el método de los desplazamientos, y en las 31-34 otros que emplean formulaciones variacionales "mixtas".

Una manera sencilla y efectiva para establecer elementos laminares curvos es emplear el método basado en la llamada teoría de "láminas rebajadas".[19,20,35,36] En este caso las componentes del desplazamiento, w, u, v, definen las componentes del desplazamiento *normal y tangencial* a la superficie curva, y si todos los elementos se suponen tangentes entre sí, no es necesario transformar dichas componentes de sus valores locales a los globales.

El elemento se considera como "rebajado" con respecto a un sistema de coordenadas locales, y su energía de deformación se expresa por medio de las ecuaciones apropiadas en las que se incluyen las derivadas respecto de las *coordenadas en el plano de proyección*. Así pueden utilizarse precisamente las mismas funciones de forma que en los elementos planos estudiados en este capítulo, y, como antes, todas las integraciones se efectúan en el plano.

Estos elementos laminares rebajados, al acoplar en las expresiones de la energía los efectos de membrana y de flexión, son ligeramente más eficientes que los planos, donde dicho acoplamiento sólo tiene lugar en sus contornos. Para los elementos sencillos de pequeñas dimensiones las ventajas son marginales, pero cuando se emplea un número reducido de elementos complejos de grandes dimensiones las ventajas son apreciables. Una discusión particularmente clara de esta formulación se ofrece en la referencia 21.

Sin embargo, para muchos problemas prácticos la aproximación mediante elementos planos da soluciones muy adecuadas, y además permite tratar fácilmente las uniones con nervios o vigas de borde, facilidad que a veces no se presenta con elementos curvos. Por supuesto, en muchos casos la estructura se compone realmente de superficies planas, al menos en parte, y éstas pueden reproducirse sin más. Por estos motivos no se discutirán aquí las fórmulas generales de la teoría de láminas delgadas, y en lugar de ello en el Capítulo 5 se presentará un estudio general de láminas gruesas (basado directamente en su comportamiento tridimensional y evitando las ambigüedades que aparecen en las ecuaciones de las láminas).

El desarrollo de elementos curvos basado en las teorías generales de láminas puede efectuarse directamente. No obstante, en este caso se precisan transformaciones adicionales a las presentadas en este capítulo. El lector interesado encontrará una discusión detallada al respecto en las referencias 37 y 38.

En el caso de las láminas de revolución estudiadas en el capítulo siguiente consideraremos elementos rectos y curvos.

En la mayoría de los elementos laminares curvos de forma arbitraria desarrollados, las coordenadas empleadas son de tal naturaleza que no queda garantizada la lisura de la superficie al pasar de un elemento a otro. La discontinuidad geométrica que se da entonces, y por supuesto en toda lámina con "plegamientos", es precisamente de la clase que vamos a

encontrar en este capítulo y por tanto la metodología de ensamblaje que se estudia en el mismo es perfectamente general.

3.2 Rigidez de un elemento plano en coordenadas locales

Consideremos un elemento poligonal plano cualquiera sometido simultáneamente a acciones "en su plano", o de "membrana", y de flexión (Figura 3.1).

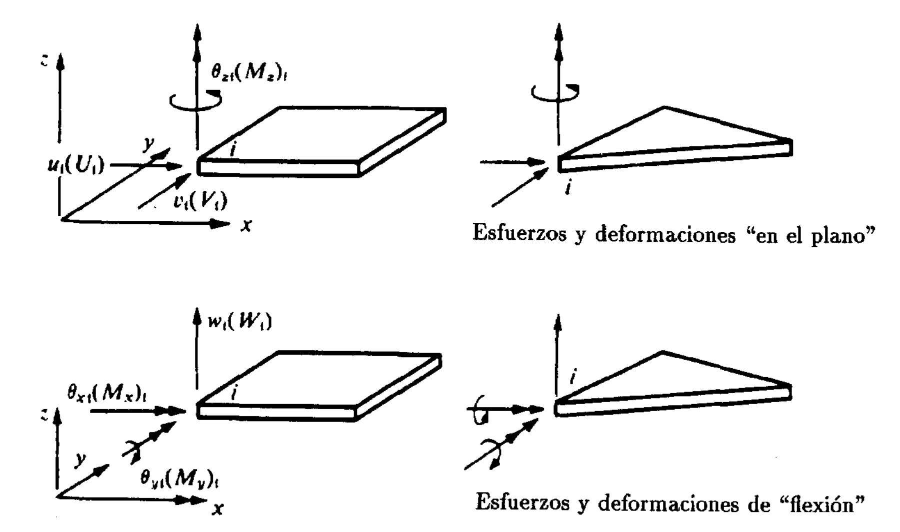


Figura 3.1 Elemento plano sometido a acciones "en su plano" y de flexión.

Considerando en primer lugar las acciones *en el plano* (tensión plana) sabemos, del Capítulo 3 del Volumen 1, que el estado de deformación se expresa en forma única en función de los desplazamientos u y v de cada uno de los nodos i. Las matrices de rigidez allí descritas se obtuvieron minimizando la energía potencial total, lo que da las fuerzas "nodales" debidas a los desplazamientos nodales $\mathbf{a}^p$ como sigue

$$\mathbf{f}^{ep} = \mathbf{K}^{ep}\mathbf{a}^p \qquad \text{con} \qquad \mathbf{a}_i^p = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{f}_i^p = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

Similarmente, cuando se considera la flexión, el estado de deformación viene expresado unívocamente como función del desplazamiento w en la dirección z y de los dos giros θ_x y θ_y. Esto conduce a matrices de rigidez del tipo

$$\mathbf{f}^{eb} = \mathbf{K}^{eb}\mathbf{a}^b \qquad \text{con} \qquad \mathbf{a}_i^b = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{f}_i^b = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

Antes de combinar estas rigideces, es importante advertir dos cosas. La primera, que los desplazamientos impuestos para las fuerzas "en el plano" no afectan a las deformaciones de flexión, y viceversa. La segunda, que el giro θ_z no interviene como parámetro en la definición de las deformaciones en ninguno de los casos. A pesar de que ahora se podría prescindir completamente de este giro, es conveniente, por razones que aparecerán más tarde en el momento del ensamblaje, tomarla ya en cuenta y asociarla con un momento ficticio M_z. El hecho de que no intervenga en el proceso de minimización se puede tener en cuenta simplemente insertando un número conveniente de ceros en la matriz de rigidez.

Volviendo a definir los desplazamientos nodales combinados como

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

y las "fuerzas" apropiadas como

$$\mathbf{f}_i^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

se puede escribir

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e\mathbf{a} \tag{3.5}$$

La matriz de rigidez se compone ahora de las siguientes submatrices

$$\mathbf{K}_{rs} = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{K}^p_{rs} & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & \mathbf{K}^b_{rs} & & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.6}$$

si advertimos que

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^p_i \\ \mathbf{a}^b_i \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

Las fórmulas anteriores son válidas para elementos poligonales de forma cualquiera, y en particular para los dos importantes casos de la Figura 3.1.

3.3 Transformación a coordenadas globales y ensamblaje de los elementos

La matriz de rigidez deducida en la sección anterior utilizaba un sistema de coordenadas locales, ya que los efectos de flexión y de las acciones "en el plano" se obtenían originalmente en dicho sistema.

Para ensamblar los elementos y para escribir las ecuaciones de equilibrio apropiadas será necesario una transformación de las coordenadas locales (designadas por x', y' y z') a un sistema global común (con coordenadas x, y, z).

Además, será más conveniente al principio definir los nodos del elemento por sus coordenadas globales y a partir de ellas calcular las coordenadas locales, para lo cual necesitamos la transformación inversa. Afortunadamente, todas las transformaciones se efectúan de manera sencilla.

En la Figura 3.2 se muestran los dos sistemas de coordenadas. Las fuerzas y los desplazamientos de un nodo se transforman del sistema global al local por una matriz $\mathbf{L}$ de tal forma que

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{L}\mathbf{a}_i \qquad \mathbf{f}'_i = \mathbf{L}\mathbf{f}_i \tag{3.8}$$

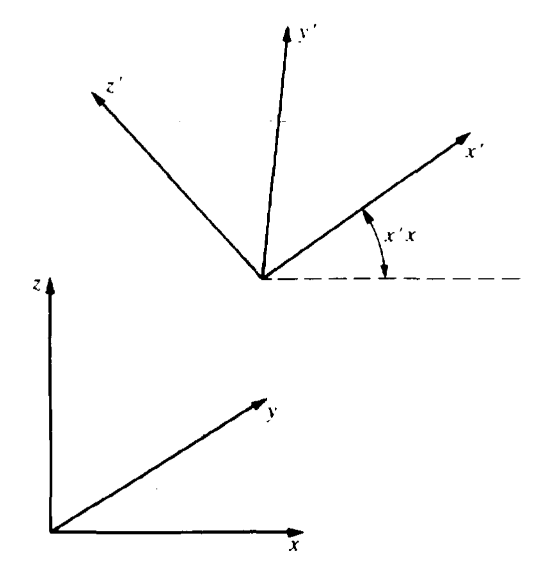


Figura 3.2 Coordenadas locales y globales.

donde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

siendo $\boldsymbol{\lambda}$ la matriz de dimensiones 3×3 de los cosenos directores de los ángulos que forman entre sí los dos sistemas de ejes, o sea

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

donde $\lambda_{x'x}$ = coseno del ángulo formado por los ejes x y x', etc.

Por tanto, para el conjunto de fuerzas que actúa sobre los nodos de un elemento podemos escribir

$$\mathbf{a}'^e = \mathbf{T}\mathbf{a}^e, \quad \text{etc.} \tag{3.11}$$

Según las reglas de las transformaciones ortogonales (véase Sección 1.8 del Volumen 1, páginas 18–19), la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales se obtiene por

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T\mathbf{K}'^e\mathbf{T} \tag{3.12}$$

En las dos ecuaciones anteriores, **T** viene dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

que es una matriz diagonal formada por un número de matrices **L** igual al de nodos del elemento.

Se demuestra fácilmente que una submatriz de rigidez típica es ahora

$$\mathbf{K}^e_{rs} = \mathbf{L}^T \mathbf{K}'^e_{rs} \mathbf{L} \tag{3.14}$$

en la cual $\mathbf{K}'^e_{rs}$ se obtiene en coordenadas locales por (3.6).

La determinación de las coordenadas locales sigue un camino similar. Si los orígenes de ambos sistemas (local y global) coinciden, se tiene

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\lambda} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

Puesto que el cálculo de las matrices de rigidez es independiente del origen, basta con esta transformación para determinar las coordenadas locales en el plano (o en un plano paralelo al elemento).

Una vez determinadas las matrices de rigidez de todos los elementos en el sistema de coordenadas globales común, el ensamblaje de los elementos y la solución final siguen el procedimiento general. Los desplazamientos resultantes están referidos al sistema global, y antes de que puedan calcularse las tensiones es necesario referirlos al sistema local relativo a cada elemento. Hecho esto, podrán emplearse las matrices de tensiones usuales para calcular los esfuerzos de flexión y "de membrana".

3.4 Cosenos directores locales

Una vez determinada la matriz $\boldsymbol{\lambda}$ de cosenos directores para cada elemento, el problema no presenta ninguna dificultad y la solución sigue los caminos habituales. La determinación de la matriz de cosenos directores origina algunas dificultades de cálculo, y por supuesto la solución no es única, ya que la dirección de uno de los ejes puede ser cualquiera dentro del plano del elemento.

Consideraremos en primer lugar el ensamblaje de elementos rectangulares para los que este problema es particularmente sencillo.

3.4.1 *Elementos rectangulares.* El uso de dichos elementos se limita a la representación de superficies prismáticas o cilíndricas y conviene tomar un lado de los elementos y la coordenada correspondiente x' paralelos al eje x del sistema global. Los cosenos directores fundamentales de un elemento típico, tal como el $ijkm$ de la Figura 3.3, se calculan sin dificultad. Los cosenos directores de x' son evidentemente

$$\begin{aligned} \lambda_{x'x} &= 1 \\ \lambda_{x'y} &= 0 \\ \lambda_{x'z} &= 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

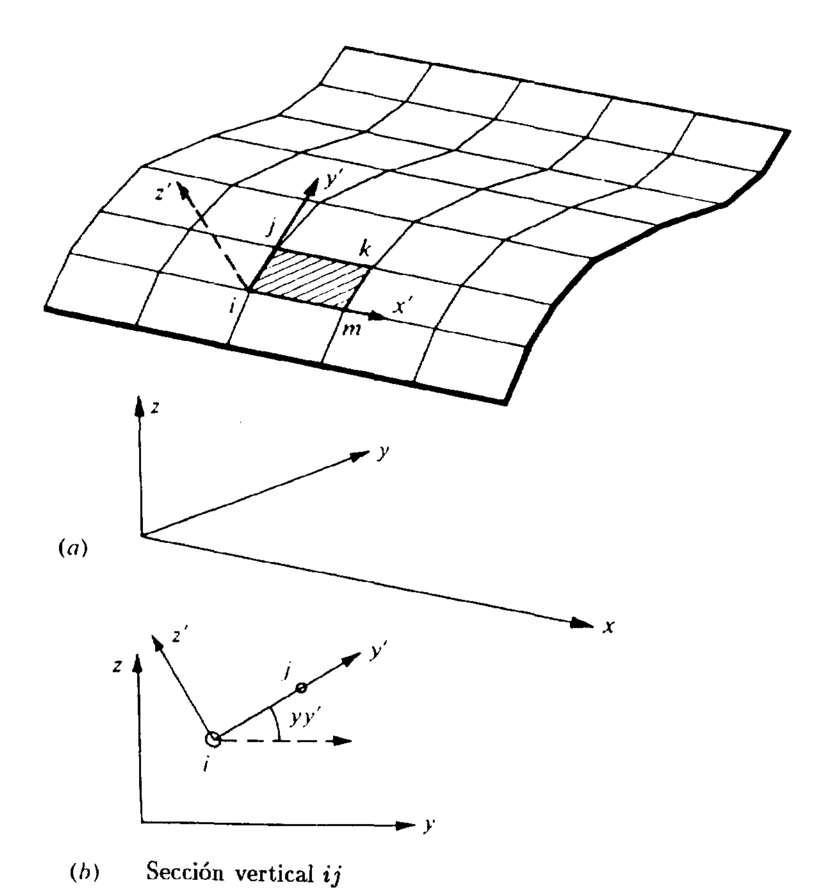


Figura 3.3 Lámina cilíndrica como ensamblaje de elementos rectangulares. Coordenadas locales y coordenadas globales.

Los cosenos directores del eje y' han de obtenerse considerando las coordenadas de los distintos puntos nodales. Así pues

$$\begin{aligned}\lambda_{y'x} &= 0\\ \lambda_{y'y} &= +\frac{y_j - y_i}{\sqrt{\{(z_j-z_i)^2+(y_j-y_i)^2\}}}\\ \lambda_{y'z} &= +\frac{z_j - z_i}{\sqrt{\{(z_j-z_i)^2+(y_j-y_i)^2\}}}\end{aligned} \tag{3.17}$$

Estas relaciones geométricas sencillas pueden obtenerse considerando el plano vertical que contiene a i y a j.

Igualmente, del mismo plano obtendremos para el eje z'

$$\begin{aligned}\lambda_{z'x} &= 0\\ \lambda_{z'y} &= -\frac{z_j - z_i}{\sqrt{\{(z_j-z_i)^2+(y_j-y_i)^2\}}}\\ \lambda_{z'z} &= +\frac{y_j - y_i}{\sqrt{\{(z_j-z_i)^2+(y_j-y_i)^2\}}}\end{aligned} \tag{3.18}$$

Evidentemente, siempre es importante numerar los nodos de la misma manera para mantener los signos correctos de estas expresiones.

3.4.2 *Elementos triangulares orientados de forma arbitraria.* En la Figura 3.4(a) se muestra una lámina cualquiera dividida en elementos triangulares. Cada elemento está orientado de manera que los ángulos que forma con los planos coordenados son arbitrarios. Los problemas de definir los ejes locales y sus cosenos directores son por tanto más complicados que en el sencillo ejemplo anterior. La mejor manera de resolver el problema es emplear las propiedades del álgebra vectorial, y para el lector que pueda necesitarlo se incluye un breve resumen de sus bases esenciales en el Apéndice 5 del Volumen 1.

Una de las direcciones de los ejes locales puede elegirse arbitrariamente, y ha de hacerse *a priori*. Tomaremos la del eje x' orientada en la dirección del lado ij del triángulo, tal como se muestra en la Figura 3.4(b).

El lado está definido por el vector $\mathbf{V}_{ij}$ y en función de las coordenadas locales se tiene

$$\mathbf{V}_{ij} = \begin{Bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

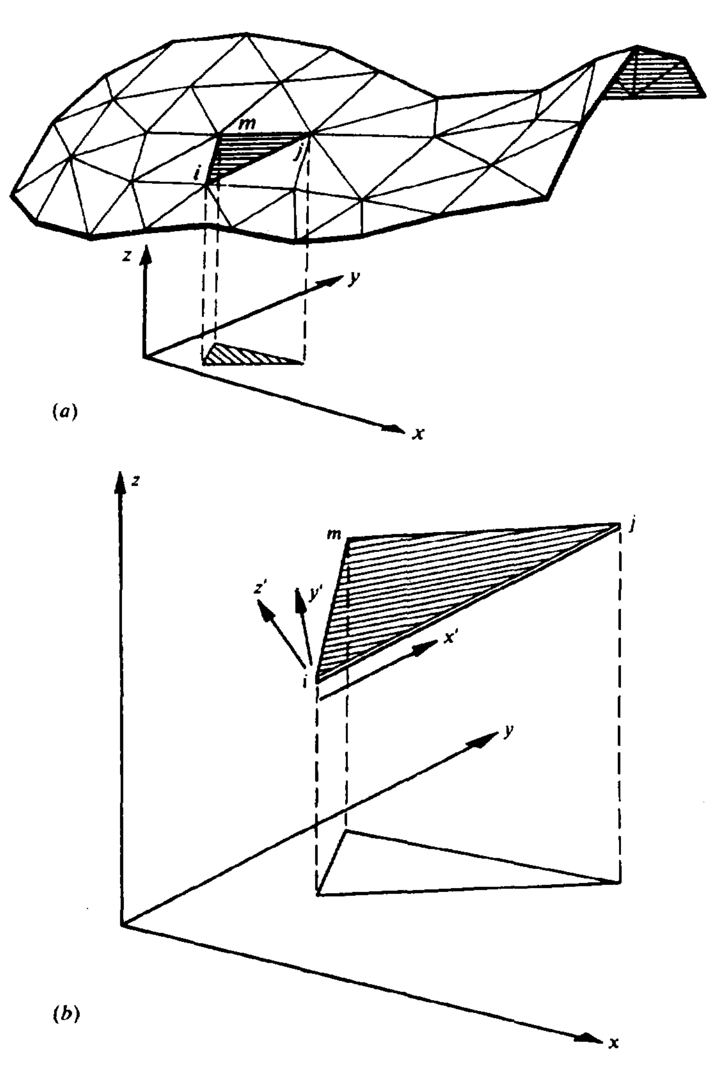


Figura 3.4 (a) Ensamblaje de elementos triangulares discretizando una lámina de forma cualquiera. (b) Coordenadas locales y globales para un elemento triangular.

Los cosenos directores se obtienen dividiendo las componentes de este vector por su longitud, o sea, definiendo un vector unitario

$$\mathbf{v}_{x'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{x'y} \\ \lambda_{x'z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_{ij}} \begin{Bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \end{Bmatrix} \tag{3.20}$$

con

$$l_{ij} = \sqrt{x_{ji}^2 + y_{ji}^2 + z_{ji}^2}$$

en la que $x_{ij} = x_j - x_i$, etc.

Es preciso ahora establecer la dirección z', que debe ser normal al plano del triángulo. Según las propiedades del producto vectorial de dos vectores, puede obtenerse dicha dirección a partir de un vector que sea el producto vectorial de los dos lados del triángulo. Por tanto

$$\mathbf{V}_{z'} = \mathbf{V}_{ij} \times \mathbf{V}_{im} = \begin{Bmatrix} y_{ji}z_{mi} & - & z_{ji}y_{mi} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

representa un vector normal al plano del triángulo cuya longitud es por definición (véase Apéndice 5 del Volumen 1) igual a dos veces el área del mismo. Así pues

$$l_{z'} = \sqrt{(y_{ji}z_{mi} - z_{ji}y_{mi})^2 + (\ldots)^2 + (\ldots)^2} = 2\Delta$$

Los cosenos directores del eje z' se identifican sencillamente con los cosenos directores de $\mathbf{V}_{z'}$, obteniéndose un vector unitario

$$\mathbf{v}_{z'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{z'x} \\ \lambda_{z'y} \\ \lambda_{z'z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} y_{ji}z_{mi} & - & z_{ji}y_{mi} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

Finalmente, los cosenos directores del eje y' se establecen de manera similar a partir de un vector normal a las direcciones y' y z'. Si se consideran en cada una de estas direcciones vectores unitarios como los definidos en (3.20) y (3.22), se tiene simplemente

$$\mathbf{v}_{y'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{y'x} \\ \lambda_{y'y} \\ \lambda_{y'z} \end{Bmatrix} = \mathbf{v}_{z'} \times \mathbf{v}_{x'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{z'y}\lambda_{x'z} & - & \lambda_{z'z}\lambda_{x'y} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \end{Bmatrix} \tag{3.23}$$

sin que tenga que dividirse por su longitud puesto que es ya un vector unitario.

Por supuesto, las operaciones vectoriales anteriores se pueden incluir en una subrutina especial en la que los productos vectoriales, normalización (o sea, la división de un vector por su longitud), etc., se ejecuten automáticamente,[39] y no es preciso entrar en los detalles de las distintas operaciones anteriores.

En lo dicho anteriormente, la dirección del eje x' se ha tomado coincidente con la de un lado del elemento. Una opción útil es definir x' por la intersección del plano del triángulo con otro paralelo a uno de los planos coordenados. Así, por ejemplo, si deseáramos que el eje x' estuviera contenido en una proyección horizontal del triángulo (o sea, una sección paralela al plano xy), podríamos proceder como sigue.

Primeramente, los cosenos directores de la normal $\mathbf{v}_{z'}$ se definen como en (3.22). La matriz de los cosenos directores de x' tiene ahora una componente nula en la dirección z. Por tanto, tenemos

$$\mathbf{v}_{x'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{x'y} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

Puesto que el vector es de longitud unidad

$$\lambda_{x'x}^2 + \lambda_{x'y}^2 = 1 \tag{3.25}$$

y como además el producto *escalar* de $\mathbf{v}_{x'}$ y $\mathbf{v}_{z'}$ tiene que ser nulo, podemos escribir

$$\lambda_{x'x}\lambda_{z'x} + \lambda_{x'y}\lambda_{z'y} = 0 \tag{3.26}$$

y estas dos ecuaciones permiten determinar $\mathbf{v}_{x'}$ unívocamente. Se llega como antes a

$$\mathbf{v}_{y'} = -\mathbf{v}_{x'} \times \mathbf{v}_{z'} \tag{3.27}$$

En el Capítulo 5 se ofrece otra posibilidad para definir el eje x' de manera unívoca.

3.5 Rigidez rotacional ficticia –ensamblaje con seis grados de libertad por nodo–

En la formulación recién descrita aparece una dificultad cuando todos los elementos que concurren en un nodo son coplanares. Ello se debe a que se asigna un valor nulo a la rigidez en la dirección θ_{zi} (Figura 3.1), y al hecho de que las ecuaciones clásicas de láminas no producen ecuaciones asociadas con dicho giro. La inclusión de este tercer giro, así como del momento flector asociado, tiene obvios beneficios para un modelo de elementos finitos, ya que entonces los desplazamientos y los giros pueden tratarse de manera sencilla utilizando las transformaciones antes presentadas.

Si en dicho punto consideramos el sistema ensamblado de las ecuaciones de equilibrio en *coordenadas locales*, se tienen seis ecuaciones, la última de las cuales (que corresponde a la dirección θ_z) es simplemente

$$0 = 0 \tag{3.28}$$

En sí misma, una ecuación de este tipo no presenta especial dificultad (aunque en algunos programas de cálculo conduce a un mensaje de error). Sin embargo, si las direcciones de las coordenadas globales difieren de las locales y es preciso efectuar una transformación de coordenadas, se obtienen seis ecuaciones aparentemente correctas que de hecho enmascaran una singularidad en ocasiones difícil de detectar.

Se presentan pues dos alternativas:

a) en los puntos donde los elementos sean coplanares, ensamblar las ecuaciones en coordenadas locales (y prescindir de la ecuación $0 = 0$), o/y

b) asignar, solamente en dichos puntos, un coeficiente de rigidez arbitrario $k'_{\theta z}$.

Esto conduce, en coordenadas locales, a reemplazar la ecuación (3.28) por

$$k'_{\theta z}\theta_{zi} = 0 \tag{3.29}$$

lo cual, tras efectuar la transformación, lleva a un sistema de ecuaciones correcto del que se obtienen, siguiendo los procedimientos usuales, todos los desplazamientos, incluyendo ahora θ_{zi}. Puesto que θ_{zi} no afecta a las tensiones, y, por supuesto, no interviene en ninguna ecuación de equilibrio, se puede asignar a $k'_{\theta z}$ cualquier valor arbitrario que hace las veces de una rigidez exterior que no afecta al resultado.

Las dos alternativas sugeridas conducen a ciertas dificultades de programación (aunque la segunda en realidad es más sencilla), y se han hecho estudios para investigar el valor real del coeficiente de rigidez correspondiente a rotaciones como la descrita, considerándolas como grados de libertad adicionales en análisis bidimensional.[20]

Estas dos alternativas conducen a ciertas dificultades en la programación (ya que es necesario identificar los nodos coplanares) y una alternativa es modificar la formulación de manera que el parámetro de giro emerja de forma natural y con significado físico. Esta opción ha recibido mucha atención recientemente[40–52] y el parámetro θ_z que se introduce así recibe el nombre de grado de libertad de "rotación en el plano". En la referencia 20 se presenta una de las primeras aplicaciones en las que se consideró este giro en el plano adicional. En la referencia 7 se utilizaron un conjunto de rigideces rotacionales en todos los elementos, ya fueran coplanares o no. Estas rigideces se definieron de manera que no se perturbara el equilibrio en ejes locales. Esto puede lograrse añadiendo a la formulación de cada elemento el término

$$\Pi^* = \Pi + \int_\Omega \alpha_n E t^n (\theta_z - \bar{\theta}_z)^2 \, d\Omega \tag{3.30}$$

en la cual α_n es un parámetro elástico ficticio y $\bar{\theta}_z$ un giro en el plano medio para cada elemento, lo que permite que el elemento satisfaga el equilibrio local en forma débil. La expresión anterior es una generalización de la técnica propuesta en la referencia 7 donde el valor de n se tomó igual a 1. Puesto que dicha expresión conducirá a una rigidez en función de los parámetros de giro, el escalado indicado permite que los valores de dicha rigidez sean proporcionales a los generados por los giros de flexión, es decir, proporcional a t^3. Los experimentos numéricos demuestran que este escalado es más insensible a la elección de α_n. En un elemento triangular la minimización con respecto a $\bar{\theta}_z$ y θ_z conduce a la expresión siguiente (tras eliminar $\bar{\theta}_z$)

$$\begin{Bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{zm} \end{Bmatrix} = \alpha_n E t^n \Delta \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ & 1 & -0.5 \\ \text{sim.} & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zm} \end{Bmatrix} \tag{3.31}$$

donde α_n es un parámetro todavía no definido. Esta rigidez adicional afecta de hecho ahora a los resultados porque aparece también en nodos que no son coplanares y claramente representa una aproximación. Sin embargo, los efectos de hacer variar α_n entre límites muy amplios son de poca importancia. Por ejemplo, en la Tabla 3.1 se dan los desplazamientos de la presa arco analizada en la referencia 3 para varios valores de α_1. En la práctica son posibles valores muy pequeños de α_n siempre que se disponga de un ordenador que acepte palabras de gran longitud[53] (ej., REAL*8 en Fortran).

TABLA 3.1
COEFICIENTE DE ROTACIÓN NODAL EN EL ANÁLISIS DE UNA PRESA[3]

α_1	1·00	0·50	0·10	0·03	0·00
desplazamiento radial (mm)	61·13	63·55	64·52	64·78	65·28

En la Figura 3.5 se muestra el análisis de una lámina esférica propuesto por McNeal y Harter como un ejemplo de prueba.[54] En este caso el problema se analizó con el elemento triangular discreto de Kirchhoff DKT combinado con el tratamiento del giro en el plano anterior. En la Tabla 3.2 se muestran los resultados para varias mallas regulares utilizando diferentes valores de α_3.

El desarrollo anterior es fácil de implementar y retiene la forma original de las interpolaciones de membrana. Para elementos triangulares

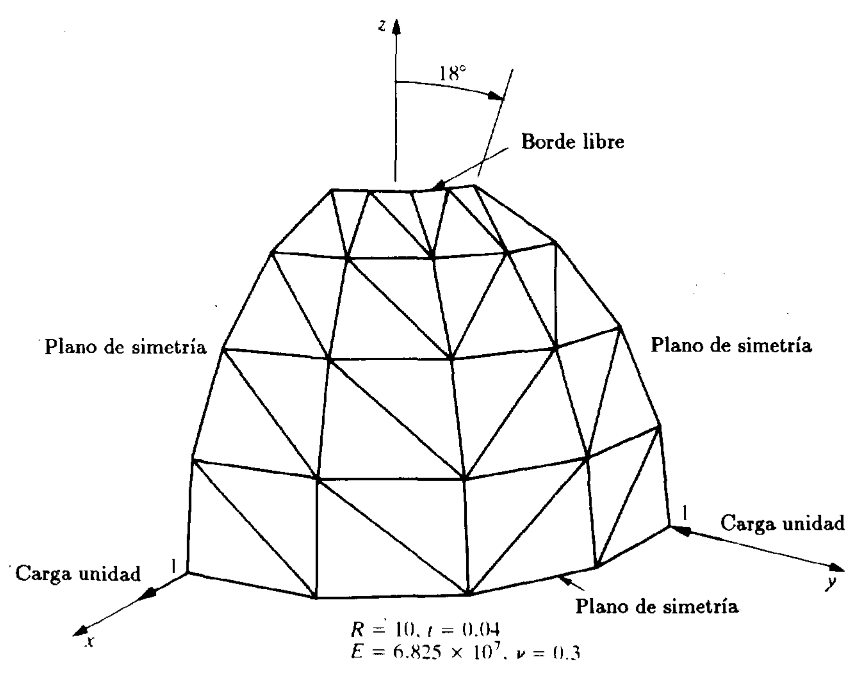


Figura 3.5 Análisis de una lámina esférica.[54]

TABLA 3.2
LÁMINA ESFÉRICA - DESPLAZAMIENTO RADIAL

	Valores de α_3					
Mallas	10.0	1.00	0.10	0.01	0.0001	0.00
4×4	0.0639	0.0919	0.0972	0.0979	0.0980	0.0980
8×8	0.0897	0.0940	0.0945	0.0946	0.0946	0.0946
16×16	0.0926	0.0929	0.0929	0.0929	0.0930	0.0930

con nodos solamente en las esquinas, la aproximación de membrana utiliza un campo de desplazamientos lineal que proporciona deformaciones constantes. La mayor parte de los elementos de flexión discutidos en los Capítulos 1 y 2 tienen deformaciones de flexión de órdenes mayores que el primero. En consecuencia, el error en los términos de membrana dominará la solución de muchos problemas de láminas. Para mejorar esta situación es necesario incrementar el orden de la aproximación. Utilizando

interpolaciones convencionales esto implica aumentar el número de nodos del elemento (ej., Capítulo 7 del Volumen 1); sin embargo, utilizando la rotación en el plano, estas interpolaciones pueden transformarse de forma que el ensamblaje involucre solamente 6 grados de libertad en cada nodo esquina. Así, expresando la interpolación cuadrática a lo largo del lado de un elemento como

$$\mathbf{u}(\xi) = N_i(\xi)\mathbf{u}_i + N_j(\xi)\mathbf{u}_j + N_k(\xi)\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_k \tag{3.32}$$

donde $\mathbf{u}_i$ son desplazamientos nodales (u_i, v_i) en el extremo del lado; lo mismo ocurre con $\mathbf{u}_j$. Por otra parte, $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_k$ son desplazamientos jerárquicos en el centro del lado (Figura 3.6).

Los parámetros de desplazamientos en el centro del lado pueden expresarse en función de sus correspondientes normal y tangencial como

$$\Delta u_k = \Delta u_n \mathbf{n} + \Delta u_t \mathbf{t} \tag{3.33}$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior y $\mathbf{t}$ es un vector tangencial unitario en la dirección del lado

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \cos v \\ \operatorname{sen} v \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen} v \\ \cos v \end{Bmatrix} \tag{3.34}$$

siendo v el ángulo que la normal al lado forma con el eje x. Las componentes normales del desplazamiento pueden expresarse en función de parámetros de rotación normal en cada extremo del lado[40,49] (suponiendo un desarrollo cúbico). Por consiguiente

$$\Delta u_n = \frac{1}{8} l_{ij}(\theta_{zj} - \theta_{zi}) \tag{3.35}$$

en donde l_{ij} es la longitud del lado ij. Esta construcción produce una interpolación en cada lado tal como

$$\mathbf{u}(\xi) = N_i(\xi)\mathbf{u}_i + N_j(\xi)\mathbf{u}_j + N_k(\xi)[\frac{1}{8} l_{ij}(\theta_{zj} - \theta_{zi})\mathbf{n} + \Delta u_t \mathbf{t}] \tag{3.36}$$

La interpolación anterior puede simplificarse haciendo cero los parámetros Δu_t. Adviértase, sin embargo, que dichos términos son beneficiosos en un elemento triangular de tres nodos. Si se utiliza el mismo convenio de signos para el desplazamiento tangencial jerárquico sobre cada lado, esta componente del desplazamiento mantiene la compatibilidad del desplazamiento total entre elementos adyacentes, incluso en presencia de plegamientos. Por ejemplo, puede escogerse un convenio de signos apropiado tal que la componente tangencial del desplazamiento sobre un lado sea positiva si

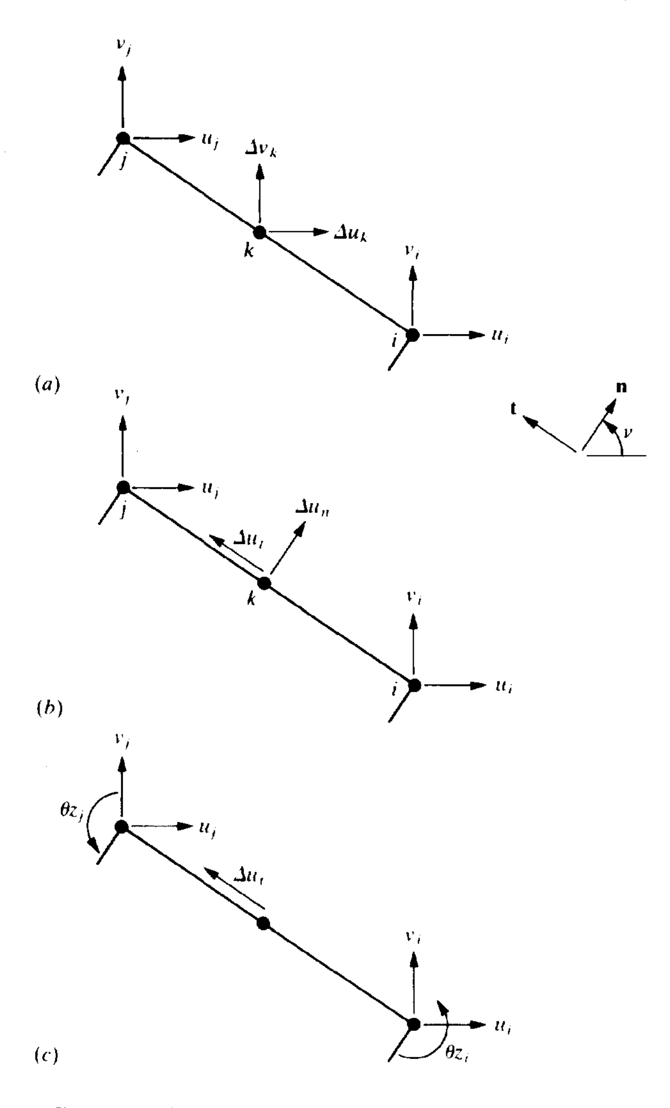


Figura 3.6 Construcción de una interpolación de los movimientos membranales con parámetros de rotación en el plano.

va dirigida en el sentido de la numeración creciente de los nodos esquina correspondientes a dicho lado. Esta interpolación de los desplazamientos de membrana puede utilizarse para modelos irreducibles o mixtos y genera coeficientes de rigidez que incluyen términos para el giro θ_z, así como para los desplazamientos u y v. Es obvio, sin embargo, que el elemento así generado es singular (es decir, tiene nodos de energía interna nulos) ya que,

para los mismos valores de la rotación normal en los extremos del lado, la interpolación es independiente de los parámetros θ_z. Además, cuando se utiliza en láminas plegadas el elemento no está libre de errores en el equilibrio local. Este defecto puede eliminarse utilizando la técnica propuesta en la Ec. (3.30), tal y como explican Jetteur[50] y Taylor[51] en el desarrollo de un elemento de lámina cuadrilátero.

Reissner[55] propuso una formulación del problema de tensión plana que incluye los efectos de un campo de rotaciones en el plano. Esta técnica se aplicó en el contexto de los elementos finitos por Hughes y Brezzi.[47] La formulación variacional para el problema membranal puede expresarse como (ver Ec. (2.29) del Volumen 1)

$$\Pi_d(\mathbf{u}, \theta_z, \tau) = \int_\Omega \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega + \int_\Omega \tau^T (\omega_{xy} - \theta_z) \, d\Omega \qquad (3.37)$$

donde τ es una componente de tensión *antisimétrica* y ω_{xy} es la componente rotacional del gradiente de desplazamientos que para el problema plano se escribe como

$$\omega_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3.38)$$

Además de los términos que se muestran en la Ec. (3.37), deben añadirse términos asociados con las deformaciones y tensiones iniciales, así como con cargas de superficie y de volumen, tal y como se explica para el caso general discutido en el Capítulo 2 del Volumen 1.

La variación de (3.37) con respecto a τ proporciona la condición de que ω_{xy} coincide con la rotación θ_z. Asimismo, la variación con respecto a θ_z da que la tensión τ debe ser nula. Por tanto, las ecuaciones generales a partir de (3.37) son las del problema de membrana convencional, pero incluyen el campo de rotaciones normales. Puede constituirse también una forma penalizada de las ecuaciones anteriores adecuada para aplicaciones de elementos finitos modificando (3.37) como

$$\bar{\Pi}_d = \Pi_d - \int_\Omega \frac{1}{\gamma E t} \tau^2 \, d\Omega \qquad (3.39)$$

donde γ es un número de penalización.

Es importante utilizar esta representación mixta del problema, juntamente con el test de la parcela mixto, para construir modelos de elementos finitos viables. El uso de un valor constante de τ y de una interpolación isoparamétrica de θ_z en cada elemento, junto a las interpolaciones del campo de desplazamientos definidas por (3.36), ha permitido desarrollar buenos elementos de membrana triangulares y cuadriláteros. Ibrahimbegovic *et al.*[56] muestran aplicaciones de esta clase a diferentes problemas de láminas. En la Sección 3.8 se presenta una de estas aplicaciones al análisis de una bóveda cilíndrica.

3.6 Elementos enlazados sólo por las derivadas primeras laterales

Gran parte de las dificultades que se encuentran en el ensamblaje nodal desaparecen si los elementos se elaboran de forma que únicamente se requiera la continuidad de los desplazamientos u, v y w en los nodos esquina imponiéndose la continuidad de las derivadas normales a lo largo de los lados de los elementos. Evidentemente, el ensamblaje en los vértices es ahora sencillo y la introducción de la sexta variable nodal es innecesaria. Como la rotación normal a lo largo de los lados es la misma tanto en coordenadas locales como en globales su transformación es innecesaria.

Los elementos de este tipo aparecen naturalmente en formas híbridas (véase Capítulo 13 del Volumen 1) y ya nos hemos referido a un elemento de flexión de placas de esta clase en la Sección 1.6. Este elemento, de gran sencillez, ha sido utilizado con cierto éxito por Dawe en problemas de láminas.[25] Otro elemento de esta familia, considerablemente más elaborado y complicado, ha sido deducido por Irons[26] para el cual se ha sugerido el curioso nombre de "Semiloof". Este elemento ha sido mencionado brevemente en el Capítulo 1 (página 63) y aunque su deducción está lejos de la sencillez, su comportamiento es correcto en muchos casos.

3.7 Elección de un elemento

Se dispone ahora de un gran número de formulaciones para elementos "de membrana" y de flexión, y en ambos casos se consigue la conformidad con ensamblajes planos. Evidentemente, si los elementos en que se divide la lámina no son coplanares, en general la conformidad será violada (excepto en el límite, donde se alcanzan las condiciones de lámina lisa).

Puede parecer coherente emplear desarrollos polinómicos de la misma precisión tanto para la aproximación de los efectos de membrana como para los de flexión, pero todo depende de qué acción sea la predominante. Para láminas delgadas el elemento triangular más sencillo podría ser, pues, uno que tuviera un campo lineal para los desplazamientos en su plano, y un campo cuadrático para los de flexión, aproximando así de forma constante las tensiones de flexión y en su plano. Dicho elemento ha sido empleado por Dawe[25] pero da resultados bastantes mediocres (aunque convergentes).

En los ejemplos que se muestran se emplean los elementos siguientes cuyo comportamiento es adecuado:

Elemento A. Rectángulo no conforme para los efectos de membrana (Capítulo 13 del Volumen 1, pág. 397), con cuatro nodos de vértice (ver Capítulo 1, pág. 15) para flexión. Se usó por primera vez en las referencias 8 y 9.

Elemento B. Triángulo de deformación constante con tres nodos (elemento básico del Capítulo 3 del Volumen 1), combinado con el triángulo incompatible para flexión con 9 grados de libertad (Capítulo 1, pág. 24). La utilización de este elemento con relación a las láminas aparece en las referencias 7 y 57.

Elemento C. En éste se combina un triángulo de seis nodos más consistente con deformaciones lineales con otro de 12 grados de libertad para la flexión en el que se efectúa un alisamiento de las funciones de forma. Este elemento ha sido introducido por Razzaque.[58]

Elemento D. Rectángulo de cuatro nodos con grados de libertad de rotación en el plano [Ec. (3.36) con Δu_t igual a cero] combinado con el cuadrilátero discreto de Kirchhoff.[59]

3.8 Ejemplos prácticos

El primer ejemplo que se presenta es el del análisis de una presa en arco. Para este problema particular se tomó una configuración geométrica sencilla, mostrada en la Figura 3.7, para aprovechar los resultados de experimentos con modelos y de los cálculos efectuados mediante aproximaciones numéricas disponibles.

Debido a que la forma cilíndrica sencilla lo permitía, se efectuó la división en elementos rectangulares (tipo A), aunque la línea fija de la cimentación hubo de ser aproximada de forma bastante grosera.

Se emplearon dos mallas de tamaños distintos y los resultados para desplazamientos y tensiones en la sección media se muestran en las Figuras 3.8 y 3.9, apreciándose que el uso de la malla más tupida no mejoró ostensiblemente los resultados. Esto indica que la convergencia de la aproximación física de la geometría real mediante elementos planos, como de la aproximación matemática que implica todo análisis mediante elementos finitos, es excelente. Se muestran para comparación las tensiones y desplazamientos obtenidos mediante otro método de cálculo aproximado.

Igualmente se analizó una presa bóveda utilizando elementos triangulares planos (tipo B). Los resultados muestran una aproximación aún mejor.[7]

Parekh[57] ha estudiado un gran número de casos utilizando elementos triangulares no conformes (tipo B), demostrando que para una misma malla estos elementos son generalmente superiores a su versión conforme presentada por Clough y Johnson.[6] Seguidamente se muestran algunos ejemplos de dicho análisis.

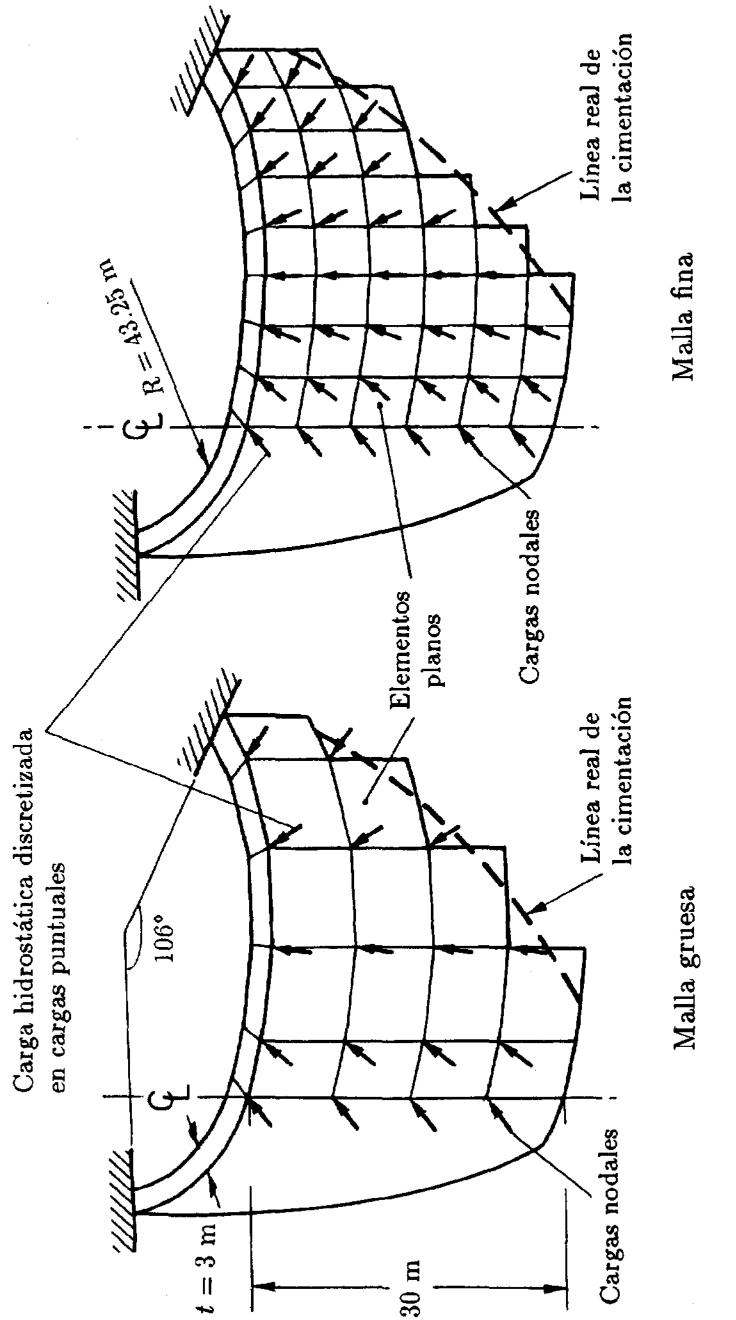


Figura 3.7 Presa en arco como ensamblaje de elementos rectangulares.

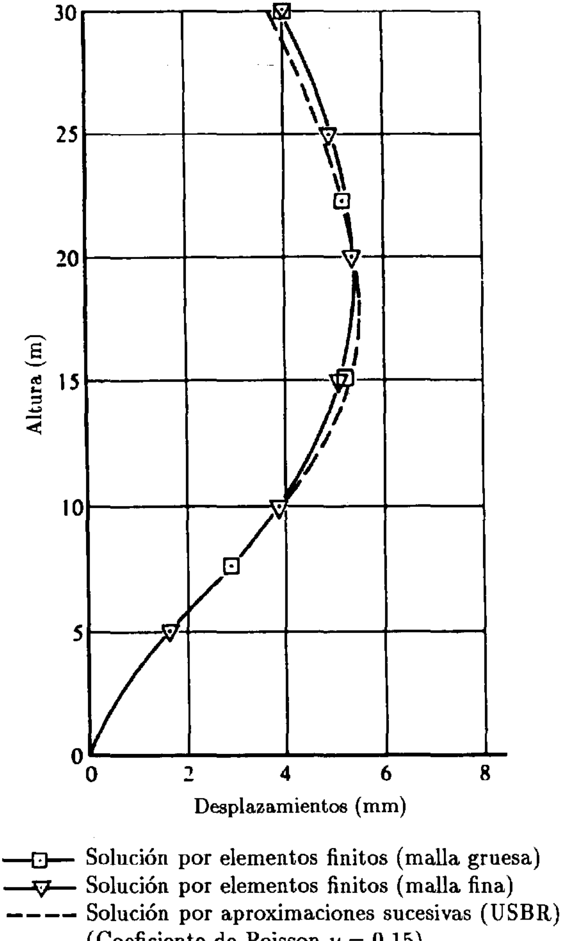


Figura 3.8 Presa en arco. Desplazamientos horizontales de la sección media.

3.8.1 *Torre de enfriamiento*. Este problema de revolución podría obviamente ser analizado de manera más eficiente mediante los procedimientos de los Capítulos 4 ó 6. Sin embargo, aquí se emplea como ejemplo general de la precisión alcanzable. Los resultados se comparan con las soluciones numéricas obtenidas por Albasiny y Martin.[60] En las Figuras 3.10 a 3.12 se muestran la geometría de la malla y algunos resultados. Se ha propuesto una carga asimétrica debida al viento.

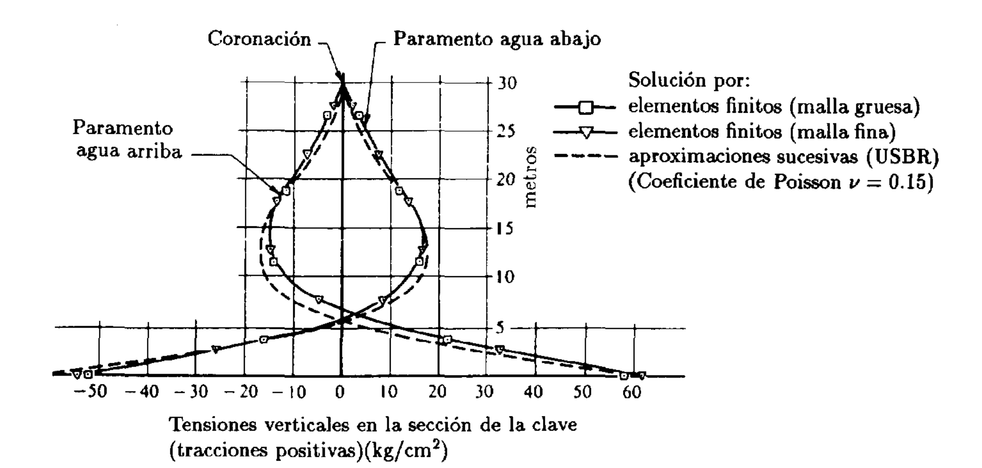


Figura 3.9 Presa en arco. Tensiones verticales en la sección media.

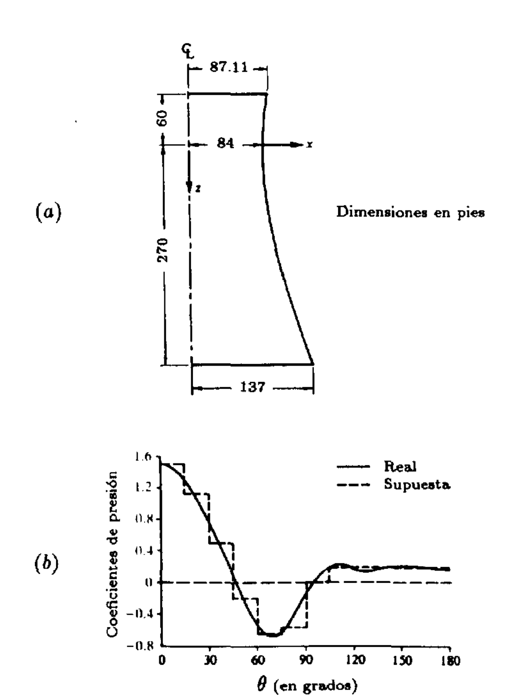


Figura 3.10 Torre de enfriamiento. Geometría y variación de la carga de presión a lo largo de una circunferencia.

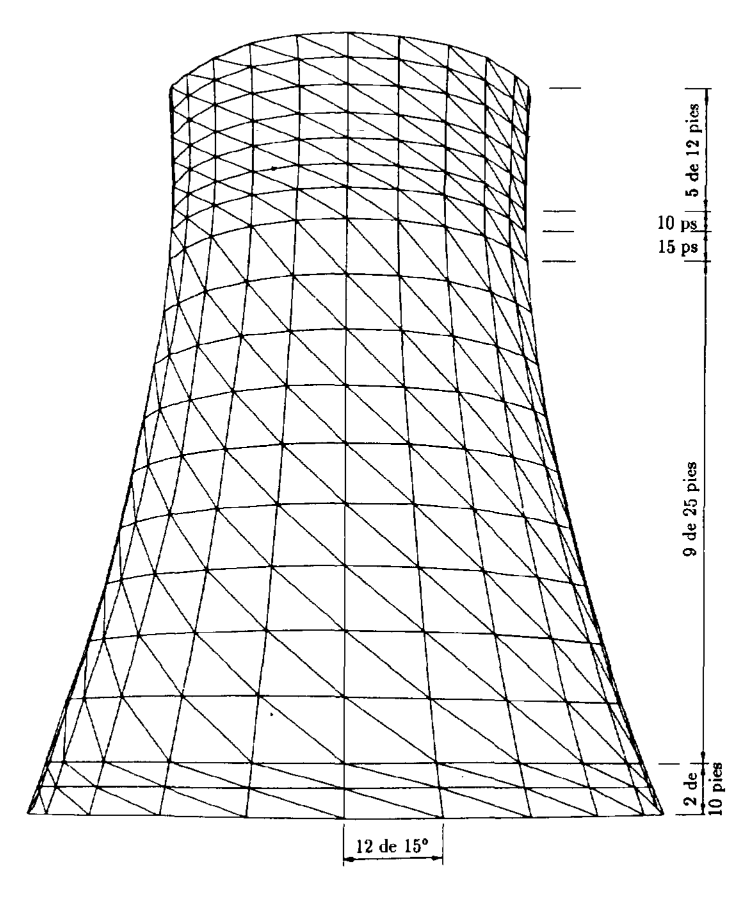
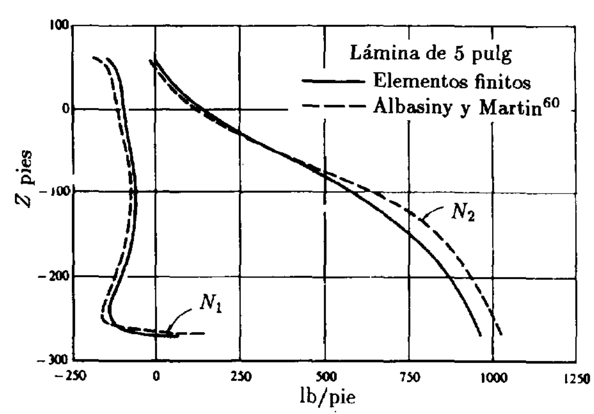
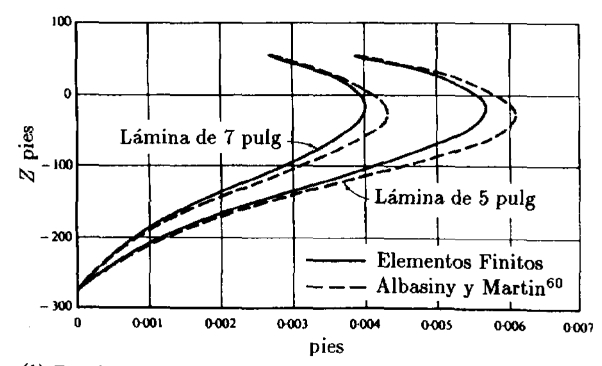


Figura 3.11 Torre de enfriamiento. Esquema de la malla.

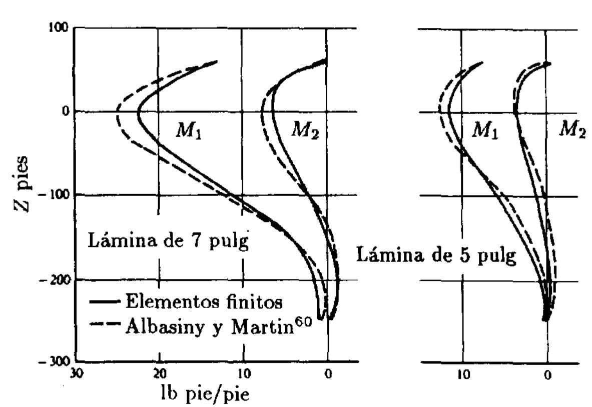
3.8.2 *Bóveda en cañón.* Este tipo de estructura laminar utilizado en ingeniería civil fue analizada mediante procedimientos convencionales por Scordelis y Lo[61] y Scordelis.[62] La bóveda está sostenida por diafragmas rígidos y sometida a su propio peso. En las Figuras 3.13 y 3.14 se comparan algunos resultados obtenidos mediante los elementos de los tipos B o C de la sección anterior. El último es evidentemente más preciso usando un número mayor de grados de libertad, y con una malla de 6×6 elementos los resultados son casi indistinguibles de los exactos. Este problema se ha convertido en clásico para comparar elementos laminares diversos y volveremos a él en el Capítulo 5. Vale la pena resaltar que sólo unos cuantos elementos curvos de segundo orden proporcionan resultados superiores a los que aquí se presentan obtenidos con elementos planos.



(*a*) Fuerza de membrana en $\theta = 0°$, N_1 = fuerzas tangenciales, N_2 = fuerza meridional

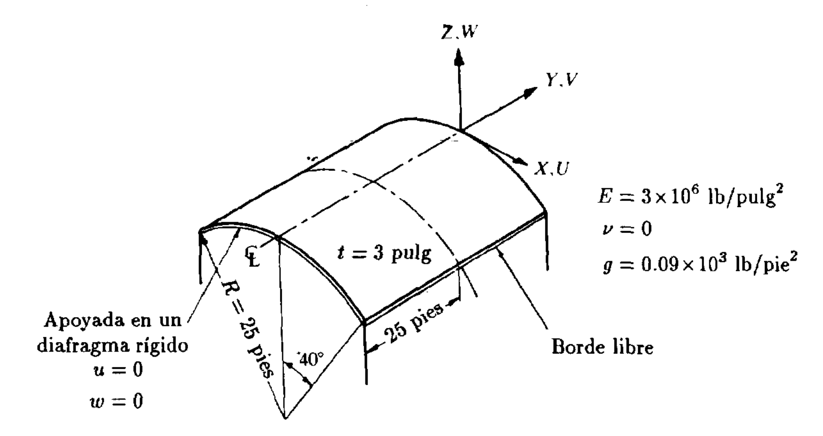


(*b*) Desplazamientos radiales para $\theta = 0°$

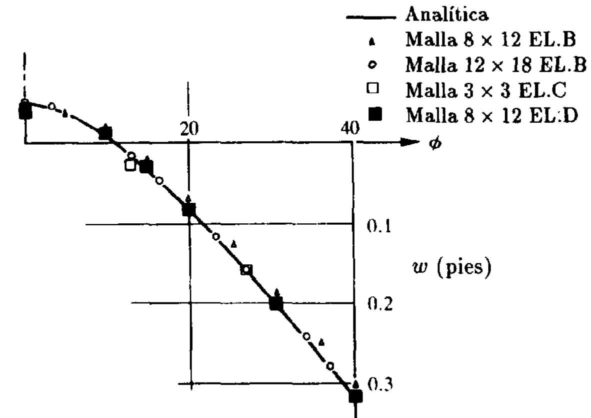


(*c*) Momentos flectores en $\theta = 0°$, M_1 = momento tangencial, M_2 = momento meridional

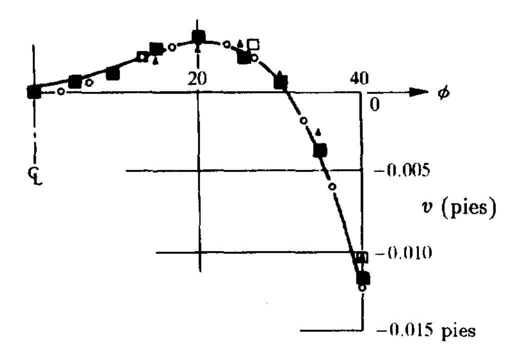
Figura 3.12 Torre de enfriamiento de la Figura 3.10.



(*a*) Soluciones exacta[39] y por elementos finitos bajo el peso propio

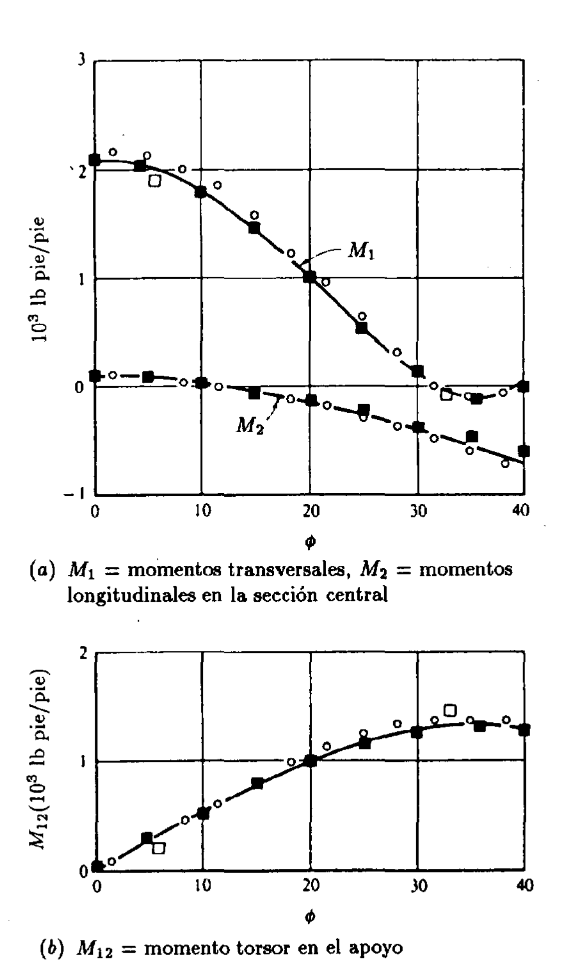


(*b*) Desplazamiento vertical de la sección central



(*c*) Desplazamiento longitudinal del apoyo

Figura 3.13 Bóveda (cilíndrica) en cañón. $E = 3 \times 10^6$ lb/pulg^2. $\nu = 0$; peso de la lámina = 90 lb/pie^2



(*a*) M_1 = momentos transversales, M_2 = momentos longitudinales en la sección central

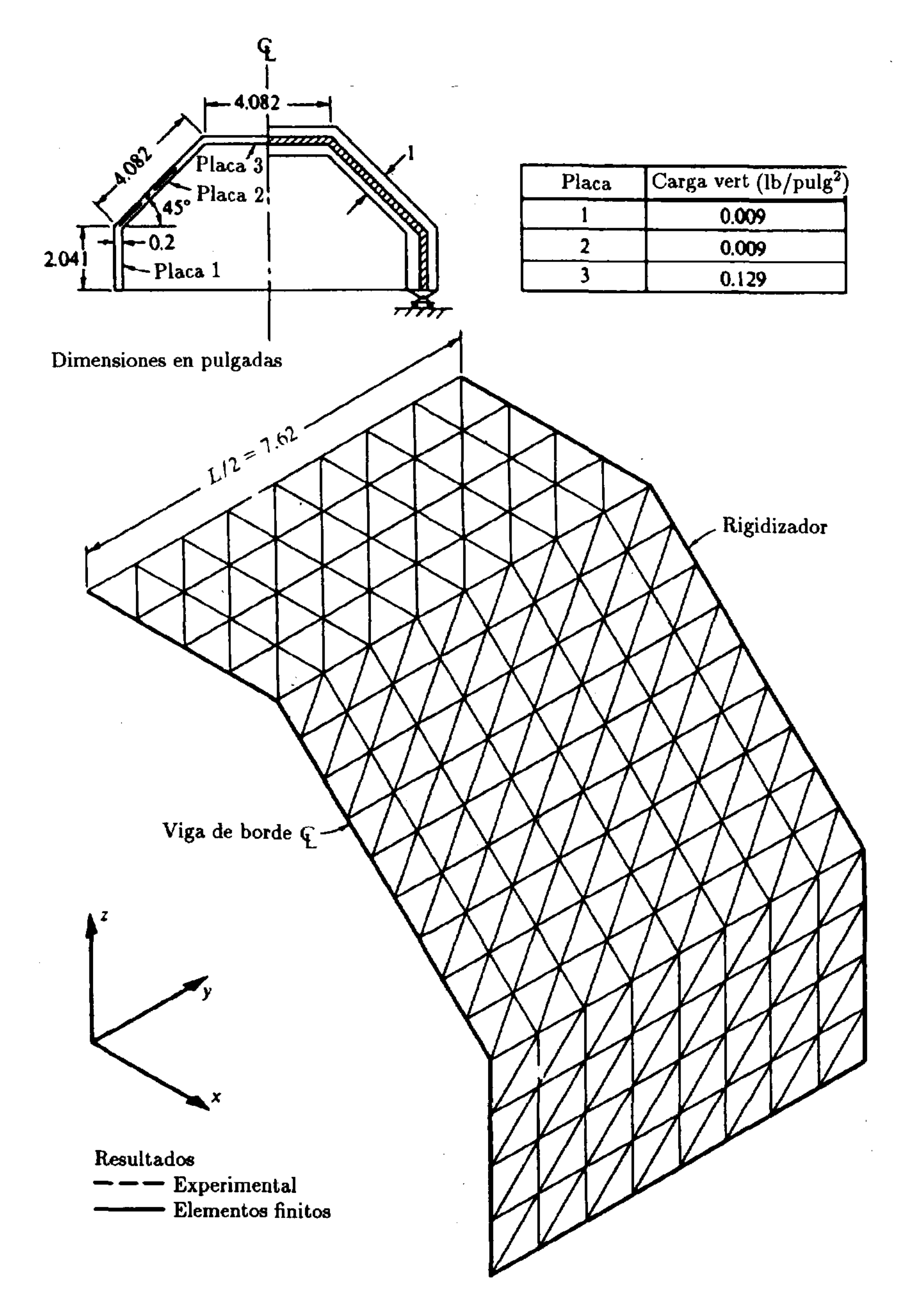
(*b*) M_{12} = momento torsor en el apoyo

Figura 3.14 Bóveda en cañón de la Figura 3.13.

3.8.3 *Estructura laminar plegada*. Puesto que no se conocen soluciones exactas de este problema, los resultados se comparan con los experimentales obtenidos por Mark y Riesa.[63]

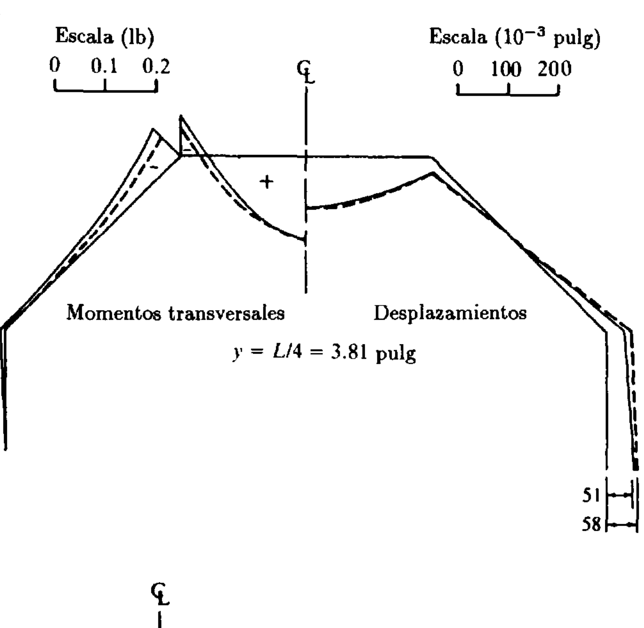
Este ejemplo muestra un caso para el cual la representación mediante elementos finitos planos es físicamente exacta. La rigidez del armazón fue también incluida en el análisis mediante los elementos de tipo viga adecuados.

Los resultados se muestran en las Figuras 3.15 y 3.16. Aplicaciones similares son de importancia considerable en el análisis de estructuras en cajón, etc.



Placa	Carga vert (lb/pulg^2)
1	0.009
2	0.009
3	0.129

Figura 3.15 Estructura laminar plegada.[63] Geometría del modelo, cargas y malla. $E = 3560$ lb/pulg^2, $\nu = 0,43$



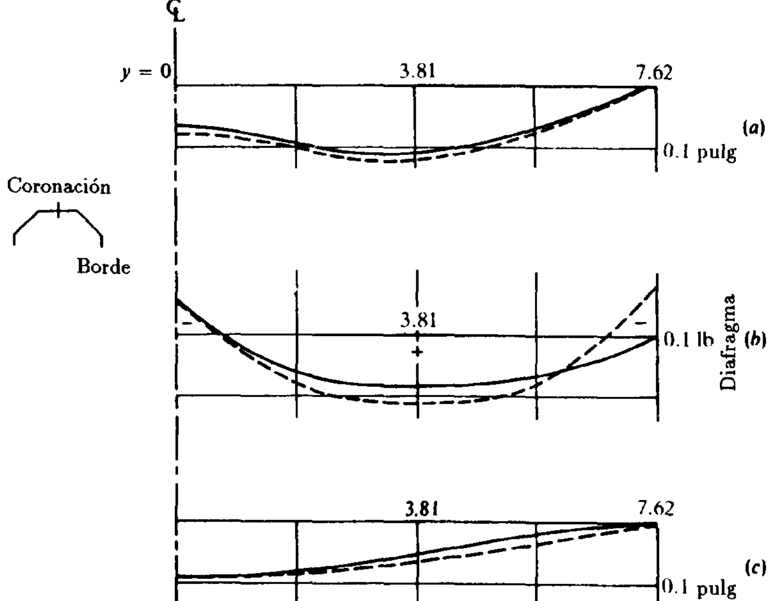


Figura 3.16 Placa plegada[40] de la Figura 3.15. Momentos y desplazamientos en la sección central. (*a*) desplazamientos verticales a lo largo de la clave; (*b*) momentos longitudinales a lo largo de la clave; (*c*) desplazamientos verticales a lo largo del borde.

Referencias

1. W. FLÜGGE, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
2. P. G. CIARLET, "Conforming finite element method for shell problem", en *The Mathematics of Finite Elements and Applications* (ed. J. Whiteman), Vol. **II**, Academic Press, London, 1977.
3. B. E. GREENE, D. R. STROME y R. C. WEIKEL, "Application of the stiffness method to the analysis of shell structures", en *Proc. Aviation Conf. Amer. Soc. Mech. Eng.*, Los Angeles, Marzo 1961.
4. R. W. CLOUGH y J. L. TOCHER, "Analysis of thin arch dams by the finite element method", *Proc. Symp. on Theory of Arch Dams*, Southampton University, 1964, Pergamonn Press, Oxford, 1965.
5. J.H. ARGYRIS, "Matrix displacement analysis of anisotropic shells by triangular elements", *J. Roy. Aero. Soc.*, **69**, 801–5, 1965.
6. R.W. CLOUGH y C.P. JOHNSON, "A finite element approximation for the analysis of thin shells", *J. Solids Struct.*, **4**, 43–60, 1968.
7. O.C. ZIENKIEWICZ, C.J. PAREKH y I.P. KING, "Arch dams analysed by a linear finite element shell solution program", en *Proc. Symp. on Arch Dams*, Institution of Civil Engineers, London, 1968.
8. O.C.ZIENKIEWICZ y Y.K.CHEUNG, "Finite element procedures in the solution of plate and shell problems", Capítulo 8 de *Stress Analysis* (eds. O.C.Zienkiewicz y G.S.Holister), Wiley, Chichester, 1965.
9. O.C. ZIENKIEWICZ y Y. K. CHEUNG, "Finite element methods of analysis for arch dam shells and comparison with finite difference procedures", en *Proc. Symp. on Theory of Arch Dams*, Southampton University, 1964, Pergamon Press, Oxford, 1965.
10. R.H. GALLAGHER, "Shell elements", en *World Conf. on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, Bournemouth, 1975.
11. D. J. DAWE, "Rigid-body motions and strain-displacement equations of curved shell finite elements", *Int. J. Mech. Sci.*, **14**, 569–78, 1972.
12. G. CANTIN, "Strain-displacemente relationships for cylindrical shells", *J.A.I.A.A.*, **6**, 1787–8, 1968.
13. D.G.ASHWELL, "Strain elements with applications to arches, rings and cylindrical shells", en *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members* (eds. D.G.Ashwell y R.H.Gallagher), Wiley, Chichester, 1976.
14. F.K. BOGNER, R.L. FOX y L.A. SCHMIT, "A cylindrical shell element", *J.A.I.A.A.*, **5**, 745–50, 1967.
15. G. CANTIN y R.W. CLOUGH, "A refined curved cylindrical shell element", *J.A.I.A.A.* Conf. paper 68–176, New York, 1968.
16. G. BONNEW, G. DHATT, Y. M. GIROUX y L. P. A. ROBICHAUD, "Curved triangular elements for analysis of shells", en *Proc. 2nd. Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech.*, Air Force Inst. Tech., Wright-

Patterson AF Base, Ohio, 1968.
17. G.E. STRICKLAND y W.A. LODEN, "A doubly curved triangular shell element", en *Proc. 2nd. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech.*, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1968.
18. B.E. GREENE, R.E. JONES y D.R. STROME, "Dynamic analysis of shells using doubly curved finite elements", en *Proc. 2nd. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1968.
19. J. CONNOR y C. BREBBIA, "Stiffness matrix for shallow rectangular shell element", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **93**, EM1, 43–65, 1967.
20. A.J. CARR, *A refined element analysis of thin shell structures including dynamic loading*, SEL report 67–9, Univ. of California, Berkeley, 1967.
21. G.R. COWPER, G.M. LINDBERG, y M.D. OLSON, "A shallow shell finite element of triangular shape", *Int. J. Solids Struct.*, **6**, 1133–56, 1970.
22. S. UTKU, "Stifness matrices for thin triangular elements of non-zero Gaussian curvature", *J.A.I. A.A.*, **5**, 1659–67, 1967.
23. S. AHMAD, "Curved finite elements in the analysis of solids, shell and plate structures", *Ph.D. thesis*, Univ. of Wales, Swansea, 1969.
24. S.W. KEY y Z.E. BEISINGER, "The analysis of thin shells by the finite element method", en *High Speed Computing of Elastic Structures*, Vol. 1, 209–52, Univ. of Liége Press, 1971.
25. D.J. DAWE, *The analysis of thin shells using a facet element*, CEGB report RD/B/N2038, Berkeley Nuclear Lab., England, 1971.
26. B.M. IRONS, "The semi-loof shell element", en *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members* (eds. D.G. Ashwell y R.H. Gallagher), Capítulo 11, 197–222, Wiley, Chichester, 1976.
27. D.G. ASHWELL y A. SABIR, "A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions", *Int. J. Mech. Sci.*, **4**, 37–47, 1973.
28. G.R. THOMAS y R. H. GALLAGHER, *A triangular thin shell finite element: linear analysis*, NASA report CR-2582, 1975.
29. G. DUPUIS y J.J. GÖEL, "A curved finite element for thin elastic shells", *Int. J. Solids Struct.*, **6**, 987–96, 1970.
30. N. CARPENTER, H. STOLARSKI y T. BELYTSCHKO, "A flat triangular shell element with improved membrane interpolation", *Comm. Appl. Num. Meth.*, **1**, 161–8, 1985.
31. C. PRATT, "Shell finite element via Reissner's principle", *Int. J. Solids Struct.*, **5**, 1119–33, 1969.
32. J.CONNOR y G. WILL, "A mixed finite element shallow shell formulation", en *Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design* (eds. R.H. Gallagher *et al.*), pp. 105–37, Univ. of Alabama Press, 1969.

33. L.R. HERRMANN y W.E. MASON, "Mixed formulations for finite element shell analysis", en *Conf. on Computer-Oriented Analysis of Shell Structures*, paper AFFDL-TR-71-79, Junio 1971.
34. G. EDWARDS y J.J. WEBSTER, "Hybrid cylindrical shell elements", en *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members* (eds. D. Ashwell y R. Gallagher), Wiley, Chichester, 1976.
35. H. STOLARSKI y T. BELYTSCHKO, "Membrane locking and reduced integration for curved elements", *J. Appl. Mech.*, **49**, 172–6, 1982.
36. Ph. JETTEUR y F. FREY, "A four node Marguerre element for nonlinear shell analysis", *Eng. Comp.*, **3**, 276–82, 1986.
37. J.C. SIMO y D.D. FOX, "On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **72**, 267–304, 1989.
38. J.C. SIMO, D.D. FOX y M.S. RIFAI, "On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; computational aspects", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **73**, 53–92, 1989.
39. S. AHMAD, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "A simple matrix-vector handling scheme for three-dimensional and shell analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2**, 509–22, 1970.
40. D.J. ALLMAN, "A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis", *Comp. Struct.*, **19**, 1–8, 1984.
41. D.J. ALLMAN, "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **26**, 717–30, 1988.
42. D.J. ALLMAN, "Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations", *Int. J. Mum. Meth. Eng.*, **26**, 2645–55, 1988.
43. P.G. BERGAN y C.A. FELIPPA, "A triangular membrane element with rotational degrees of freedom", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **50**, 25–69, 1985.
44. P.G. BERGAN y C.A. FELIPPA, "Efficient implementation of a triangular membrane element with drilling freedoms", en *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures* (eds. T.J.R. Hughes y E. Hinton), Vol. 1, 128–52, Pineridge Press, Swansea, 1986.
45. R.D. COOK, "On the Allman triangle and a related quadrilateral element", *Comp. Struct.*, **2**, 1065–7, 1986.
46. R.D. COOK, "A plane hybrid element with rotational d.o.f. and adjustable stiffness", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, 1499–508, 1987.
47. T.J.R. HUGHES y F. BREZZI, "On drilling degrees-of-fredom", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **72**, 105–21, 1989.

48. T.J.R. HUGHES, F. BREZZI, A. MASUD y I. HARARI, "Finite elements with drilling degrees-of-freedom: theory and numerical evaluations", 1989 (En imprenta).
49. R.L. TAYLOR y J.C. SIMO, "Bending and membrane elements for analysis of thick and thin shells", en *Proc. NUMETA 85 Conf.* (eds G.N.Pande y J.Middleton), Vol 1, 587–91, A.A. Balkema, Rotterdam, 1985.
50. Ph. JETTEUR, "Improvement of the quadrilateral JET shell element for a particular class of shell problems", IREM internal report 87/1, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Febrero 1987.
51. R.L. TAYLOR, "Finite element analysis of linear shell problems", en *The Mathematics of Finite Elements and Applications* (ed J.R. Whiteman), Vol. VI, 191–205, Academic Press, London, 1988.
52. R.H. MACNEAL y R.L. HARTER, "A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom", *Comp. Struct.*, **28**, 75–88, 1988.
53. R.W. CLOUGH y E.L. WILSON, "Dynamic finite element analysis of arbitrary thin shells", *Comp. Struct.*, **1**, 33–56, 1971.
54. R.H. MACNEAL y R.L. HARTER, "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy", *J. Finite Elements in Anal. Des.*, **1**, 3–20, 1985.
55. E. REISSNER, "A note on variational theorems in elasticity", *Int. J. Solids Struct.*, **1**, 93–5, 1965.
56. A. IBRAHIMBEGOVIC, R.L. TAYLOR y E.L. WILSON, "A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **30**, 445–57, 1990.
57. C.J. PAREKH, "Finite element solution system", Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1969.
58. A. RAZZAQUE, "Finite element analysis of plates and shells", Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1972.
59. J-L. BATOZ y M.B. TAHAR, "Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **18**, 1655–77, 1982.
60. E.L. ALBASINY y D.W. MARTIN, "Bending and membrane equilibrium in cooling towers", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **93**, EM3, 1–17, 1967.
61. A.C. SCORDELIS y K. S. LO, "Computer analysis of cylindrical shells", *J. Am. Concr. Inst.*, **61**, 539–61, 1964.
62. A.C. SCORDELIS, "Analysis of cylindrical shells and folded plates", en *Concrete Thin Shells*, American Concrete Inst. report SP 28-N, 1971.
63. R. MARK y J.D. RIESA, "Photoelastic analysis of folded plate structures", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **93**, EM4, 79–83, 1967.

Capítulo 4

LÁMINAS DE REVOLUCIÓN

4.1 Introducción

La importancia práctica del problema de las láminas de revolución justifica suficientemente dedicar este capítulo a los métodos particulares que tratan de su solución.

Si bien es obvio que el método general descrito en el capítulo precedente es aplicable a este caso, veremos que al tener en cuenta la simetría axial se simplifica considerablemente el problema. En particular, veremos que si las cargas actuantes presentan la misma simetría de revolución que la lámina, los elementos se hacen "unidimensionales". Éste es el tipo de elemento más sencillo, al cual no se ha prestado mucha atención en los capítulos anteriores.

La primera tentativa de solución a problemas de láminas de revolución mediante elementos finitos se debe a Grafton y Strome.[1] En ella, los elementos eran simples troncos de cono y se seguía un método directo de aproximación por medio de funciones de desplazamientos. Popov *et al.*[2] y Jones y Strome[3] afinaron la obtención de las rigideces de los elementos; la extensión al caso de cargas asimétricas, que fue sugerida por Grafton y Strome,[1] fue elaborada por Percy *et al.*,[4] Klein[5] y por otros investigadores.[6,7]

Más recientemente se ha trabajado con intensidad para extender los procedimientos a los elementos curvos y por supuesto para depurar la precisión. Las publicaciones sobre el tema son considerables, debido sin duda al interés en los vuelos espaciales, siendo prácticamente imposible ofrecer una bibliografía completa. En las referencias 8 a 16 se muestra cómo pueden introducirse en el análisis coordenadas curvilíneas de diversos tipos, mientras que en las 11 y 13 se discute el empleo de grados de libertad anodales adicionales para mejorar la precisión. La formulación mixta (Capítulo 12 del Volumen 1) se ha encontrado de alguna utilidad para este caso.[17] Este tema ha sido revisado exhaustivamente por Gallagher[18,19] y por otros,[20] y puede encontrarse una bibliografía muy completa sobre el mismo.

En las láminas de revolución, al igual que en todas las láminas, se

presentan fuerzas tanto de flexión como fuerzas "en el plano" o "de membrana". Estas se definirán de forma única en función de las "deformaciones" generalizadas, que comprenden ahora alargamientos y curvaturas de la superficie media. Si se conoce el desplazamiento de cada punto de la superficie media, estas "deformaciones" y las resultantes de tensiones internas pueden definirse a partir de las fórmulas proporcionadas por los textos clásicos de la teoría de láminas.

Por ejemplo, en una lámina de revolución sometida a una carga de revolución, como se muestra en la Figura 4.1, el desplazamiento de un punto de la superficie media está perfectamente definido por dos componentes u y w en las direcciones tangencial y normal, respectivamente.

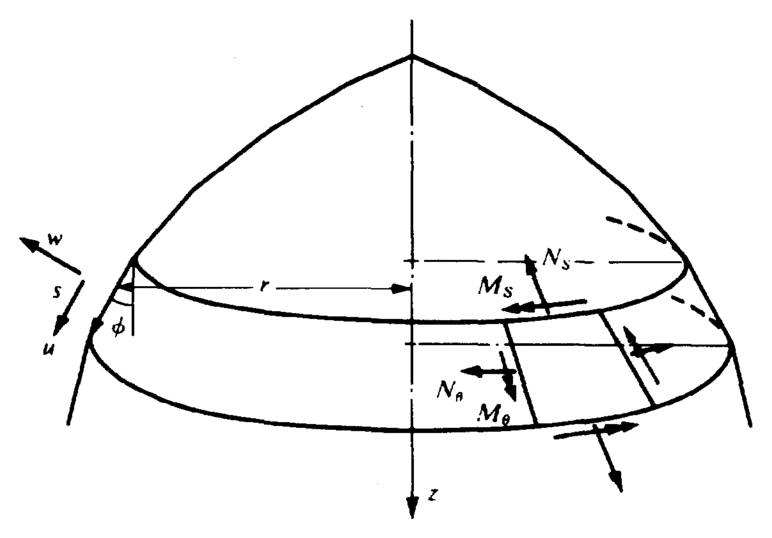


Figura 4.1 Lámina de revolución, carga, desplazamiento y resultantes de tensión. La lámina se representa como conjunto de troncos de cono.

Las cuatro componentes de la deformación vienen dadas por la expresión siguiente, utilizando la hipótesis de Kirchhoff-Love, donde se supone que el ángulo ϕ es constante (es decir, los elementos son rectos)[21–23]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/ds \\ (w\cos\phi + u \text{ sen } \phi)/r \\ -d^2w/ds^2 \\ -(\text{ sen } \phi/r)(dw/ds) \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

De aquí resultan las cuatro resultantes de las tensiones internas representadas en la Figura 4.1 y relacionadas con las deformaciones a través de una matriz de elasticidad $\mathbf{D}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.2}$$

Para una lámina isótropa la matriz $\mathbf{D}$ tiene la expresión siguiente

$$\mathbf{D} = \frac{Et}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/12 & \nu t^2/12 \\ 0 & 0 & \nu t^2/12 & t^2/12 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

siendo su parte superior una matriz de rigidez para tensión plana, y la inferior una matriz de rigidez para flexión; se ha prescindido en ambas de los términos debidos al esfuerzo constante, ya que se suponen condiciones de lámina "delgada".

4.2 Propiedades del elemento. Cargas de revolución. Elementos *rectilíneos*

Dividamos la lámina por medio de líneas nodales en una serie de troncos de cono, tal como se muestra en la Figura 4.2. Las deformaciones del elemento deben estar definidas únicamente por los desplazamientos nodales de puntos tales como el i y el j, a través de funciones de forma apropiadas.

En cada nodo se definirá un desplazamiento radial, un desplazamiento axial y un giro. Es necesario definir estas tres componentes ya que la lámina puede estar sometida a momentos de flexión. El desplazamiento de un nodo i puede así definirse por tres componentes, estando las dos primeras referidas al sistema de referencia global

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

El elemento más simple de dos nodos, i y j, tiene por tanto seis grados de libertad, determinados por los desplazamientos del elemento

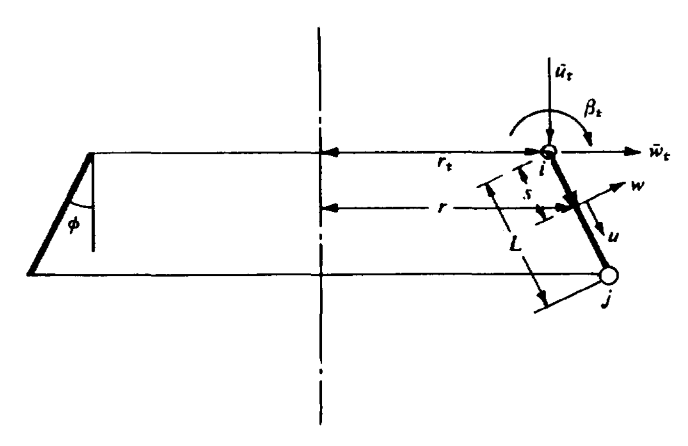


Figura 4.2 Un elemento de una lámina de revolución.

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

Los desplazamientos de los puntos interiores del elemento han de estar perfectamente definidos por la posición s del punto y por los desplazamientos nodales $\mathbf{a}^e$, debiendo ser tales que esté garantizada la continuidad de los desplazamientos y de los giros.

Así pues, en coordenadas locales tenemos

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a}^e \tag{4.6}$$

Si representamos u mediante una función lineal de s, y w mediante una de tercer grado, se tendrán seis constantes indeterminadas que pueden calcularse a partir de los valores nodales de $\bar{u}$, $\bar{w}$ y β.

En el nodo i

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ (dw/ds)_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & +\text{sen}\,\phi & 0 \\ -\text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_i \tag{4.7}$$

Escribiendo

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 s \\ w &= \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3 \end{aligned} \tag{4.8}$$

es fácil establecer las seis condiciones requeridas y llegar a †

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1-s' & 0 & 0 & s' & 0 & 0 \\ 0 & 1-3s'^2+2s'^3 & L(s'-2s'^2+s'^3) & 0 & 3s'^2-2s'^3 & (-s'^2+s'^3)L \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ (dw/ds)_i \\ u_j \\ w_j \\ (dw/ds)_j \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

en donde

$$s' = \frac{s}{L}$$

Llamando $\mathbf{N}'$ a la anterior matriz de dimensiones 2×6, se puede escribir ahora

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{N}' \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \mathbf{a}^e = [\mathbf{N}'_i\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{N}'_j\boldsymbol{\lambda}]\mathbf{a}^e = \mathbf{N}\mathbf{a}^e \tag{4.10}$$

A partir de (4.10) es fácil obtener la matriz de deformación $\mathbf{B}$ aplicando la definición (4.1). Ello proporciona

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{B}\mathbf{a}^e = [\mathbf{B}'_i\boldsymbol{\lambda},\ \mathbf{B}'_j\boldsymbol{\lambda}]\mathbf{a}^e \tag{4.11}$$

en la cual

$$\mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} -1/L & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ (1-s')\text{sen}\phi/r & \vdots & (1-3s'^2+2s'^3)\cos\phi/r & \vdots & L(s'-2s'^2+s'^3)\cos\phi/r \\ 0 & \vdots & (6-12s')/L^2 & \vdots & (4-6s')/L \\ 0 & \vdots & (6s'-6s'^2)\text{sen}\phi/rL & \vdots & (-1+4s'-3s'^2)\text{sen}\phi/r \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

† Las funciones que aparecen son, en realidad, polinomios de Hermite de orden 0 y 1 (véase Capítulo 1, Sección 1.14).

$$\mathbf{B}'_j = \begin{bmatrix} 1/L & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ s'\text{sen}\phi/r & \vdots & (3s'^2 - 2s'^3)\cos\phi/r & \vdots & L(-s'^2 + s'^3)\cos\phi/r \\ 0 & \vdots & (-6+12s')/L^2 & \vdots & (2-6s')/L \\ 0 & \vdots & (-6s' + 6s'^2)\text{sen}\phi/rL & \vdots & (2s' - 3s'^2)\text{sen}\phi/r \end{bmatrix}$$

Disponemos ahora de todos los "ingredientes" necesarios para el cálculo de la matriz de rigidez (o de las matrices de cargas, de tensiones y de tensiones iniciales) con la ayuda de las fórmulas generales. Las integraciones necesarias se efectúan sobre el área, A, del elemento, es decir, con

$$dA = 2\pi r \; ds = 2\pi r L \; ds' \tag{4.13}$$

y variando s' de 0 a 1.

Así pues, la matriz de rigidez $\mathbf{K}$ se obtiene en coordenadas locales como

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \mathbf{B}'^T \mathbf{D} \mathbf{B}' 2\pi r L \; ds' \tag{4.14}$$

y el elemento $\mathbf{K}_{rs}$ de esta matriz, en coordenadas globales, está definido por

$$\mathbf{K}_{rs} = \boldsymbol{\lambda}^T \left(\int_0^1 \mathbf{B}'^T_r \mathbf{D} \mathbf{B}'_s r \; ds' \right) \boldsymbol{\lambda} 2\pi L \tag{4.15}$$

Antes de efectuar la integración, el radio r ha de expresarse en función de s.

Una vez más es conveniente integrar numéricamente. Grafton y Strome[1] dan una fórmula explícita de la matriz de rigidez calculada a partir de un único valor medio del integrando y utilizando una matriz $\mathbf{D}$ correspondiente a un material ortótropo. Incluso con esta aproximación grosera pueden obtenerse resultados excelentes a condición de utilizar elementos de pequeñas dimensiones.

Percy *et al.*[4] y Klein[5] efectúan una integración numérica de siete puntos y obtienen una matriz de rigidez ligeramente mejorada.

No hay que olvidar que en presencia de cargas o momentos exteriores distribuidos a lo largo de una línea, es preciso considerar su valor sobre toda la circunferencia, como ocurría en el caso de sólidos de revolución estudiado en el Capítulo 4 del Volumen 1.

4.3 Ejemplos y precisión

En el tratamiento de las láminas de revolución que aquí se presenta, la condición de continuidad se satisface siempre. Por consiguiente, para una lámina de forma poligonal habrá siempre convergencia.

El problema de la aproximación física a una lámina mediante una forma poligonal es idéntico al ya discutido en el Capítulo 3. Intuitivamente puede esperarse que exista convergencia, y efectivamente así lo demuestran numerosos ejemplos.

Cuando el estado de cargas es tal que predominan las tensiones de membrana, se han observado discrepancias en los valores de los momentos flectores, incluso para mallas bastante tupidas. Sin embargo, estas discrepancias desaparecen como siempre al disminuir el tamaño de los elementos, especialmente si se hace un muestreo correcto (consistente) (véase el Capítulo 12 del Volumen 1). Esto es necesario para eliminar la aproximación física que supone representar la lámina como un conjunto de troncos de cono.

En las Figuras 4.3 y 4.4 se muestran sendos ejemplos típicos extraídos de los trabajos de Grafton y Strome,[1] en las que puede apreciarse la notable precisión obtenida.

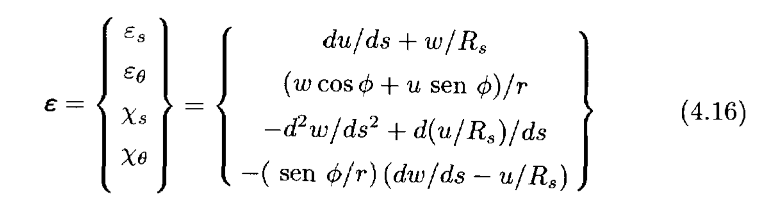
4.4 Elementos curvos y sus funciones de forma

El uso de elementos curvos se ha descrito ya en el Capítulo 8 del Volumen 1, con relación a un análisis que no hacía intervenir en la definición de las deformaciones más que las derivadas primeras. En el caso presente aparecen derivadas segundas [véase Ec. (4.1)] y ya no son aplicables algunos de los teoremas del Capítulo 8.

Ya se ha hecho mención que para el estudio de láminas de revolución se han propuesto y utilizado muchas definiciones posibles de elementos curvos.[9–12] El proceso de obtención que aquí se expone se debe a Delpak[11] y según la terminología del Capítulo 8, es del tipo subparamétrico.

La definición de los elementos curvos se basa en el hecho fundamental de que en su punto común dos elementos contiguos han de tener la misma tangente (o lo que es lo mismo, una dirección de la tangente prefijada). Esto es físicamente necesario para evitar la aparición de "pliegues" en la descripción de algo que en realidad será posiblemente una lámina de superficie tersa.

Si consideramos una lámina de revolución de forma curva, como la representada en la Figura 4.5, hemos de modificar las expresiones de la deformación dadas por (4.1) para tener en cuenta la curvatura de la lámina en el plano meridional.[21–23] Dichas deformaciones valen ahora



$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/ds + w/R_s \\ (w \cos\phi + u \text{ sen } \phi)/r \\ -d^2w/ds^2 + d(u/R_s)/ds \\ -(\text{ sen } \phi/r)(dw/ds - u/R_s) \end{Bmatrix} \tag{4.16}
$$

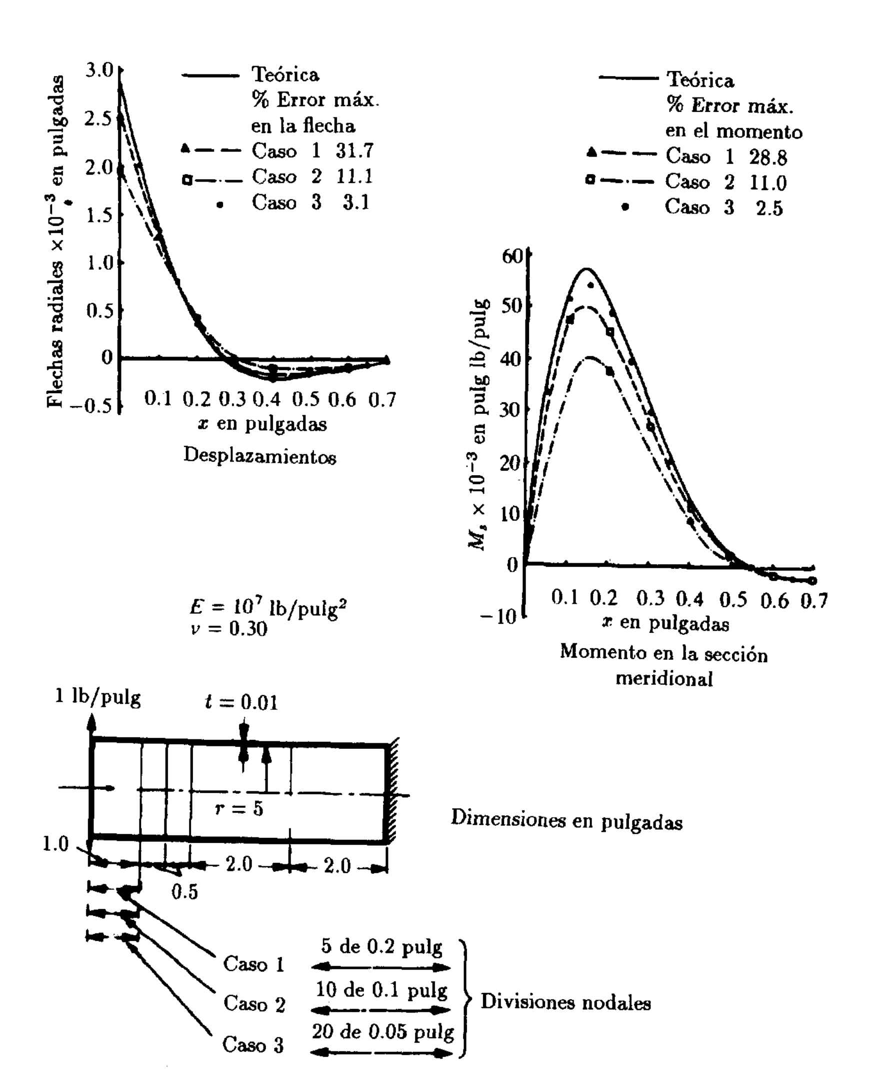


Figura 4.3 Lámina cilíndrica resuelta por elementos finitos (Grafton y Strome[1]).

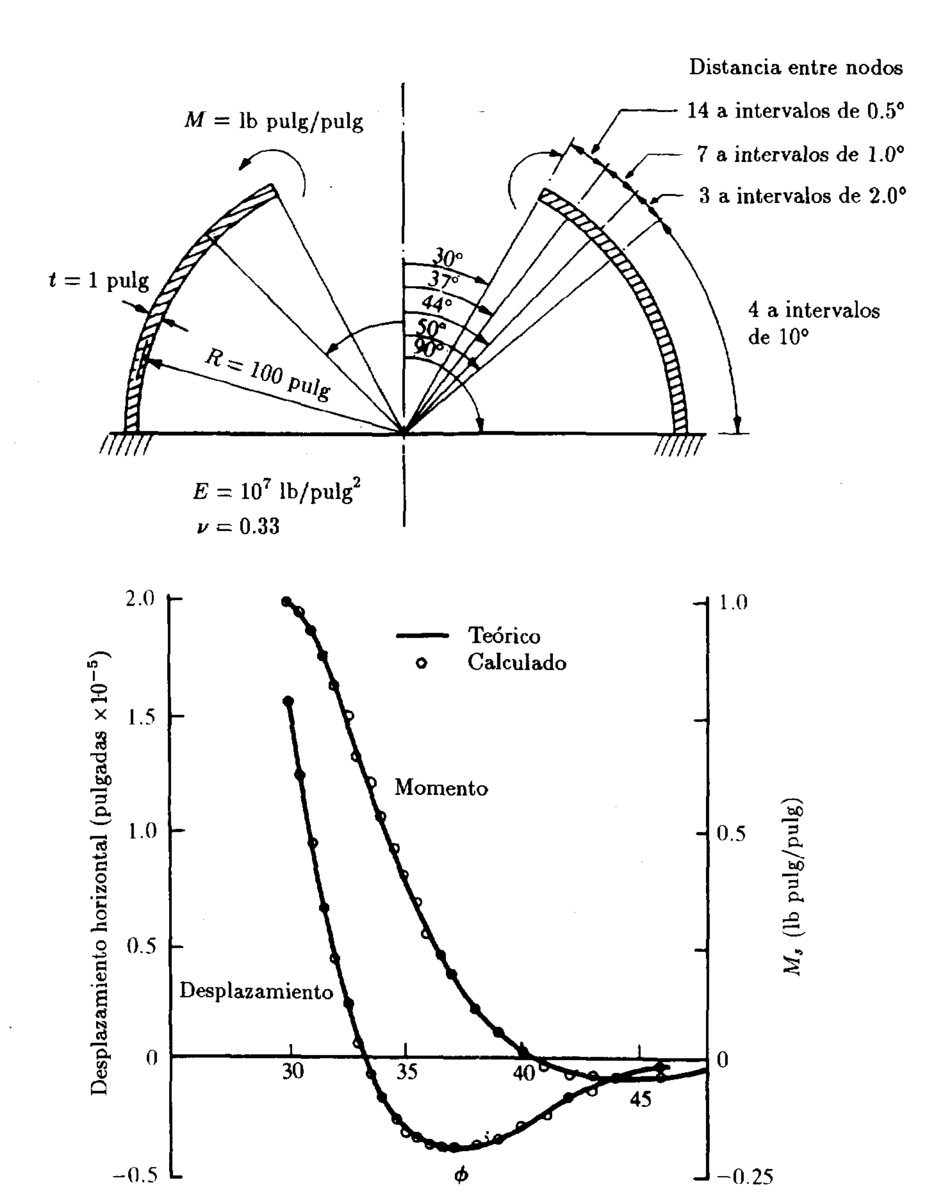


Figura 4.4 Lámina semiesférica resuelta por elementos finitos (Grafton y Strome[1]).

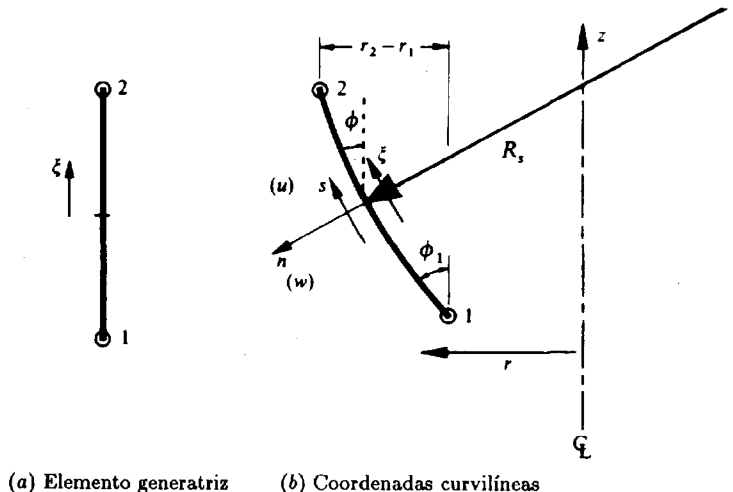


Figura 4.5 Elemento de lámina curvilíneo e isoparamétrico para problemas de revolución.

En la expresión anterior el ángulo ϕ es función de s, esto es

$$dr/ds = \text{ sen } \phi$$

R_s es el radio de curvatura principal del plano meridional, y el segundo radio de curvatura principal R_θ viene expresado por

$$R_\theta = r \cos \phi$$

El lector puede comprobar que para $R_s = \infty$ la expresión anterior coincide con (4.1).

Consideremos ahora el elemento curvo 1-2 representado en la Figura 4.5(b), y un posible elemento "generatriz" rectilíneo del mismo cuyas coordenadas $-1 \leq \xi \leq 1$ se representan en la Figura 4.5(a). Las coordenadas y las incógnitas se transforman de la forma explicada en el Capítulo 8 del Volumen 1. Dado que se desea interpolar una cantidad ψ tal que su derivada primera sea continua, podemos escribir

$$\psi = \sum_{i=1}^{2} \left[N'_i \psi_i + N''_i \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_i \right] = \mathbf{N}\mathbf{\Psi}^e \tag{4.17}$$

En esta expresión N' y N'' son funciones de forma escalares cuya representación más sencilla serán polinomios de tercer grado [similares a los utilizados en (4.9) para la variación de w].

Explícitamente, estas funciones de tercer grado pueden escribirse

$$N'_i = \frac{1}{4}\{\xi_0\xi^2 - 3\xi_0 + 2\}$$
$$N''_i = \frac{1}{4}(1-\xi_0)^2(1+\xi_0) \qquad \text{con } \xi_o = \xi_i \xi \tag{4.18}$$

Es posible ahora emplear las funciones anteriores para describir simultáneamente las variaciones de los desplazamientos globales $\bar{u}$ y $\bar{w}$† y las de las coordenadas r y z que definen la lámina (superficie media). Por supuesto que si el espesor del elemento es también variable, se le puede aplicar la misma interpolación. Dicho elemento sería entonces isoparamétrico (véase Capítulo 8 del Volumen 1). Podemos definir así la geometría como

$$r = \sum_{1}^{2} \left[N'_i r_i + N''_i \left(\frac{dr}{d\xi} \right)_i \right]$$

y

$$z = \sum_{1}^{2} \left[N'_i z_i + N''_i \left(\frac{dz}{d\xi} \right)_i \right] \tag{4.19}$$

y si pueden definirse los valores nodales asociados a estas expresiones, se tiene una relación biunívoca entre ξ y la posición de un punto de la superficie del elemento curvo [Figura 4.5(b)].

Mientras que la determinación de r_i y z_i es evidente, en los extremos sólo se conoce la pendiente

$$(\tan \phi)_i = \left(\frac{dr}{dz} \right) \tag{4.20}$$

La elección de la decisión a tomar con respecto a las derivadas que aparecen en las expresiones (4.19) depende de la *escala* que adoptemos para ξ a lo largo de la longitud de la tangente s.

† Se observará de inmediato una diferencia entre esta formulación y la precedente. Ahora, ambas componentes del desplazamiento varían a lo largo de un elemento al menos en forma cúbica, mientras que antes el desplazamiento tangencial podía variar linealmente. Sin embargo, este grado de libertad adicional no introduce en este caso una continuidad excesiva a condición de que el espesor de la lámina varíe también en forma continua.

Solamente el cociente

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_i = \frac{(dr/d\xi)_i}{(dz/d\xi)_i} \tag{4.21}$$

está definido sin ambigüedad. A $(dr/d\xi)_i$ o $(dz/d\xi)_i$ se le puede asignar un valor arbitrario. En este caso intervienen, sin embargo, consideraciones prácticas ya que la elección de un valor erróneo implicaría una relación muy irregular entre s y ξ. Efectivamente, con una mala elección la forma de la lámina puede alejarse de la forma regular inicial y formar un bucle entre los valores en los extremos.

Para obtener un espaciamiento razonablemente uniforme basta, para superficies bien acondicionadas, con la aproximación

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{\Delta r}{\Delta \xi} = \frac{r_2 - r_1}{2} \tag{4.22}$$

advirtiendo que la variación de ξ entre los puntos nodales es igual a 2.

4.5 Expresión de las deformaciones y propiedades de los elementos curvos

La variación de los desplazamientos se ha definido en el sistema global, mientras que en la expresión (4.16) las deformaciones se han expresado en función de las derivadas respecto de s de las componentes locales de los desplazamientos. Es preciso, por lo tanto, efectuar algunas transformaciones en los desplazamientos antes de que puedan determinarse las deformaciones.

Así pues, si admitimos que la variación de las componentes del desplazamiento global está definida por la función de forma (4.17) según

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sum_{i=1}^{2} \left[N_i' \bar{u}_i + N_i'' \left(\frac{d\bar{u}}{d\xi}\right)_i \right] \\ \bar{w} &= \sum_{i=1}^{2} \left[N_i' \bar{w}_i + N_i'' \left(\frac{d\bar{w}}{d\xi}\right)_i \right] \end{aligned} \tag{4.23}$$

se pueden encontrar las componentes locales u, w de este desplazamiento aplicando la fórmula de transformación (4.7), es decir

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

donde ϕ es el ángulo de la tangente a la curva con el eje z (Figura 4.5). Sin embargo, antes de proseguir es necesario expresar esta transformación en función de la coordenada ξ. Se tiene

$$\tan\phi = \frac{dr/d\xi}{dz/d\xi} \tag{4.25}$$

lo que permite eliminar ϕ utilizando (4.19).

Aún es preciso considerar si se puede imponer en los nodos la continuidad de todos los parámetros que figuran en (4.23). Evidentemente las componentes globales de los desplazamientos deben ser continuas; sin embargo, en ciertos casos ya estudiados sólo se ha impuesto la continuidad del giro de la tangente. Para este caso, normalmente permitiremos que las derivadas del desplazamiento con respecto a la abcisa curvilínea s sean continuas. Así pues, los parámetros

$$\frac{d\bar{u}}{ds} \quad \text{y} \quad \frac{d\bar{w}}{ds}$$

tomarán en los nodos un valor único. Puesto que

$$\frac{d\bar{u}}{ds} = \frac{d\bar{u}/d\xi}{ds/d\xi} \qquad \frac{d\bar{w}}{ds} = \frac{d\bar{w}/d\xi}{ds/d\xi}$$

y (4.26)

$$\frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2}$$

no existe ninguna dificultad para sustituir estas nuevas variables en (4.23) y (4.24), que ahora toman la forma siguiente:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N(\xi)]\mathbf{a}^e \qquad \text{con } \mathbf{a}_i \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ (d\bar{u}/ds)_i \\ (d\bar{w}/ds)_i \end{Bmatrix} \tag{4.27}$$

La expresión de las submatrices (2×4) es complicada pero puede determinarse explícitamente.[11] Advirtamos que el radio de curvatura R_s puede calcularse en forma explícita a partir de la forma paramétrica del elemento transformado. Podemos pues escribir

$$R_s = \frac{\left[\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{dr}{d\xi}\frac{d^2z}{d\xi^2} - \frac{dz}{d\xi}\frac{d^2r}{d\xi^2}} \tag{4.28}$$

en la que todas las derivadas se pueden obtener directamente a partir de la expresión (4.19).

Cuando hayan de estudiarse láminas con cambios bruscos de espesor, o que presenten puntos angulosos, los parámetros nodales adoptados en la Ec. (4.27) ya no son adecuados. Es preferible volver a escribirlos como

$$\mathbf{a}_i = \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_i \\ \bar{w} \\ \beta_i \\ (d\bar{u}/ds)_i \end{array} \right\} \tag{4.29}$$

donde $\beta_i = dw/ds$ es la rotación nodal, y asignar sólo a los tres primeros un valor nodal único. El cuarto es ahora un parámetro definido independientemente en cada elemento, con respecto al cual, sin embargo, se efectúa la minimización del funcional. Todas las transformaciones necesarias en las expresiones anteriores están implicadas en la expresión (4.24).

Para establecer la expresión de la matriz **B** que definía las deformaciones, se hace intervenir, como puede verse en la Ec. (4.16), a la vez las derivadas primeras y segundas con respecto a s. Si se observa que dichas derivadas pueden obtenerse mediante las reglas sencillas utilizadas ya implícitamente en (4.26), se puede escribir para una función F cualquiera

$$\frac{dF}{ds} = \frac{dF/d\xi}{ds/d\xi}$$

y

$$\frac{d^2F}{ds^2} = \frac{d^2F/d\xi^2}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2} - \frac{dF}{d\xi}\frac{d^2s/d\xi^2}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^3} \tag{4.30}$$

lo que permite establecer todas las expresiones que aparecen en la matriz **B**.

Finalmente, la matriz de rigidez se obtiene de la misma manera que en (4.14), mediante el cambio de variable

$$ds = \frac{ds}{d\xi}d\xi \tag{4.31}$$

e integrando entre los límites -1 y $+1$.

Una vez más es imposible evaluar las integrales explícitamente y es necesario acudir a la integración numérica. Como en ésta sólo interviene una variable los cálculos no consumen mucho tiempo, pudiéndose determinar la matriz de rigidez con gran precisión usando un número de puntos de Gauss adecuado.

Las matrices de tensiones y de cargas se obtienen de la misma manera.

La formulación isoparamétrica particular aquí presentada difiere poco de la expuesta en las referencias 8, 9, 10 y 12, y tiene la ventaja de que, debido a su *carácter isoparamétrico*, permite representar movimientos de sólido rígido y, por supuesto, estados para los que la primera derivada es constante. La demostración de ello es similar a la contenida en la Sección 8.5 del Capítulo 8 del Volumen 1. El hecho de que con las otras formulaciones los movimientos de sólido rígido produzcan deformaciones puede no tener consecuencias graves en algunas aplicaciones prácticas, tal como demuestran Haisler y Stricklin.[24] Sin embargo, para algunos casos de cargas sin simetría axial (véase Capítulo 6), esta imperfección puede ser un serio contratiempo pudiendo llevar a resultados muy erróneos.

Los estados de curvatura constante no se pueden obtener con ningún tipo de elemento finito de los descritos en este capítulo, y está claro que son físicamente imposibles. Cuando el tamaño del elemento disminuye, puede demostrarse que en el límite es posible obtener dicho estado de curvatura constante.

4.6 Variables anodales adicionales

La introducción de variables no ligadas a ningún nodo es particularmente útil para el estudio de las láminas de revolución, ya que permite reproducir con buena precisión formas geométricas usando elementos curvos grandes.

Así pues, añadiendo un sistema de variables internas, jerárquicas,

$$\sum_{j=1}^{n} N_j''' a_j \tag{4.32}$$

a la definición del desplazamiento normal establecida en (4.6) o (4.23), donde a_j es un sistema de parámetros interiores del elemento y N_j''' son funciones que toman, tanto ellas como sus derivadas primeras, valores nulos en los puntos nodales, se obtiene una mejor representación de los desplazamientos sin violar ninguno de los criterios de convergencia (véase Capítulo 2 del Volumen 1). En lo que concierne a los desplazamientos tangenciales no es necesario imponer la condición de derivada primera nula en los nodos.

Webster[13] emplea funciones adicionales como las mencionadas en relación con elementos rectilíneos.

Realmente, el hecho de que el elemento sea recto o curvo no importa y las funciones del tipo (4.32) se pueden, efectivamente, añadir a las definiciones de cada componente del desplazamiento dadas por las expresiones (4.23). Si estas funciones se introducen en la definición del desplazamiento

pero *no* en la de las coordenadas (4.19), el elemento se convierte en subparamétrico.† Como se explicó en el Capítulo 8 del Volumen 1, este elemento presenta las mismas ventajas que los del tipo isoparamétrico.

Aunque el campo de elección sea muy amplio, la cuestión de qué expresión adoptar para estas funciones de forma internas es de cierta importancia. Si bien ya no es necesario utilizar una expresión polinómica, Delpak[11] sí lo hace y emplea una forma especial de polinomios de Legendre (funciones jerárquicas). La forma general de estas funciones es muestra en la Figura 4.6.

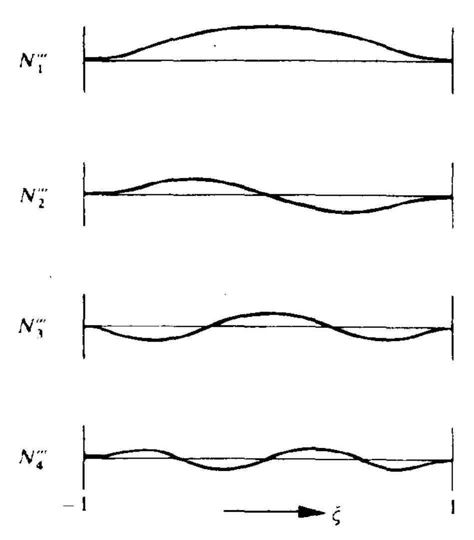


Figura 4.6 Funciones de forma internas para un elemento lineal.

En las Figuras 4.7, 4.8 y 4.9 se muestra una serie de ejemplos que ilustran las aplicaciones del elemento isoparamétrico curvilíneo de la sección anterior con parámetros internos adicionales.

En la Figura 4.7 se analiza un casquete esférico empotrado en los bordes, y los resultados se comparan con los obtenidos analíticamente en la referencia 22. Las Figuras 4.8 y 4.9 muestran, respectivamente, ejemplos más complejos. En el primero se analiza un toroide comparándose

† A pesar de que evidentemente se podría introducir la nueva función de forma en la descripción del elemento, las ventajas obtenidas haciendo esto serían mínimas, ya que un polinomio cúbico representa adecuadamente la forma real.

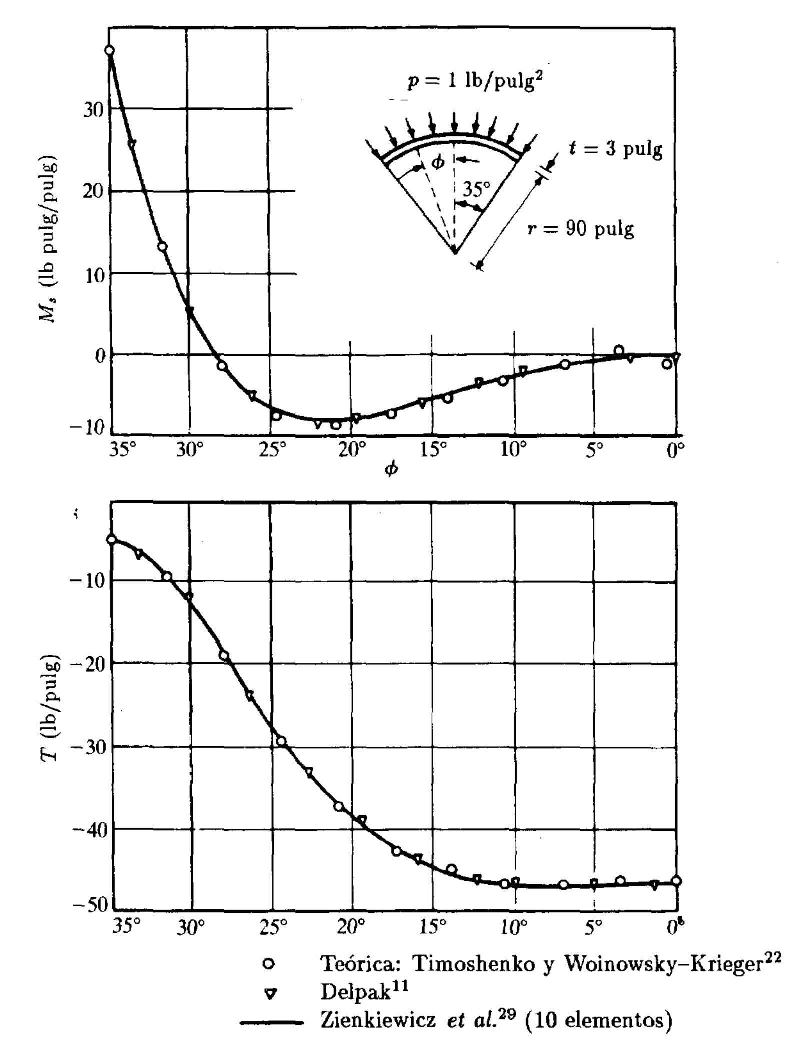
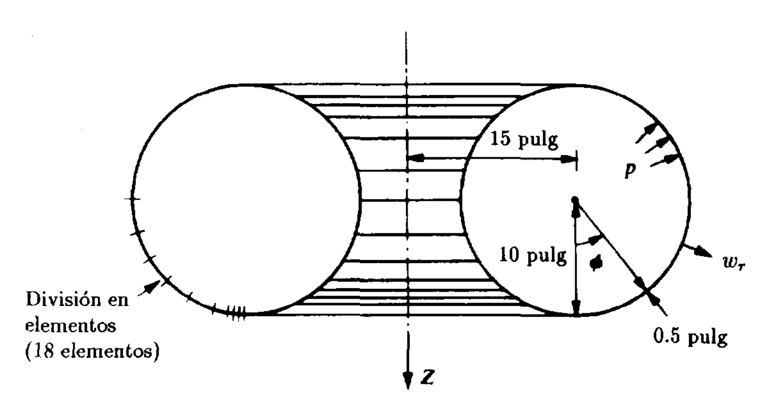
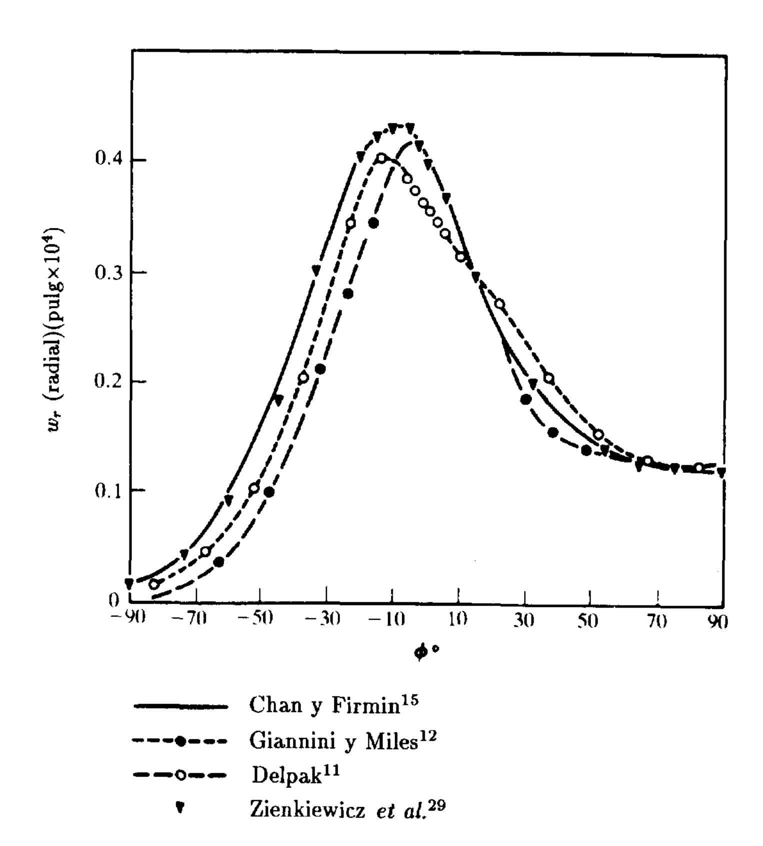


Figura 4.7 Cúpula esférica sometida a presión uniforme.

los resultados con los obtenidos mediante diferentes tipos de elementos finitos.[12,15,25,26] En el segundo caso aparecen ramificaciones en la lámina, y los resultados se comparan con los analíticos obtenidos por Krauss.[27]

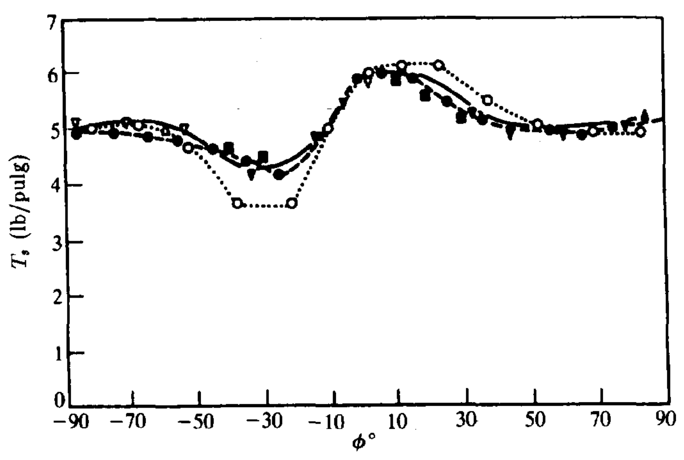


(*a*) División en elementos

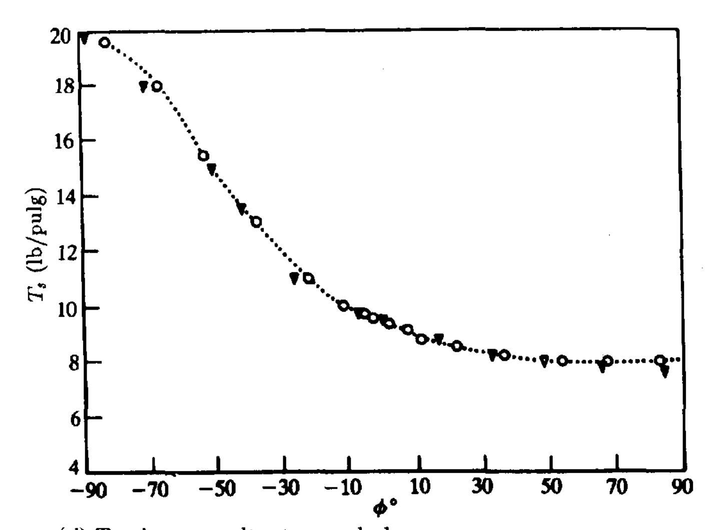


(*b*) Desplazamientos radiales

Figura 4.8 Toro sometido a presión interior.



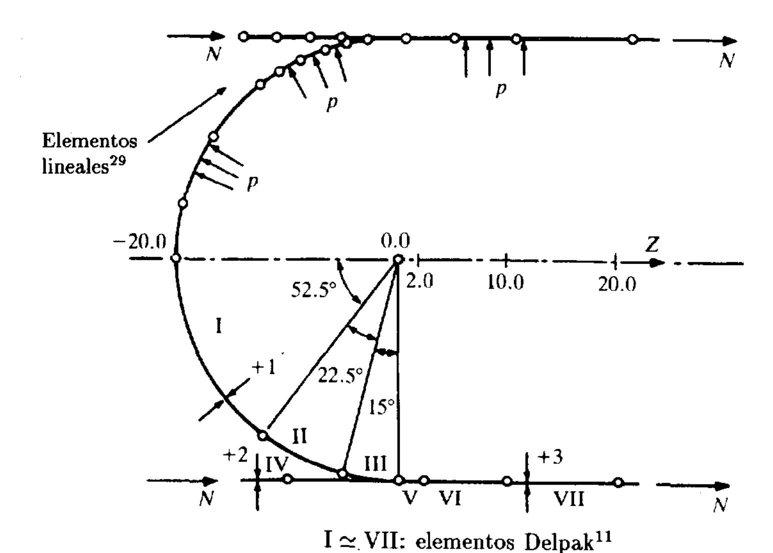
(*c*) Tensiones resultantes en el plano



(*d*) Tensiones resultantes en el plano

Chan y Firmin[15]
Giannini y Miles[12]
Delpak[11]
Zienkiewicz *et al.*[29]
Jordan[26]
Saunders y Liepins[25]

Figura 4.8 (*continuación*).



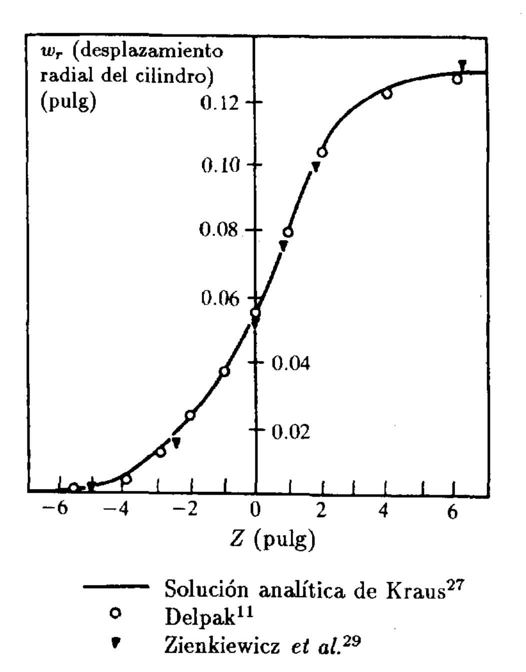


Figura 4.9 Lámina con ramificaciones.

4.7 Interpolación independiente para giros y desplazamientos mediante funciones de penalización (formulaciones para láminas delgadas y gruesas)

En el Capítulo 2 se discutió, en relación con problemas de vigas y placas, la posibilidad de interpolar independientemente los desplazamientos y los giros. Se aseguraba la continuidad introduciendo la fuerza constante como una variable *mixta* independiente, definida en el interior de cada elemento. La eliminación de la variable de cortante llevaba a una formulación tipo penalización en la que la rigidez de cortante jugaba el papel de parámetro de penalización. Se mostró allí (y también en el Capítulo 12 del Volumen 1) la equivalencia entre el número de parámetros utilizado para definir la variación de cortante y el número de puntos de integración usado para evaluar los términos de penalización en ciertos casos especiales, lo cual justificaba el éxito de los métodos de integración *reducida*. Esta equivalencia no es exacta en el caso del problema axisimétrico, en el que el radio, r, aparece en las integrales y por tanto se pueden esperar resultados ligeramente diferentes usando la forma mixta en vez de simplemente integración reducida. Las diferencias son mayores cerca del eje de rotación, y desparecen completamente cuando $r \to \infty$, donde la placa axisimétrica es equivalente a un elemento de viga.

Aunque en general el uso de la forma mixta lleva a mejores resultados, por simplicidad presentaremos aquí sólo la forma de integración reducida, dejando la anterior como ejercicio para el lector siguiendo las reglas del Capítulo 2.

En lo que sigue desarrollaremos con detalle el elemento más sencillo posible de esta clase, que es un descendiente directo de los elementos lineales de viga y de placa.[28,29]

Consideremos las expresiones (4.1) de la deformación para un elemento rectilíneo. Al aparecer en ellas la derivada segunda de w es necesario que la función de desplazamiento sea de continuidad C_1. Si sustituimos ahora

$$\frac{dw}{ds} = -\beta \tag{4.33}$$

la expresión de la deformación se convierte en

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/ds \\ (u \text{ sen } \phi + w \cos\phi)/r \\ d\beta/ds \\ (\beta \text{ sen } \phi)/r \end{Bmatrix} \tag{4.34}$$

Puesto que β puede variar independientemente, es preciso imponer una

condición de vinculación:

$$C(w,\beta) \equiv \frac{dw}{ds} + \beta = 0 \tag{4.35}$$

Ello puede hacerse utilizando el funcional de energía con un factor corrector α. Podemos escribir, por tanto

$$\Pi = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\; 2\pi r\; ds + \frac{1}{2}\int \alpha\left(\frac{dw}{ds} + \beta\right)^2 2\pi r\; ds + t.c. \tag{4.36}$$

donde t.c. representa los términos de carga y $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\mathbf{D}$ se definen como anteriormente. Inmediatamente se puede identificar α como la rigidez al esfuerzo cortante

$$\begin{aligned} \alpha &= \kappa G t \\ \kappa &= \frac{5}{6} \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ciertamente, el funcional modificado (4.36) puede interpretarse físicamente. Washizu[23] hace referencia a ello en las páginas 199–201 de su obra, y la teoría general sigue la sugerida originalmente por Naghdi[30] para láminas en las que se considera la deformación por cortante.

Al aparecer solamente derivadas primeras en la expresión de la energía, la interpolación de u, w y β sólo requiere continuidad C_0 y en lugar de las expresiones (4.6) a (4.10) se puede escribir directamente

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \beta \end{Bmatrix} = N\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}^e \quad \text{donde } N = N(\xi) \\ \mathbf{a}_i^T &= [\bar{u}, \bar{w}, \beta]_i \end{aligned} \tag{4.38}$$

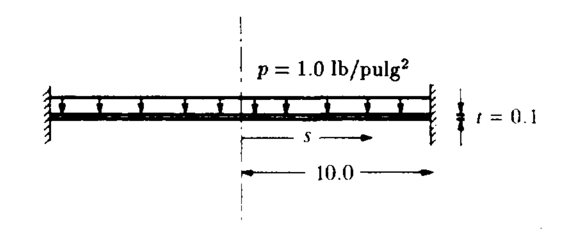
Podemos emplear aquí para $N(\xi)$ cualquiera de las interpolaciones unidimensionales C_0 del Capítulo 7 del Volumen 1. De nuevo se podrían emplear transformaciones isoparamétricas para elementos curvos con las deformaciones definidas ahora por (4.16), y en el Capítulo 5 se discutirá una formulación que no es sino un procedimiento alternativo al expuesto aquí. Si se utilizan elementos lineales no es preciso emplear transformaciones isoparamétricas y las expresiones se pueden escribir directamente. Empleando la notación de las expresiones (4.8) se puede escribir

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_i(1 - s') + \bar{u}_j s' \\ \bar{w} &= \bar{w}_i(1 - s') + \bar{w}_j s' \\ \beta &= \beta_i(1 - s') + \beta_j s' \end{aligned} \tag{4.39}$$

y calcular las integrales que aparecen en la expresión (4.36) en un punto gaussiano, lo cual basta para mantener la convergencia y, sin embargo, no origina singularidad.

Esta formulación tan sencilla da resultados muy mediocres con integración exacta, incluso para láminas gruesas, pero con integración reducida exhibe un comportamiento excelente.

En las Figuras 4.7 a 4.9 se superponen los resultados obtenidos con este elemento rectilíneo simple; los resultados hablan por sí solos.



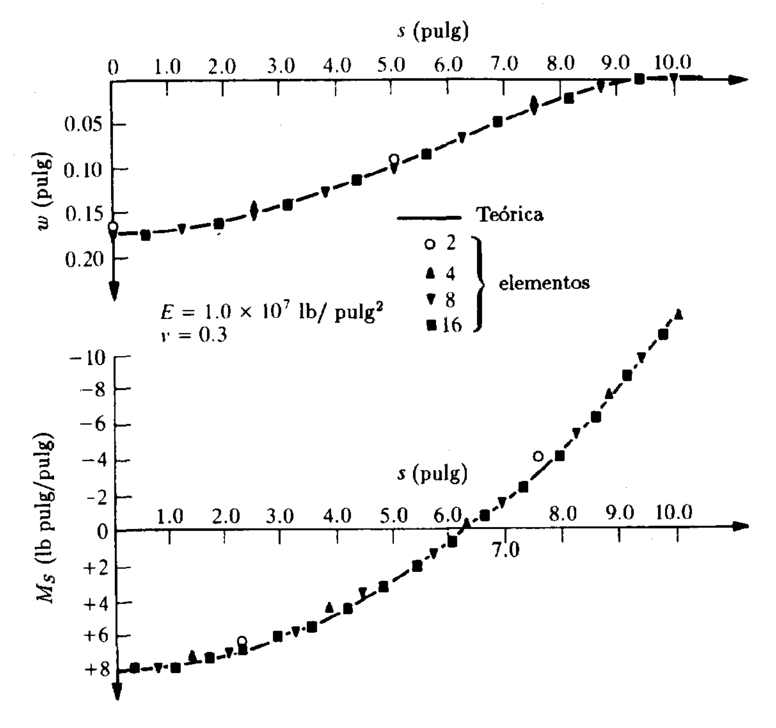


Figura 4.10 Flexión de una placa circular bajo carga uniforme. Estudio de la convergencia.

Si el lector desea conocer otros ejemplos puede consultar la referencia 29, pero en la Figura 4.10 se muestra un caso muy simple de flexión de una placa circular usando diferentes números de elementos iguales. Este problema de flexión pura muestra el tipo de resultados y la convergencia que es posible obtener.

Interpretando el punto de integración único como una única variable de cortante y aplicando la cuenta del test de la parcela del Capítulo 2, el lector puede verificar que el sencillo elemento anterior satisface el test para ensamblajes de dos o más elementos. Puede verificarse de forma similar que una interpolación cuadrática de los desplazamientos y el uso de dos puntos de integración (o una variación lineal del esfuerzo cortante) conducirían a un elemento robusto de excelente comportamiento.

Referencias

1. P.E. GRAFTON y D.R. STROME, "Analysis of axi-symmetric shells by the direct stiffness method", *J.A.I.A.A.*, **1**, 2342–7, 1963.
2. E.P. POPOV, J. PENZIEN y Z.A. LU, "Finite element solution for axisymmetric shells", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, EM5, 119–45, 1964.
3. R.E. JONES y D.R. STROME, "Direct stiffness method of analysis of shells of revolution utilising curved elements", *J.A.I.A.A.*, **4**, 1519–25, 1966.
4. J.H. PERCY, T.H.H. PIAN, S. KLEIN y D.R. NAVARATNA, "Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution", *J.A.I.A.A.*, **3**, 2138–45, 1965.
5. S. KLEIN, "A study of the matrix displacement method as applied to shells of revolution", *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, Octubre 1965.
6. R.E. JONES y D.R. STROME, "A survey of analysis of shells by the displacement method", en *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, Octubre 1965.
7. O.E. HANSTEEN, "A conical element for displacement analysis of axisymmetric shells", en *Finite Element Methods*, TAPIR, Trondheim, 1969.
8. P.L. GOULD y S.K. SEN, "Refined mixed method finite elements for shells of revolution", en *3rd. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1971.
9. J.A. STRICKLIN, D.R. NAVARATNA y T.H.H. PIAN, "Improvements in the analysis of shells of revolution by matrix displacement method (curved elements)", *J.A.I.A.A.*, **4**, 2069–72, 1966.
10. M. KHOJASTEH-BAKHT, *Analysis of elastic-plastic shells of revolution under axi-symmetric loading by the finite element method*, report SESA 67–8, Dept. Civ. Eng., Univ. of California, Berkeley, 1967.

11. R. DELPAK, *Role of the curved parametric element in linear analysis of thin rotational shells*, Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering and Building, The Polytechnic of Wales, 1975.
12. M. GIANNINI y G.A. MILES, "A curved element approximation in the analysis of axi-symmetric thin shells", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2**, 459–76, 1970.
13. J.J. WEBSTER, "Free vibration of shells of revolution using ring elements", *Int. J. Mech. Sci.*, **9**, 559–70, 1967.
14. S. AHMAD, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems", en *Proc. 2nd. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1968.
15. A.S.L. CHAN y A. FIRMIN, "The analysis of cooling towers by the matrix finite element method", *Aeronaut. J.*, **74**, 826–35, 1970.
16. E.A. WITMER y J.J. KOTANCHIK, "Progress report on discrete element elastic and elastic-plastic analysis of shells of revolution subjected to axi-symmetric and asymmetric loading", en *Proc. 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1968.
17. Z.M. ELIAS, "Mixed finite element method for axisymmetric shells", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **4**, 261–77, 1972.
18. R.H. GALLAGHER, "Analysis of plate and shell structures", en *Applications of Finite Element Method in Engineering*, 155–205, Vanderbilt Univ., ASCE, 1969.
19. R.H. GALLAGHER, "Shell element", en *World Conf. on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, Bournemouth, Dorset, England, Octubre 1975.
20. J.A. STRICKLIN, "Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of shells of revolution", en *High Speed Computing of Elastic Structures*, 383–411, University of Liége, 1976.
21. V.V. NOVOZHILOV, *Theory of Thin Shells* (traducción), Noordhoff, Dordrecht, 1959.
22. S. TIMOSHENKO y S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., 533–35, McGraw-Hill, New York, 1959.
23. K. WASHIZU, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd ed., 189–99, Pergamon Press, Oxford, 1975.
24. W.E. HAISLER y J.A. STRICKLIN, "Rigid body displacement of curved elements in the analysis of shells by the matrix displacement method", *J.A.I.A.A.*, **5**, 1525–7, 1967.

25. J.L. SANDERS, Jr. y A. LIEPINS, "Toroidal membrane under internal pressure", *J.A.I.A.A.*, **1**, 2105–10, 1963.
26. F.F. JORDAN, "Stresses and deformations of the thin-walled pressurized torus", *J. Aero. Sci.*, **29**, 213–25, 1962.
27. H. KRAUS, *Thin Elastic Shells*, 168–78, Wiley, New York, 1967.
28. T.J.R. HUGHES, R.L. TAYLOR y W. KANOKNUKULCHAI, "A simple and efficient finite element for plate bending", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 1529–43, 1977.
29. O.C. ZIENKIEWICZ, J. BAUER, K. MORGAN y E. OÑATE, "A simple element for axi-symmetric shells with shear deformation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 1545–58, 1977.
30. P.M. NAGHDI, "Foundations of elastic shell theory", en *Progress in Solid Mechanics*, (eds. I.N. Sneddon y R. Hill), Vol. IV, Capítulo 1, North Holland, Amsterdam, 1963.

Capítulo 5

LAS LÁMINAS COMO CASO ESPECIAL DE ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL. HIPÓTESIS DE REISSNER-MINDLIN

5.1 Introducción

En los Capítulos 8 y 9 del Volumen 1 se han dado varios ejemplos de elementos complejos de contorno curvilíneo aplicados a problemas bi y tridimensionales. Parece obvio que dichos elementos podrían utilizarse directamente para análisis de láminas curvas reduciendo simplemente su dimensión en la dirección del espesor de la lámina, tal como se muestra en la Figura 5.1. Efectivamente, en el ejemplo de la Figura 8.25 del Capítulo 8 del Volumen 1 se ha ilustrado dicha aplicación para el caso de una lámina de revolución.

La utilización sin modificaciones de este tipo de elementos da lugar, sin embargo, a ciertas dificultades.

En primer lugar, el hecho de conservar tres grados de libertad en cada nodo conduce a coeficientes de rigidez muy grandes correspondientes a los desplazamientos relativos a lo largo de un lado tomado en la dirección del espesor de la lámina. Esto origina problemas numéricos y puede llevar a sistemas de ecuaciones mal condicionados cuando el espesor de la lámina se hace pequeño en comparación con las otras dimensiones del elemento.

El segundo factor que interviene es la economía. La utilización de varios nodos en el espesor de la lámina no tiene en cuenta la conocida propiedad de que, incluso para láminas de cierto espesor, las "normales" a la superficie media se mantienen prácticamente rectas después de la deformación. Así pues, se utiliza un número innecesario de grados de libertad, lo que sobrecarga el tiempo de ordenador.

Se presenta aquí una formulación especial que permite sortear estas dificultades.[1,2,3] La condición de que las "normales" se mantengan rectas se introduce como restricción suplementaria, lo que entraña una mejora desde el punto de vista económico; por otra parte, para mejorar la estructura de los sistemas de ecuaciones resultantes, no se tiene en cuenta la energía de deformación correspondiente a las tensiones perpendiculares a la superficie

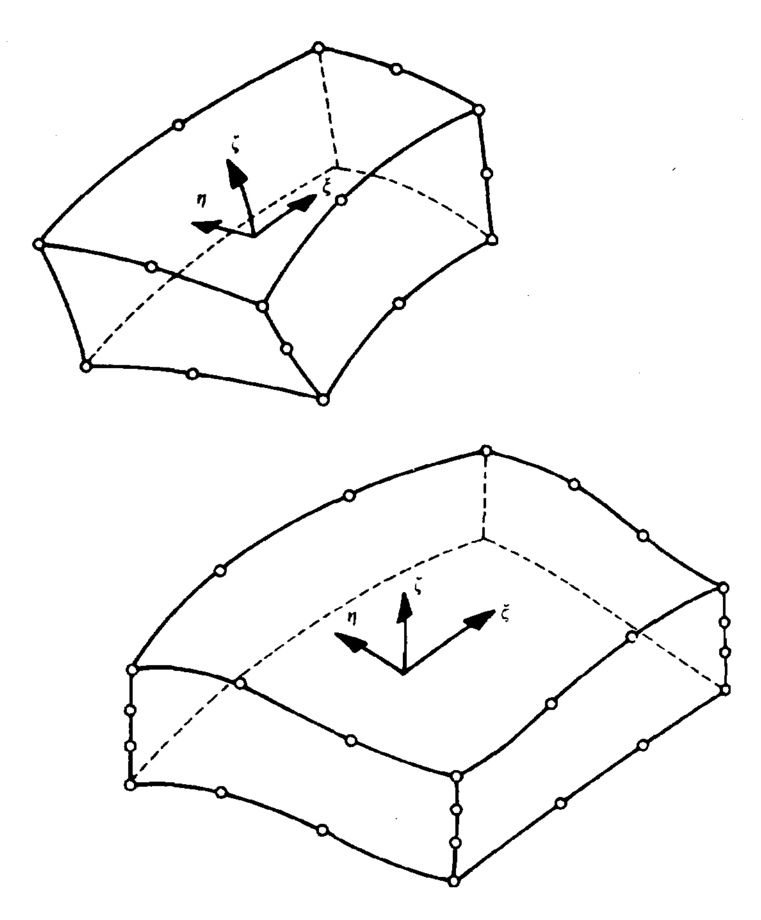


Figura 5.1 Aproximación directa de una lámina curva mediante hexaedros isoparamétricos.

media. Con estas modificaciones se dispone de un método eficaz para estudiar las láminas gruesas curvas. Su precisión y sus amplios límites de aplicación se pondrán de manifiesto con varios ejemplos.

El lector podrá advertir que las dos condiciones introducidas corresponden precisamente a las introducidas en el Capítulo 2 para describir el comportamiento de placas gruesas, y son las llamadas hipótesis de Reissner-Mindlin. La omisión de la tercera restricción asociada a la teoría de placas delgadas (las normales permanecen normales al plano medio después de la deformación) permite que la lámina experimente deformaciones por esfuerzo cortante, característica importante en las láminas gruesas.

La formulación que aquí se presenta es algo más complicada que la que emplea directamente elementos tridimensionales, y desde luego el lector puede verse tentado a emplear directamente una formulación tridimensional, especialmente puesto que parece estar permitido utilizar elementos en los que la variación del desplazamiento a lo largo del espesor sea lineal. En tal caso, un punto definido en el plano medio necesita seis grados de libertad, frente a los cinco que aparecen en la formulación de este Capítulo; esto parecería sólo un pequeño inconveniente si se lograra evitar el mal condicionamiento del sistema de ecuaciones debido a la gran diferencia de magnitud entre algunos coeficientes de rigidez. Wood[4,5] y Wilson[6] han demostrado que esto es factible utilizando como variables las *diferencias* entre *desplazamientos* de las dos superficies y un computador de alta precisión. Sin embargo, aparece ahora otra dificultad si se emplea interpolación lineal en la dirección de la normal a la lámina. Cuando el coeficiente de Poisson no es cero, los resultados convergen hacia una solución errónea según un factor $(1-\nu)^2/(1-2\nu)$. Las razones de esto son fáciles de explicar. En un estado de flexión pura la deformación en la dirección normal al plano medio es nula y, en consecuencia, si $\nu \neq 0$ aparecerán tensiones en esa dirección que se opondrán a las deformaciones *en el plano*. Para vencer este efecto hay que dotar al material de unas propiedades de anisotropía supuestas, *o bien* suponer una distribución de desplazamientos parabólica, con lo que el proceso de cálculo no sería económico.

Los elementos aquí desarrollados constituyen una formulación alternativa a los procedimientos expuestos en el Capítulo 2 y 14, en los que pendientes y desplazamientos se interpolaban independientemente y las condiciones de continuidad se imponían a través de una función de penalización. De esta forma, el empleo de la integración reducida vuelve a ser imperativo si han de tratarse láminas delgadas; fue precisamente en este contexto en el que este método se desarrolló originalmente.[7–10] De nuevo son aplicables las mismas restricciones discutidas en el Capítulo 2 para un comportamiento robusto de los elementos y, en general, los que funcionan bien en placas también lo hacen en láminas.

5.2 Definición geométrica del elemento

Consideremos el elemento de lámina de la Figura 5.2. Las caras externas del elemento son curvas, mientras que las secciones en el sentido del espesor están generadas por líneas rectas. La forma del elemento está definida por pares de puntos i_{sup} e i_{inf}, expresado cada uno en coordenadas cartesianas conocidas.

Sean ξ, η las dos coordenadas curvilíneas del plano medio de la lámina, y ζ una coordenada lineal en la dirección del espesor. Si se supone

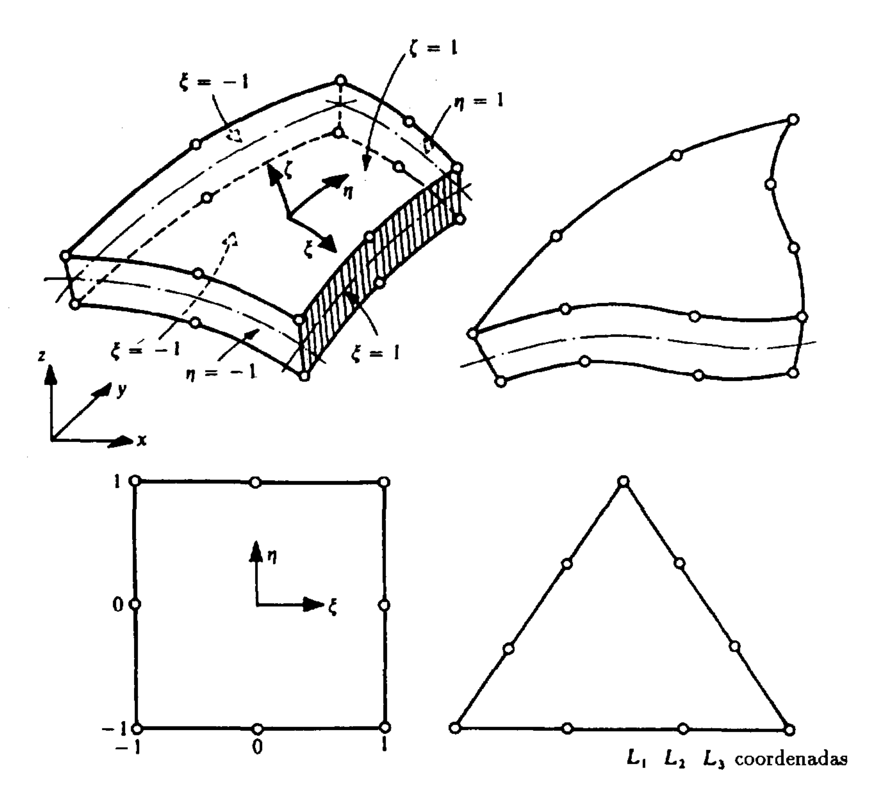


Figura 5.2 Distintos tipos de elementos finitos curvos para el estudio de láminas gruesas.

además que ξ, η y ζ varían entre -1 y $+1$ en las caras respectivas del elemento, entre las coordenadas cartesianas de un punto cualquiera de la lámina y las coordenadas curvilíneas se puede escribir una relación de la forma

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi,\eta)\frac{(1+\zeta)}{2}\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{sup}} + \sum N_i(\xi,\eta)\frac{(1-\zeta)}{2}\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{inf}} \tag{5.1}$$

$N_i(\xi,\eta)$ es aquí una función de forma que toma el valor unidad en el nodo i, y cero en todos los demás (Capítulo 8 del Volumen 1). Si las funciones básicas N_i se obtienen como "funciones de forma" de un

elemento "generatriz" bidimensional, cuadrado o incluso triangular,† y se conciben de manera que se satisfaga la compatibilidad entre las caras de separación comunes, entonces los elementos espaciales curvos formarán un todo sin discontinuidades. Utilizando funciones de forma de diferentes grados pueden reproducirse formas curvas totalmente arbitrarias. En la Figura 5.2 no se muestra más que el caso de funciones parabólicas y cúbicas. Colocando mayor número de nodos en las superficies del elemento pueden obtenerse formas más complicadas si así se desea. Por supuesto, puede emplearse aquí cualquiera de las funciones bidimensionales establecidas en el Capítulo 7 del Volumen 1.

Hemos establecido ya la relación entre las coordenadas cartesianas y las curvilíneas, y veremos que es deseable operar básicamente en coordenadas curvilíneas. Adviértase que la dirección correspondiente a la coordenada ζ es *sólo aproximadamente normal* a la superficie media.

Conviene volver a escribir la relación (5.1) de forma que intervenga el "vector" que une los puntos inferiores y superiores (es decir, un vector de longitud igual al espesor t de la lámina) y las coordenadas del punto de la superficie media. Se puede, pues, escribir (5.1) como sigue (Figura 5.3)††

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{med}} + \sum N_i \frac{\zeta}{2}\mathbf{V}_{3i}$$

con (5.2)

$$\mathbf{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{sup}} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{inf}}$$

definiendo un vector cuya longitud es el espesor de la lámina.

Para láminas relativamente delgadas es conveniente reemplazar el vector $\mathbf{V}_{3i}$ por un vector unitario en la dirección normal al plano medio $\mathbf{v}_{3i}$. Ahora el último término se puede escribir como

$$\sum N_i \zeta \frac{t_i}{2}\mathbf{v}_{3i}$$

donde t_i es el espesor de la lámina en el nodo i. La construcción de un vector normal a la superficie media es un proceso sencillo (véase Apéndice 5 del Volumen 1).

† En este caso se utilizarán coordenadas de área en lugar de ξ y η, como en el Capítulo 7 del Volumen 1.

†† Para detalles de álgebra vectorial véase el Apéndice 5 del Volumen 1.

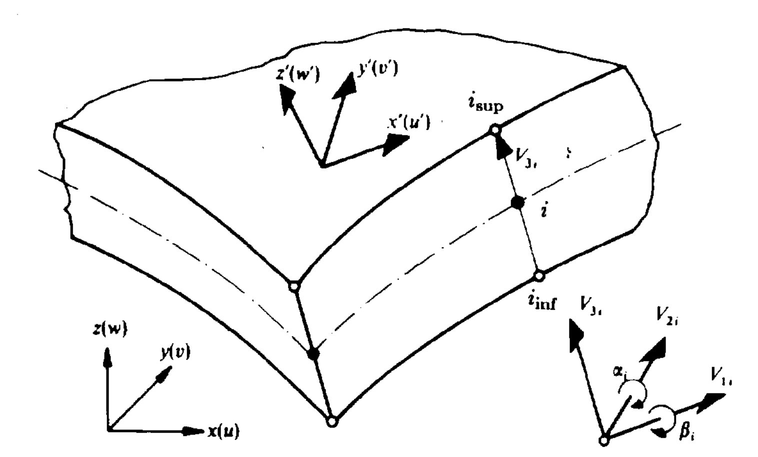


Figura 5.3 Coordenadas locales y globales.

5.3 Campo de desplazamientos

Ahora ha de definirse el campo de desplazamientos para el elemento elegido. Como las deformaciones en la dirección normal a la superficie media se suponen despreciables, el desplazamiento para todo el elemento vendrá definido de manera única por *las tres componentes cartesianas* del desplazamiento del nodo correspondiente situado en la superficie media y por los dos giros del vector nodal $\mathbf{V}_{3i}$ con respecto a dos direcciones ortogonales normales al mismo. Si dichas direcciones se definen mediante dos vectores unitarios $\mathbf{v}_{2i}$ y $\mathbf{v}_{1i}$, a los cuales corresponden los giros (escalares) α_i y β_i, se puede escribir una expresión análoga a la (5.2) pero suprimiendo ahora por simplicidad el subíndice "med"

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum N_i \zeta \frac{t_i}{2} [\mathbf{v}_{1i}, \ -\mathbf{v}_{2i}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

de la cual se deduce inmediatamente la fórmula habitual

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i^e \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j^e \end{Bmatrix} \qquad \text{con} \quad \mathbf{a}_i^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}$$

donde u, v y w son las componentes del desplazamiento paralelas a los ejes de referencia globales x, y, z.

Dado que existen infinitas direcciones perpendiculares a una dada, conviene establecer un procedimiento especial que asegure una definición *única* de $\mathbf{V}_{1i}$ y $\mathbf{V}_{2i}$. En el Capítulo 3 se han visto ya algunos de esos métodos. Aquí vamos a ofrecer un método más sencillo,[2] aunque existen otros.[10]

Así, si $\mathbf{V}_{3i}$ es el vector cuya normal hemos de construir, definiremos el primer eje normal por la dirección perpendicular al plano formado por $\mathbf{V}_{3i}$ y el eje x.†

Un vector $\mathbf{V}_{1i}$ definido de esa manera vendría dado por el producto vectorial

$$\mathbf{V}_{1i} = \mathbf{i} \times \mathbf{V}_{3i} \tag{5.4}$$

donde

$$\mathbf{i} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

es un vector unitario en la dirección del eje x. Dividiendo $\mathbf{V}_{1i}$ por su longitud, se obtiene el vector unitario $\mathbf{v}_{1i}$.

El vector que queda normal a los otros dos es simplemente

$$\mathbf{V}_{2i} = \mathbf{V}_{1i} \ \times \ \mathbf{V}_{3i} \tag{5.5}$$

y todos los cosenos directores locales pueden determinarse normalizando este último vector y obteniendo el vector unitario $\mathbf{v}_{2i}$. Se tienen, pues, tres ejes locales ortogonales definidos por los vectores unitarios

$$\mathbf{v}_{1i}, \quad \mathbf{v}_{2i} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_{3i} \tag{5.6}$$

Una vez más, si las funciones N_i son compatibles, está garantizada la compatibilidad de los desplazamientos entre elementos adyacentes.

Las coordenadas del elemento están definidas por la relación (5.1), que tiene más grados de libertad que la definición de los desplazamientos. El elemento es, por tanto, del tipo superparamétrico (véase Capítulo 8 del Volumen 1), y los criterios de deformación constante no se satisfacen

† Este procedimiento no es aplicable en el caso de que $\mathbf{V}_{3i}$ sea paralelo al eje x. Se puede escribir fácilmente un programa que compruebe si éste es el caso, y obtener entonces las direcciones locales usando el eje y.

automáticamente. A pesar de todo, teniendo en cuenta la definición de las componentes de la deformación, se verá que es posible obtener tanto los movimientos de cuerpo rígido como las condiciones de deformación constante.

Hemos supuesto, desde un punto de vista físico, que no aparecen deformaciones en la dirección del "espesor" ζ. A pesar de que esta dirección no es exactamente normal a la superficie media, la hipótesis hecha reproduce con bastante aproximación una de las hipótesis habituales de la teoría de las láminas.

En cada nodo de la superficie media de la Figura 5.3 se tienen, por consiguiente, los cinco grados de libertad fundamentales y el enlace de los elementos entre sí sigue precisamente las pautas descritas en el Capítulo 3 (Secciones 3.3 y 3.4).

5.4 Definición de las tensiones y de las deformaciones

Para establecer las propiedades de un elemento finito han de definirse las deformaciones y tensiones fundamentales. Siguiendo las hipótesis básicas de la teoría de láminas, es indispensable conocer las componentes de la tensión y de la deformación respecto de unos *ejes ortogonales* ligados a la superficie ζ =constante. Así, si en un punto cualquiera de esa superficie construimos la normal z' a dos ejes ortogonales, x' e y', tangentes a la superficie (Figura 5.3), las componentes de la deformación que nos interesan vienen dadas sencillamente por las relaciones tridimensionales del Capítulo 6 del Volumen 1:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u'}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial v'}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial u'}{\partial y'} + \dfrac{\partial v'}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial w'}{\partial x'} + \dfrac{\partial u'}{\partial z'} \\ \dfrac{\partial w'}{\partial y'} + \dfrac{\partial v'}{\partial z'} \end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

prescindiendo de la deformación en la dirección z', en concordancia con las hipótesis habituales de la teoría de láminas. Debe advertirse que en general ninguna de estas direcciones coincide con las de las coordenadas curvilíneas ξ, η y ζ, aunque x' e y' están contenidos en el plano $\xi - \eta$ (ζ =constante).†

Las tensiones que corresponden a estas deformaciones se definen mediante una matriz $\boldsymbol{\sigma}'$ relacionada con $\boldsymbol{\varepsilon}'$ a través de la matriz elástica habitual $\mathbf{D}'$. Así pues

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}'(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}'_0) + \boldsymbol{\sigma}'_0 \tag{5.8}$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}'_0$ y $\boldsymbol{\sigma}'_0$ pueden representar cualesquiera deformaciones o tensiones iniciales.

La matriz $\mathbf{D}'$ de dimensiones 5×5 puede incluir ahora propiedades anisótropas cualesquiera, e incluso puede estar definida como función de ζ en el caso de estructuras con distintas capas de materiales (estratificada). Por ahora, sólo definiremos la matriz $\mathbf{D}'$ para el caso de materiales isótropos. En tal caso

$$\mathbf{D}' = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \dfrac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & \dfrac{1-\nu}{2k} & 0 \\ \text{sim.} & & & & \dfrac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

en donde E y ν son el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, respectivamente. El factor k que interviene en los dos últimos términos de esfuerzo cortante se toma igual a $6/5$ y su objeto es mejorar la aproximación cuando se tiene en cuenta la deformación por esfuerzo cortante. Se puede ver que la distribución de las tensiones tangenciales deducidas de la definición de los desplazamientos es aproximadamente constante a lo largo del espesor de la lámina, mientras que en realidad

† En realidad, sólo habrá concordancia aproximada entre esas direcciones y las direcciones nodales $\mathbf{v}_{1i}$, etc., anteriormente obtenidas, ya que en general el vector $\mathbf{v}_{3i}$ sólo es aproximadamente normal a la superficie media.

dicha distribución es aproximadamente parabólica. El valor $k = 6/5$ es el cociente de las energías de deformación correspondientes.

Es importante advertir que esta matriz *no* se obtiene suprimiendo simplemente los términos apropiados de la matriz de tensiones tridimensional equivalente. Debe obtenerse haciendo $\sigma'_z = 0$ en la relación (5.13) del Volumen 1 y efectuar las eliminaciones convenientes, de manera que se verifique esta hipótesis esencial de la teoría de láminas.

5.5 Propiedades de los elementos y transformaciones necesarias

En la matriz de rigidez —y, por supuesto, en todas las matrices que definen las propiedades del elemento— intervienen integrales sobre el volumen del elemento, que en general son de la forma

$$\int_{V^e} \mathbf{S}\, dx\, dy\, dz \tag{5.10}$$

donde la matriz $\mathbf{S}$ es función de las coordenadas.

Por ejemplo, en la matriz de rigidez

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B} \tag{5.11}$$

con la definición habitual del Capítulo 2 del Volumen 1

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{B}\mathbf{a}^e \tag{5.12}$$

$\mathbf{B}$ está definida en función de las derivadas de los desplazamientos respecto de las coordenadas cartesianas locales x', y', z', a través de la expresión (5.7). Por consiguiente, ahora es preciso efectuar *dos transformaciones sucesivas* antes de que podamos integrar respecto de las coordenadas curvilíneas ξ, η, ζ.

En primer lugar, procediendo exactamente de la misma manera que en el Capítulo 8 del Volumen 1, se obtienen las derivadas respecto de x, y y z. Como (5.3) relaciona los desplazamientos globales u, v, w con las coordenadas curvilíneas, las derivadas de estos desplazamientos respecto de las coordenadas globales x, y, z vienen expresadas por la relación matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

en la que la matriz jacobiana se define como anteriormente:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

y se calcula a partir de la definición de las coordenadas de la ecuación (5.2).

Así pues, para cada sistema de coordenadas curvilíneas se pueden obtener numéricamente las derivadas de los desplazamientos respecto de las coordenadas globales. Una transformación posterior a las coordenadas locales x', y', z' permitirá determinar las deformaciones, y a partir de éstas la matriz $\mathbf{B}$.

En segundo lugar, han de establecerse las direcciones de los ejes locales. Un vector normal a la superficie ζ =constante puede obtenerse como producto vectorial de dos vectores cualesquiera tangentes a la misma. Así pues

$$\mathbf{V}_3 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \tag{5.15}$$

Siguiendo el procedimiento antes expuesto de determinación única de dos vectores perpendiculares a uno dado, se elabora una matriz de vectores unitarios en las direcciones x', y', z' (que en realidad es la matriz de cosenos directores):

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3] \tag{5.16}$$

A partir de las derivadas globales de los desplazamientos u, v, y w se obtienen ahora, mediante una operación convencional, las derivadas de las componentes locales del desplazamiento respecto de las coordenadas locales:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \tag{5.17}$$

A partir de esta relación pueden determinarse explícitamente las componentes de la matriz $\mathbf{B}'$ teniendo en cuenta que hay cinco grados de libertad en cada nodo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{B}' \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i^e \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j^e \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{a}_i^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \tag{5.18}$$

En función de las coordenadas curvilíneas, el volumen infinitesimal es

$$dx\ dy\ dz = \det |\mathbf{J}|\ d\xi\ d\eta\ d\zeta \tag{5.19}$$

y con esta relación general se completan las fórmulas fundamentales necesarias.

La integración numérica entre los límites -1 y $+1$ se efectúa exactamente igual que en el caso de los elementos tridimensionales estudiados en el Capítulo 8 del Volumen 1. El resto de las matrices se calculan de manera análoga.

Como las deformaciones varían linealmente a lo largo del espesor, o dirección ζ, bastará con dos puntos gaussianos en esa dirección, mientras que en las direcciones ξ y η se necesitarán tres o cuatro para funciones de forma parabólicas o cúbicas, respectivamente.

Se puede resaltar que, si se desea, es posible efectuar la integración respecto de ζ exactamente, lo que permite economizar tiempo de cálculo.[1]

5.6 Algunas observaciones acerca de la representación de las tensiones

Se han definido ya las propiedades de los elementos; el ensamblaje y la solución del sistema de ecuaciones siguen los procedimientos generales.

Nos queda por discutir de qué forma han de representarse las tensiones, lo cual es un tema de cierta importancia. Como las deformaciones están definidas en los ejes locales, se conoce inmediatamente $\boldsymbol{\sigma}'$. Las componentes de ésta son ciertamente de interés, pero como las direcciones de los ejes locales no son de visualización fácil, a veces conviene transformarlas al sistema global mediante la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta} \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^T \tag{5.20}$$

Si las tensiones se calculan en un punto nodal común a varios elementos, se obtendrá entonces el valor medio.

En la estructura laminar más general, las tensiones expresadas en un sistema global no ofrecen, sin embargo, una imagen clara de las tensiones en la superficie de la lámina. Es, pues, conveniente calcular las tensiones principales mediante la transformación adecuada.

No obstante, al considerar de manera más racional las tensiones en la superficie de la lámina, puede advertirse que en la misma las componentes de las tensiones tangenciales $\tau_{x'z'}$ y $\tau_{y'z'}$ son en realidad nulas, y por supuesto pueden hacerse iguales a cero antes de efectuar la transformación de las tensiones al sistema global de coordenadas. Los valores que se obtienen directamente para esas componentes tangenciales son los valores medios para toda la sección. El valor máximo de la tensión tangencial transversal se da en el eje neutro y vale 1,5 veces el valor medio.

5.7 Caso particular de láminas de revolución gruesas

Es evidente que en caso de láminas de revolución la formulación se simplifica.[1] En estas situaciones un punto de la superficie media está definido solamente por dos coordenadas ξ, η y resulta un ahorro considerable de trabajo por ordenador.

Los elementos se elaboran de manera análoga, pero partiendo de la definición bidimensional de la Figura 5.4.

Las relaciones (5.1) y (5.2) son sustituidas ahora por sus equivalentes bidimensionales, que definen como sigue la relación entre las coordenadas:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} &= \sum N_i(\xi) \frac{(1+\eta)}{2} \begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{sup}} + \sum N_i(\xi) \frac{(1-\eta)}{2} \begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{inf}} \\ &= \sum N_i(\xi) \begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{med}} + \sum N_i(\xi) \frac{\eta}{2} \mathbf{V}_{3i} \end{aligned} \tag{5.21}$$

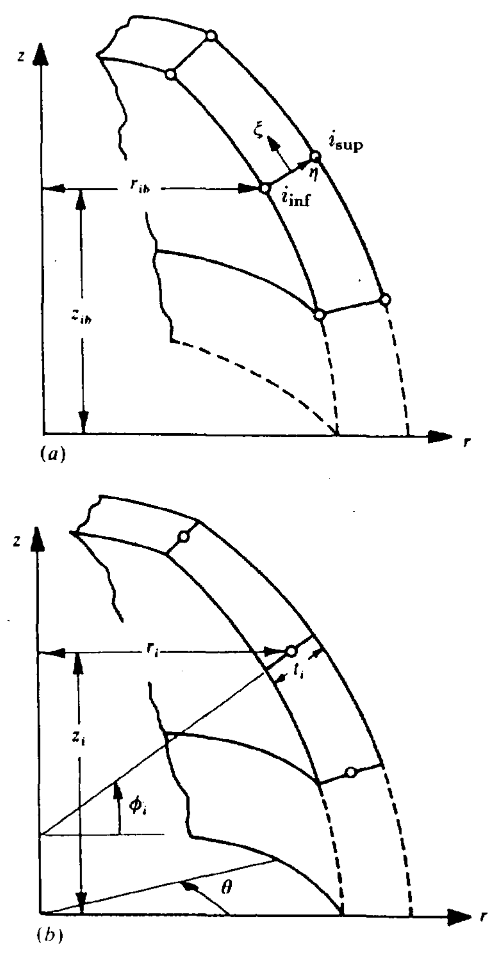


Figura 5.4 Coordenadas para problemas de láminas de revolución.

con

$$\mathbf{V}_{3i} = t_i \begin{Bmatrix} \cos\phi_i \\ \text{sen } \phi_i \end{Bmatrix}$$

en la cual ϕ_i es el ángulo definido en la Figura 5.4(b), y t el espesor de la lámina. Similarmente, los desplazamientos se definen haciendo uso de (5.3).

Para mayor generalización, consideraremos solamente el caso de carga

no de revolución observando los términos que puedan eliminarse *a priori* para el caso sencillo de simetría. Por supuesto, no vamos a entrar en los detalles del desarrollo en series trigonométricas que supondremos efectuado y que siguen rigurosamente la pauta descrita en el Capítulo 6.

Así pues, definiremos en general las tres componentes del desplazamiento para el armónico n-ésimo como:

$$\begin{Bmatrix} u^n \\ v^n \\ w^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen } n\theta \end{bmatrix} \times \left(\sum N_i \begin{Bmatrix} u_i^n \\ v_i^n \\ w_i^n \end{Bmatrix} + \sum N_i \eta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} -\text{ sen } \phi_i & 0 \\ \cos\phi_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i^n \\ \beta_i^n \end{Bmatrix} \right) \tag{5.22}$$

En esta expresión α_i representa el giro ilustrado en la Figura 5.5; u_i, etc., el desplazamiento de un nodo situado en la superficie media, y β_i el giro del vector (aproximadamente) tangencial a la superficie media.

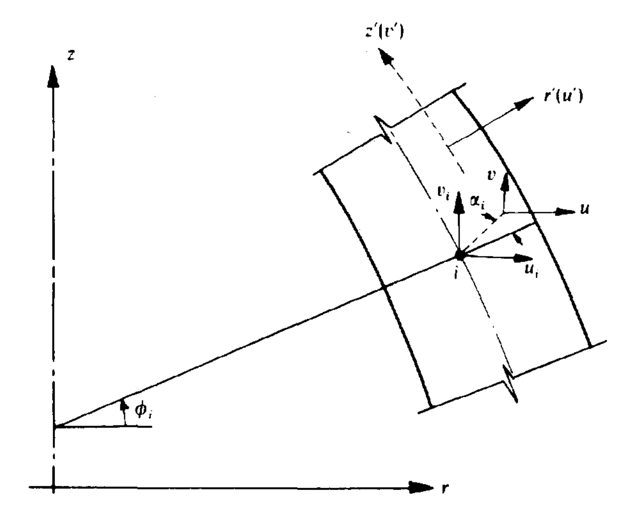


Figura 5.5 Desplazamientos globales en una lámina de revolución.

Para el caso de revolución puro aparece otra simplificación al prescindir de la primera matriz de constantes trigonométricas y de los términos en que aparecen w o el giro β_i.

Las deformaciones locales quedan mejor definidas a través de las relaciones (5.7) en coordenadas cilíndricas

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} + \dfrac{\partial w}{\partial r} - \dfrac{w}{r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{5.23}$$

Estas deformaciones se transforman a las coordenadas locales y se prescinde de las componentes normales a η =constante.

La matriz $\mathbf{D}'$ toma, sin embargo, una forma idéntica a la definida por (5.9). En el caso de revolución, de nuevo basta con suprimir los términos apropiados.

Todas las transformaciones siguen el esquema descrito en las secciones precedentes, y no es preciso insistir más sobre este punto, excepto quizás para señalar que ahora sólo se efectúan sobre grupos de dos variables, respectivamente, ξ, η; r, z y r', z'.

Análogamente, la integración necesaria para establecer las propiedades del elemento se efectúa numéricamente sólo con respecto a ξ y η teniendo en cuenta, sin embargo, que el elemento de volumen es

$$dx\ dy\ dz = \det |\mathbf{J}|\ d\xi\ d\eta\ r\ d\theta \tag{5.24}$$

Eligiendo convenientemente las funciones de forma $N_i(\xi)$, podrán utilizarse elementos lineales, parabólicos o cúbicos de espesor variable, como los representados en la Figura 5.6.

5.8 Caso particular de placas gruesas

Las transformaciones necesarias en este capítulo son algo complejas y desde luego la programación requiere cierto cuidado. Sin embargo, los principios expuestos son aprovechables para placas gruesas y aconsejamos al lector que compruebe su comprensión de los mismos con un caso tan sencillo como éste.

En este caso aparecen las obvias simplificaciones siguientes:

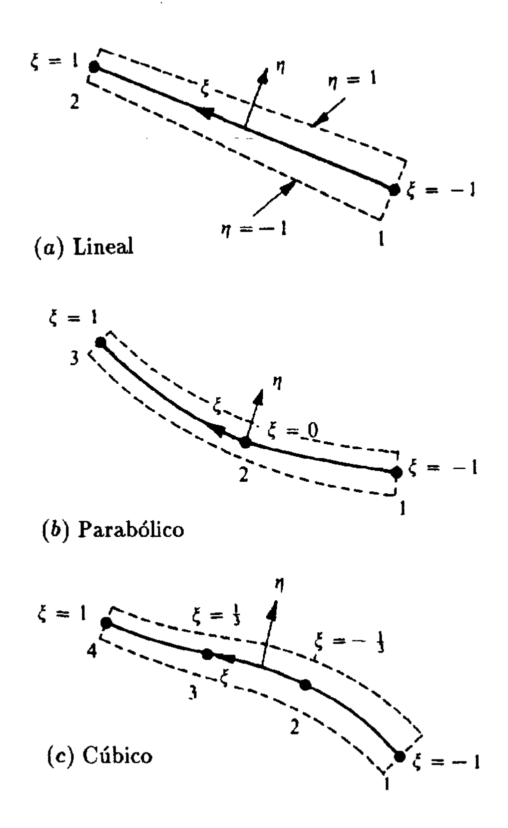


Figura 5.6 Elementos finitos para el estudio de láminas de revolución.

1. $\zeta = z$ y los vectores unitarios $\mathbf{v}_{1i}$, $\mathbf{v}_{2i}$, $\mathbf{v}_{3i}$ se pueden tomar, respectivamente, paralelos a los ejes x, y y z.
2. α_i y β_i son simplemente los giros θ_y y θ_z (véase Capítulo 2).
3. Ya no es preciso transformar las componentes de la deformación y de la tensión a un sistema local x', y', z', y a lo largo de todos los cálculos se puede operar en el sistema global. Para elementos de este tipo se puede prescindir de la integración numérica, y el lector puede establecer explícitamente a título de ejercicio las diversas matrices de rigidez, etc., para, por ejemplo, elementos rectangulares y lineales. Encontrará expresiones idénticas a las obtenidas en el Capítulo 2 interpolando independientemente los giros y los desplazamientos y mediante las condiciones impuestas por el esfuerzo cortante. Esto nos indica que los dos procedimientos alternativos son esencialmente idénticos.

5.9 Convergencia

Mientras que en el análisis tridimensional es posible hablar de convergencia absoluta hacia la solución exacta del problema elástico, en problemas de placas y láminas dicha convergencia no tiene lugar. La así llamada solución convergente a un problema de flexión de placas converge, al disminuir el tamaño de los elementos, solamente a la solución exacta correspondiente al modelo aproximado implícito en la formulación. Así pues, para los problemas que se acaban de estudiar, sólo habrá convergencia hacia una solución exacta limitada por la hipótesis de que las secciones planas se mantengan planas durante la deformación.

En los elementos de tamaño finito se encontrará que los modos de deformación para flexión pura llevan asociados siempre ciertas tensiones tangenciales que en realidad no existen en las teorías convencionales de la flexión de placas o láminas. Así, los elementos de grandes dimensiones que se deformen principalmente bajo esfuerzos de flexión (como sería el caso de elementos laminares degenerados en placas planas) tenderán sensiblemente a ser excesivamente rígidos. En tales casos han de imponerse ciertos límites a la relación del lado del elemento a su espesor. Se encontrará, sin embargo, que pueden relajarse dichas restricciones mediante el simple artificio de *reducir el orden de integración numérica.*[7]

La Figura 5.7 muestra, por ejemplo, la aplicación del elemento parabólico de 8 nodos al estudio de una placa cuadrada. Se dan los resultados correspondientes a la integración con 3×3 y 2×2 puntos gaussianos para diferentes relaciones del espesor al lado de la placa. Cuando la placa es relativamente gruesa, los resultados son similares y en los dos casos se obtiene la deformación adicional debida al esfuerzo cortante, deformación que no puede obtenerse con la teoría de placas delgadas. Por contra, cuando la placa es delgada, los resultados correspondientes a la integración más exacta tienden a separarse rápidamente de la solución teórica de placas delgadas, correcta en este caso, mientras que la integración reducida sigue dando excelentes resultados.

Remitimos al lector al Capítulo 2, donde podrá encontrar más ejemplos de placas con diferentes tipos de funciones de forma.

5.10 Algunos ejemplos

Ofrecemos a continuación un número limitado de ejemplos destinados a mostrar la precisión y el campo de aplicación de la formulación recién expuesta. En las referencias 1, 2, 3, 7 y 10, el lector encontrará una selección más completa.

5.10.1 *Cúpula esférica bajo presión uniforme.* Para este problema de revolución, la solución "exacta" es conocida y se obtiene de la teoría de

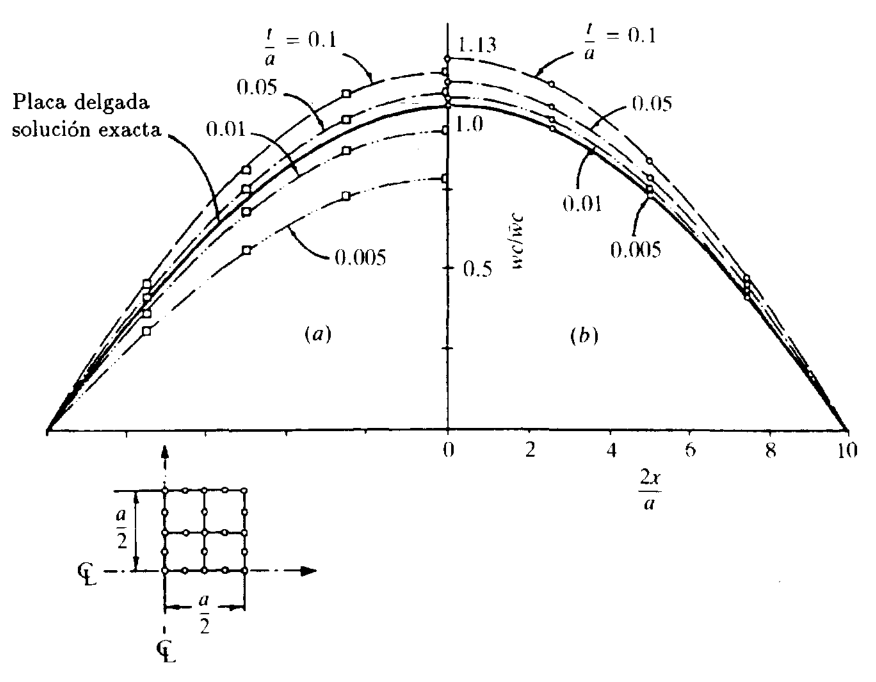


Figura 5.7 Placa cuadrada simplemente apoyada con carga uniforme q_0. Representación de la flecha central w_c obtenida mediante elementos de 8 nodos: (a) integración con 3×3 puntos gaussianos; (b) integración (reducida) con 2×2 puntos gaussianos; $\bar{w}_c$ flecha en el centro, según la teoría de placas delgadas.

láminas; los resultados se han representado en la Figura 5.8. Se utilizaron veinticuatro elementos de tipo cúbico y la subdivisión se efectuó de manera que fuese haciéndose más tupida al acercarse a los apoyos.

La solución parece ser más precisa que la "exacta" en el sentido de que distingue entre el caso en que la presión se aplique sobre la pared interior o sobre la exterior.

5.10.2 *Cilindro bajo carga radial en los bordes.* Este otro ejemplo de revolución que se muestra en la Figura 5.9 puede servir para estudiar el efecto de la subdivisión. Se usaron dos, seis y catorce elementos de distintos tamaños; los resultados correspondientes a las dos últimas subdivisiones casi coinciden con la exacta. Incluso la solución obtenida con dos elementos da resultados aceptables, y no se distingue de la exacta más que en las proximidades del borde cargado.

Una vez más, las soluciones son básicamente idénticas a las obtenidas

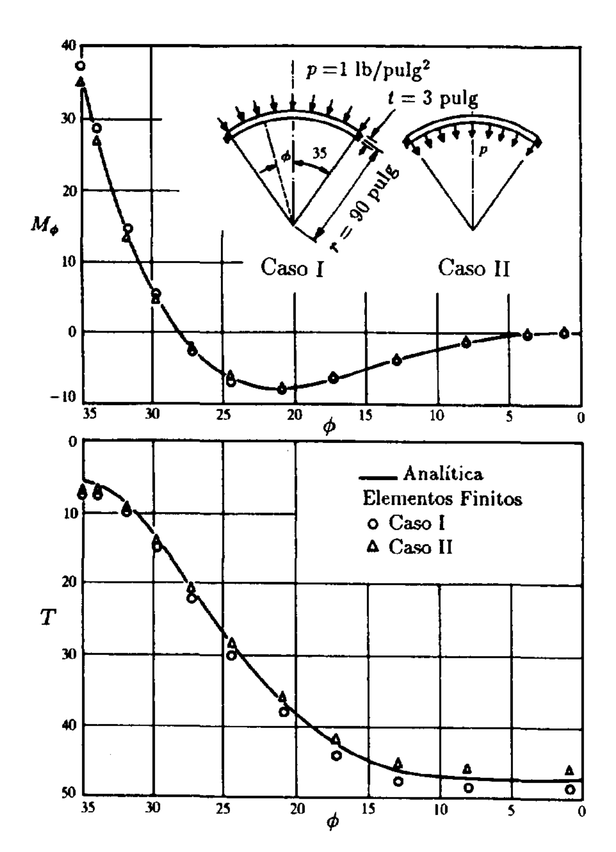


Figura 5.8 Cúpula esférica bajo presión uniforme analizada con 24 elementos cúbicos (el primer elemento abarca un ángulo de 0,1° desde el extremo fijo, los otros están situados en progresión aritmética). M_ϕ = momento flector meridional en lb×pulg.; T = fuerza circunferencial en lb/pulg.; $\nu = 1/6$.

mediante interpolaciones independientes de desplazamientos y giros de la forma presentada en el Capítulo 2.

5.10.3 *Bóveda cilíndrica.* Se trata de un caso de comprobación del proceso completo aplicado a una lámina sometida a esfuerzos de flexión importantes, debido a que los apoyos impiden todo movimiento en los extremos (ver también la Sección 3.8.2).

En la Figura 5.10 se muestran los detalles físicos y geométricos del problema, así como la malla utilizada; los desplazamientos calculados se

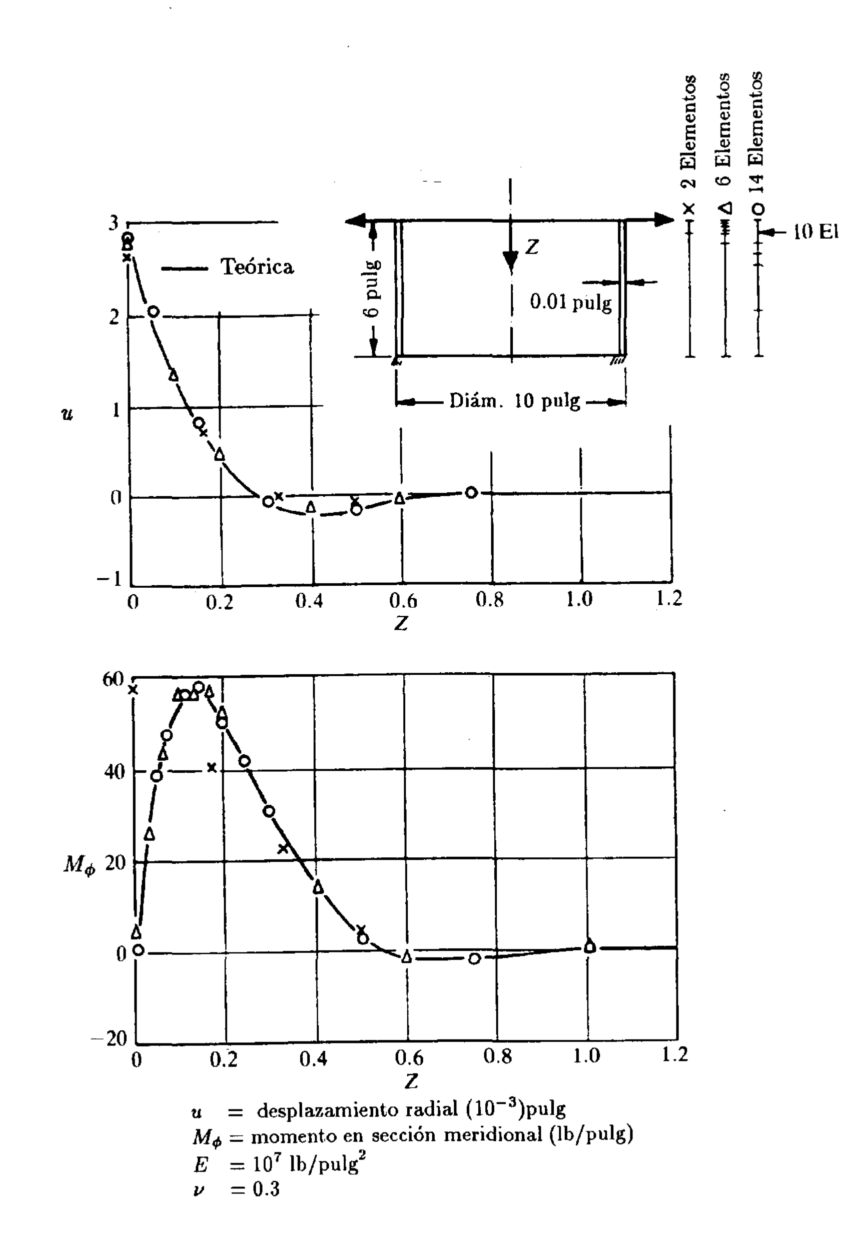
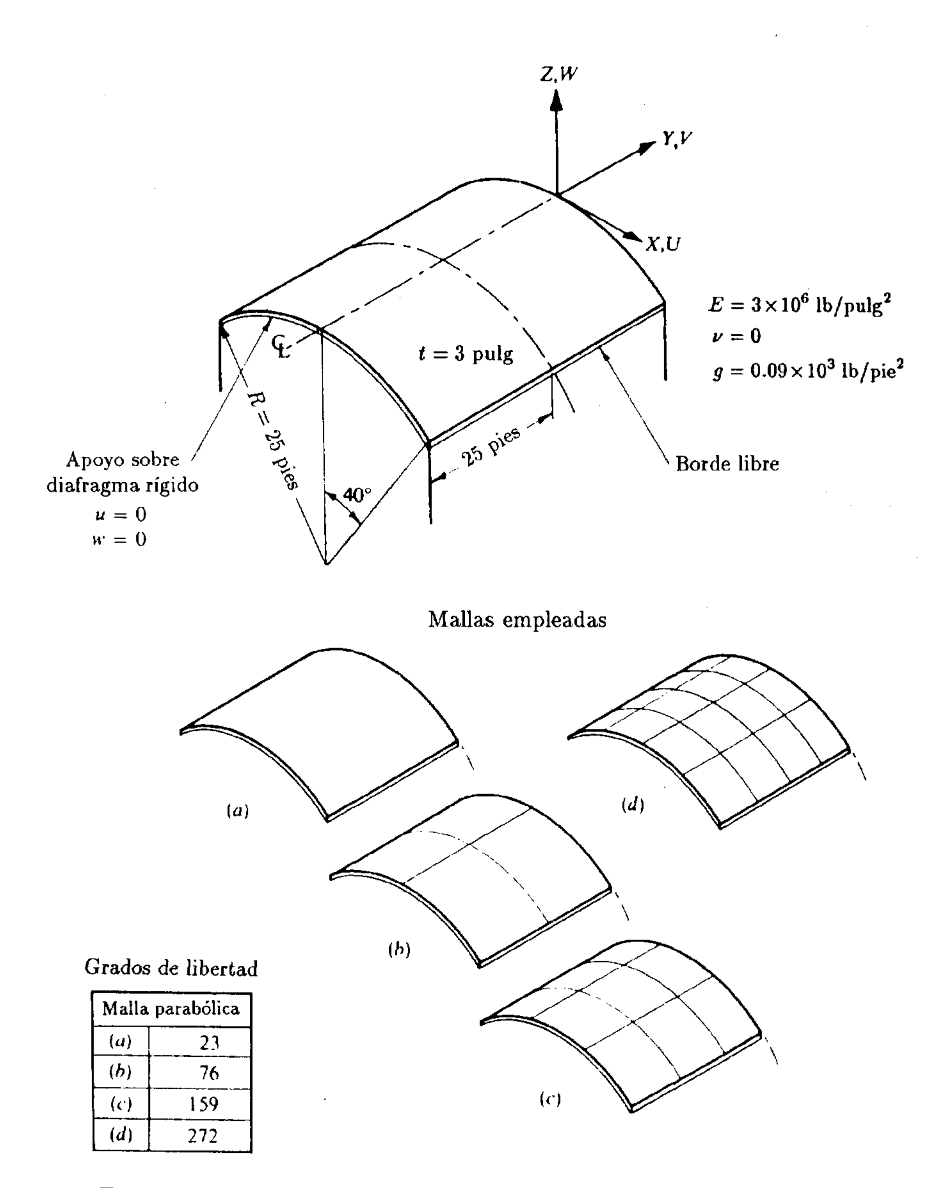


Figura 5.9 Cilindro de pared delgada bajo carga radial unitaria en los bordes.

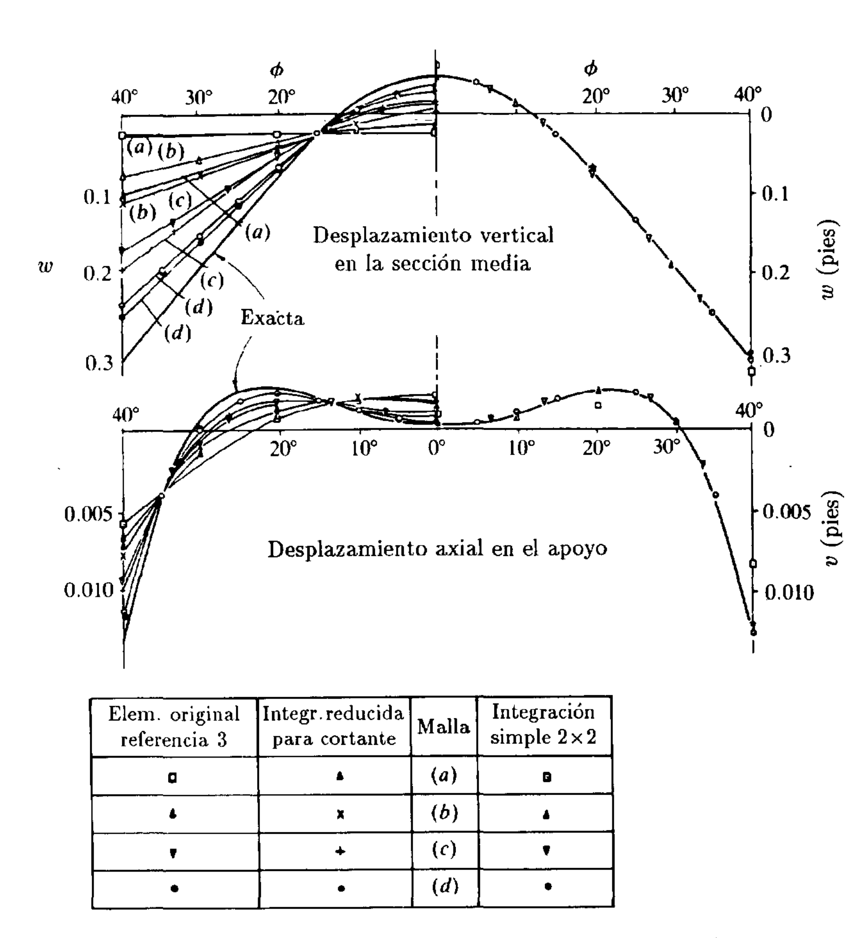
han representado en la Figura 5.11, pudiéndose apreciar para el caso de elementos parabólicos la influencia del orden de integración (con 3×3 y 2×2 puntos gaussianos). Como era de esperar, ambas soluciones convergen. Con la integración más exacta, la convergencia es más lenta, mientras que



Malla parabólica	
(a)	23
(b)	76
(c)	159
(d)	272

Figura 5.10 Ejemplo de lámina cilíndrica sometida a su propio peso.

con la integración reducida se obtienen resultados muy precisos, incluso con un solo elemento. Este ejemplo ilustra de manera espectacular las ventajas de este artificio tan simple; para más detalles se consultarán las referencias 7 y 9. La solución "exacta" de este problema ha sido obtenida por métodos más convencionales por Scordelis y Lo.[11]



Elem. original referencia 3	Integr. reducida para cortante	Malla	Integración simple 2×2
□	▲	(a)	■
▲	×	(b)	▲
▼	+	(c)	▼
•	•	(d)	•

Figura 5.11 Desplazamiento de la cubierta laminar cilíndrica (elemento parabólico).

Se puede comentar de paso que la mejora en la convergencia de los desplazamientos coincide con la de las componentes de la tensión.

5.10.4 *Torre de enfriamiento.* Se ha estudiado de nuevo la torre de enfriamiento a que nos referimos en el Capítulo 3 (Figuras 3.11 y 3.12), dividiendo la lámina de revolución en quince elementos de tercer orden. Las cargas asimétricas (el viento) quedaron adecuadamente representadas por diez armónicos y los resultados coinciden con los del estudio analítico cuyos resultados se habían comparado con los del Capítulo 3, de manera que no son necesarias representaciones gráficas adicionales.

5.10.5 *Presas bóveda.* Todos los ejemplos anteriores se referían a láminas más bien delgadas y han servido para demostrar que el procedimiento estudiado es aplicable a tales casos. En el otro extremo de la escala, esta formulación se ha aplicado también a presas de bóveda como las del Capítulo 8 del Volumen 1 (Figura 8.28). Se usó exactamente la misma subdivisión y *los resultados coinciden casi exactamente con los que se obtienen con el modelo tridimensional.*[3] Este extraordinario resultado va acompañado de una considerable economía de grados de libertad y de tiempo de ordenador.

Evidentemente el campo de aplicación de este tipo de elementos es muy amplio.

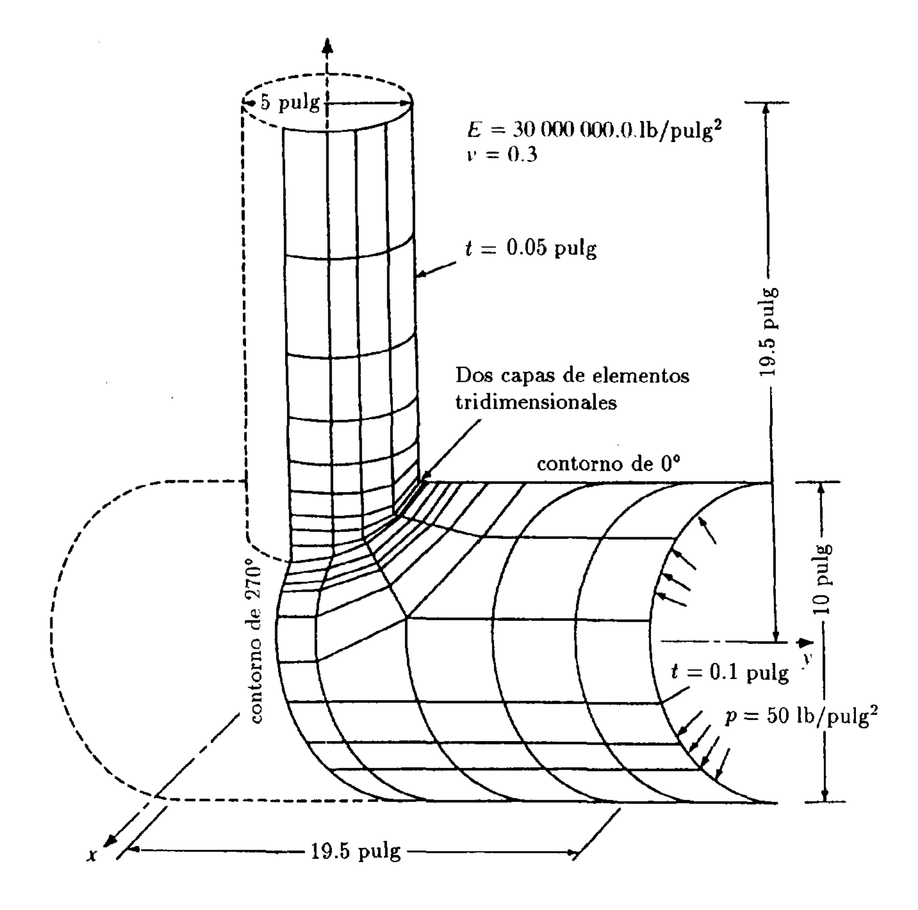
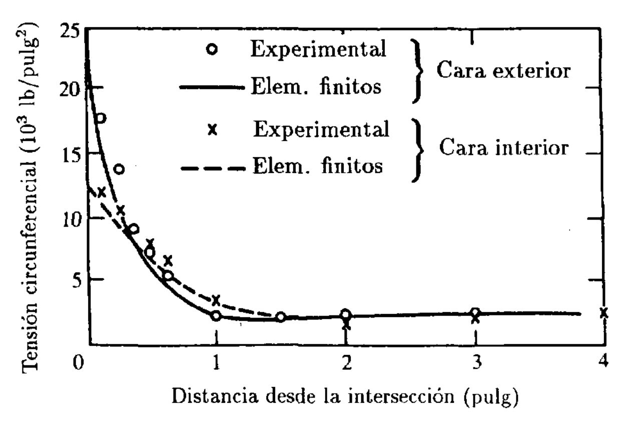
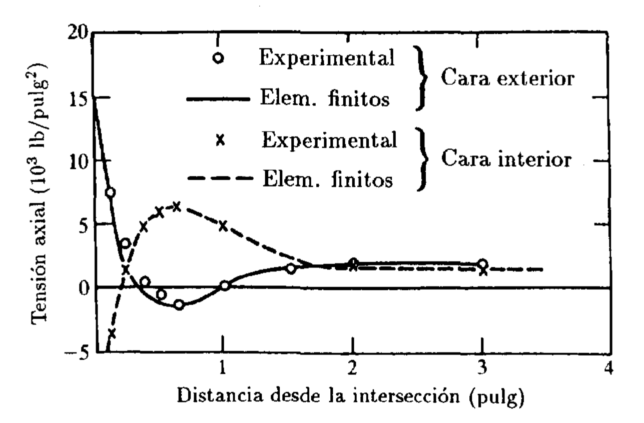


Figura 5.12 Análisis de una intersección de dos cilindros mediante elementos de lámina con integración reducida.[12]

5.10.6 *Intersección de tuberías*[12] *y bóveda esférica.*[10] Los dos últimos ejemplos que se ofrecen en las Figuras 5.12/13 y 5.14 ilustran la aplicación de elementos de formas irregulares. Ambos ejemplos se refieren a casos prácticos de algún interés y muestran que con la integración reducida se tiene un elemento general para problemas de láminas, aprovechable incluso cuando los elementos estén muy distorsionados.



(*a*) Tensiones circunferenciales en la proximidad del contorno de 0°



(*b*) Tensiones axiales en la proximidad del contorno de 0°

Figura 5.13 Intersección de dos cilindros de la Figura 5.12.

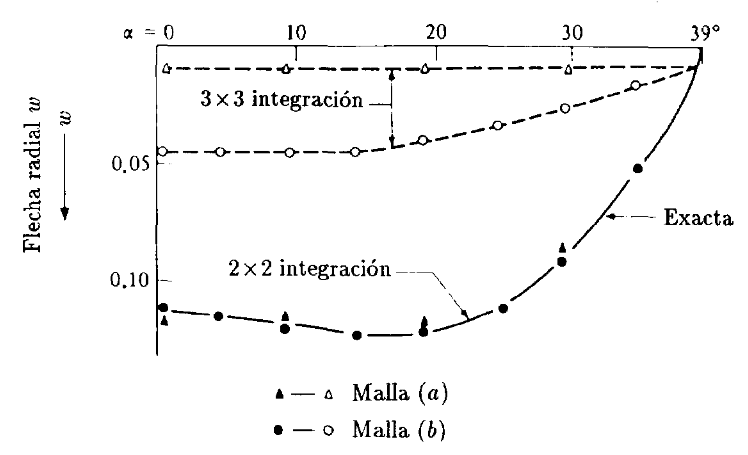


Figura 5.14 Análisis de una cubierta esférica con elementos de lámina isoparamétricos irregulares usando integración completa (3 × 3) y reducida (2 × 2).

5.11 Observaciones finales

Los elementos descritos en este capítulo elaborados mediante degeneración de elementos sólidos han resultado idénticos para problemas de placas de revolución a aquéllos en que se utilizan directamente interpolaciones independientes para desplazamientos y giros de un punto del plano

medio (ver Capítulos 2 y 4). Esta analogía es menos evidente para las láminas curvas más generales, pero existe claramente. Es de esperar, por tanto, que las condiciones establecidas en el Capítulo 2 para que los elementos de placa sean robustos sean válidas también aquí. Además, parece posible que deban imponerse otras condiciones adicionales en las diversas interpolaciones para elementos de formas curvas. Ambas observaciones son ciertas. Los elementos de ocho y nueve nodos, que como se ha mostrado en la sección anterior funcionan admirablemente bien, fallan en ciertas condiciones, y por esta razón muchos de los elementos de placa con más éxito han sido adaptados al problema de láminas.

La introducción de grados de libertad adicionales en el interior del elemento serendípito de ocho nodos fue sugerida primeramente por Cook,[13,14] y después por Hughes,[15,16] sin conseguir, sin embargo, una robustez completa. La interpolación lagrangiana cúbica completa es bastante eficaz, tal como se mostró en el Capítulo 2, y se ha demostrado que funciona bien. Sin embargo, los mejores resultados conseguidos hasta la fecha parecen ser aquéllos en los que se aplican "restricciones locales" (véase Capítulo 2, Sección 2.5) y los elementos tales como los de Dvorkin y Bathe[17] o Huang y Hinton[18] pertenecen a esta categoría.

Aún cuando ahora se comprende perfectamente la importancia de las restricciones de las deformaciones transversales de cortante, las restricciones debidas a las resultantes de tensiones "en el plano" son menos susceptibles de análisis (aunque los parámetros elásticos Et asociados a éstos son del mismo orden que los de cortante Gt). Se sabe que puede aparecer *bloqueo de membrana* en situaciones que no permitan flexión inextensible. Este bloqueo ha sido tratado repetidas veces,[19,20] pero hasta la fecha no se ha resuelto el problema de forma rigurosa y se llevan a cabo más investigaciones.

Continúa dedicándose mucho esfuerzo para mejorar la formulación de los procedimientos descritos en este capítulo, ya que probablemente son los que permitirán la solución óptima del problema de láminas curvas.[20–23]

Referencias

1. S. AHMAD, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems", en *Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1968.
2. S. AHMAD, "Curved finite elements in the analysis of solid, shell and plate structures", Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1969.
3. S. AHMAD, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Analysis of thick and thin shell structures by curved elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2**, 419–51, 1970.

4. R.D. WOOD, "The application of finite element methods to geometrically nonlinear analysis", Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1973.
5. R.D. WOOD y O.C. ZIENKIEWICZ, "Geometrically non-linear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells", *Comp. Struct.*, **7** 725–35, 1977
6. E.L. WILSON, "Finite elements for foundations, joints and fluids", en *Finite Elements in Geomechanics* (ed. G. Gudehus), Cap. 10, 319–50, Wiley, Chichester, 1977.
7. O.C. ZIENKIEWICZ, J. TOO y R.L. TAYLOR, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 275–90, 1971.
8. S.F. PAWSEY y R.W. CLOUGH, "Improved numerical integration of thick slab finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 575–86, 1971.
9. S.F. PAWSEY, Ph.D. thesis, Department of Structural Mechanics, University of California, Berkeley, 1970.
10. J.J.M. TOO, "Two dimensional, plate, shell and finite prism isoparametric elements and their applications", Ph. D. thesis, University of Wales, Swansea, 1971.
11. A.C. SCORDELIS y K.S. LO, "Computer analysis of cylindrical shells", *J. Am. Concr. Inst.*, **61**, 539–61, 1969.
12. S.A. BAKHREBAH y W.C. SCHNOBRICH, "Finite element analysis of interesting cylinders", UILU-ENG-73-2018, University of Illinois, Civil Engineering Studies, 1973.
13. R.D. COOK, "More on reduced integration and isoparametric elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **5**, 141–2, 1972.
14. R.D. COOK, *Concepts and Applications Finite Element Analysis*, Wiley, New York, 1974.
15. T.R.J. HUGHES y M. COHEN, "The "heterosis" finite element for plate bending", *Comp. Struct.*, **9**, 445–50, 1978.
16. T.J.R. HUGHES y W.K. LIU, "Non linear finite element analysis of shells", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **26**, 331–62; **27**, 167–81, 1981.
17. E.N. DVORKIN y K.J. BATHE, "A continuum mechanics based four noded shell element for non linear analysis", *Eng. Comput.*, **1**, 77–88, 1984.
18. E.C. HUANG y E. HINTON, "Elastic, plastic and geometrically non linear analysis of plates and shells using a new, nine noded element", en *Finite Elements for Non Linear Problems*, (eds P. Bergan *et al.*), 283–97, Springer Verlag, Berlin, 1986.
19. H. STOLARSKI y T. BELYTCHKO, "Shear and membrane locking in curved C^0 elements", *Comp. Mech. Appl. Mech. Eng.*, **41**, 279–96, 1983.

20. R.V. MILFORD y W.C. SCHNOBRICH, "Degenerated isoparametric finite elements using explicit integration", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, **23**, 133–54, 1986.
21. D. BUSHNELL, "Computerized analysis of shells–governing equation", *Comp. Struct.*, **18**, 471–536, 1984.
22. M.A. CELIA y N.G. GRAY, "Improved coordinate transformations for finite elements. The large cubic case", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, **23**, 1529–45, 1986.
23. S. VLACHOUTSIS, "Explicit integration for three dimensional degenerated shell finite elements", *Int. J. Num. Mech Eng.*, **29**, 861–80, 1990.

Capítulo 6

MÉTODOS SEMIANALÍTICOS. UTILIZACIÓN DE FUNCIONES ORTOGONALES

6.1 Introducción

Se ha demostrado que el método de los elementos finitos en su forma clásica permite abordar cualquier problema en dos, tres (o incluso cuatro)† dimensiones. A pesar de todo, el coste de la solución aumenta considerablemente con cada nueva dimensión introducida, y desde luego a veces pueden desbordarse las posibilidades de los ordenadores disponibles. Por tanto, es siempre deseable investigar procedimientos alternativos que permitan reducir el volumen de cálculos. En este capítulo presentamos uno de tales procedimientos cuyo campo de aplicación es muy amplio.

Hay muchos problemas físicos en los que la *geometría* o las *propiedades del material* no varían a lo largo de la dirección de uno de los ejes coordenados. Sin embargo, los términos de "carga" pueden presentar una variación en dicha dirección tal que impida la utilización de hipótesis simplificadoras, como las que permiten sustituir un estudio totalmente tridimensional por un análisis bidimensional de deformación plana. Aún en tales circunstancias es posible considerar un problema "equivalente" en el que no intervenga la coordenada particular (a lo largo de la cual no varían las propiedades), y obtener la solución correcta como síntesis de una serie de soluciones simplificadas.

El método a describir es de aplicación absolutamente general y evidentemente no se limita a problemas de estructuras. Será conveniente, sin embargo, emplear la terminología de la mecánica de estructuras y utilizar a título de ejemplo la minimización de la energía potencial.

Reduciremos nuestra atención a los problemas de minimización de un funcional de segundo grado del tipo descrito en los Capítulos 2 y 9 del Volumen 1. Adviértase también la interpretación de los métodos

† Ver en el Capítulo 10 el método de los elementos finitos en el dominio tiempo.

propuestos como una aplicación del proceso de discretización parcial del Capítulo 9 del Volumen 1 (página 235), seguido de la utilización de desarrollos en serie de Fourier.

Sean (x, y, z) las coordenadas que describen el dominio estudiado (en este contexto no tienen que ser necesariamente coordenadas cartesianas). La última de ellas, z, será la coordenada a lo largo de la cual las propiedades del material y la geometría son constantes, estando limitada entre dos valores

$$0 \leq z \leq a$$

Los valores en el contorno se especifican, pues, para $z = 0$ y para $z = a$.

Supondremos que las funciones de forma que definen la variación de los desplazamientos $\mathbf{u}$ se pueden escribir en forma de producto como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} =& \mathbf{N}(x,y,z)\mathbf{a}^e \\ =& \sum_{l=1}^{L} \left\{ \bar{\mathbf{N}}(x,y) \cos \frac{l\pi z}{a} + \bar{\bar{\mathbf{N}}}(x,y) \text{ sen } \frac{l\pi z}{a} \right\} \mathbf{a}_l^e \end{aligned} \tag{6.1}$$

Una representación de este tipo es siempre completa, en razón de la capacidad de las series de Fourier para representar cualquier función continua dentro de un dominio dado (suponiendo naturalmente que las funciones de forma $\bar{\mathbf{N}}$ y $\bar{\bar{\mathbf{N}}}$ satisfacen las mismas condiciones en el dominio x, y).

Los términos de carga se expresarán similarmente en la forma

$$\mathbf{b} = \sum_{l=1}^{L} \left(\bar{\mathbf{b}}_l \cos \frac{l\pi z}{a} + \bar{\bar{\mathbf{b}}}_l \text{ sen } \frac{l\pi z}{a} \right) \tag{6.2}$$

expresándose las cargas concentradas y las fuerzas repartidas en la superficie bajo formas similares a la anterior (véase el Capítulo 2 del Volumen 1).

Naturalmente, si existen tensiones y deformaciones iniciales se desarrollarán también según la expresión anterior.

Aplicando los procedimientos clásicos del Capítulo 2 del Volumen 1, para determinar la contribución del elemento a las ecuaciones de minimización de la energía potencial, y limitándonos a la contribución de las fuerzas $\mathbf{b}$ únicamente, se puede escribir

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}^e} = \mathbf{K}^e \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{a}_L^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{f}_L^e \end{Bmatrix} \tag{6.3}$$

En la expresión anterior, para evitar los signos de adición, los vectores $\mathbf{a}^e$, etc., se han desarrollado en l términos, siendo cada uno de ellos la contribución relativa para cada valor de l por separado.

Una submatriz típica de $\mathbf{K}^e$ viene dada ahora por

$$(\mathbf{K}^{lm})^e = \int\int\int_V \mathbf{B}^{lT} \mathbf{D} \mathbf{B}^m \, dx \, dy \, dz \tag{6.4}$$

y una componente típica del vector de "fuerzas" es

$$(\mathbf{f}^l)^e = \int\int\int_V \mathbf{N}^{lT} \mathbf{b}^l \, dx \, dy \, dz \tag{6.5}$$

Sin entrar en detalles, es evidente que la matriz definida por (6.4) contendrá en los productos de sus diversas submatrices las integrales siguientes:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \text{sen } \frac{l\pi z}{a} \cos \frac{m\pi z}{a} \, dz \\ I_2 &= \int_0^a \text{sen } \frac{l\pi z}{a} \text{ sen } \frac{m\pi z}{a} \, dz \\ I_3 &= \int_0^a \cos \frac{l\pi z}{a} \cos \frac{m\pi z}{a} \, dz \end{aligned} \tag{6.6}$$

Estas integrales provienen de los productos de las derivadas contenidas en la definición de $\mathbf{B}$, y debido a la conocida propiedad de la ortogonalidad de las funciones armónicas se tiene

$$I_2 = I_3 = 0 \quad \text{para } l \neq m \tag{6.7}$$

cuando $l = 1, 2, \ldots$ y $m = 1, 2 \ldots$

I_1 sólo es cero cuando l y m son ambos pares o impares. Sin embargo, el término que contiene I_1 desaparece en la mayoría de los casos.

Ello significa que la matriz $\mathbf{K}^e$ se hace diagonal y que el sistema resultante de ecuaciones tras el ensamblaje es de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & & & \\ & \mathbf{K}^{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{K}^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_L \end{Bmatrix} = 0 \tag{6.8}$$

y el sistema de ecuaciones se desdobla en L problemas separados:

$$\mathbf{K}^{ll}\mathbf{a}_l + \mathbf{f}^l = 0 \tag{6.9}$$

en donde

$$\mathbf{K}_{ij}^{ll} = \int\int\int_V \mathbf{B}_i^{lT}\mathbf{D}\mathbf{B}_j^l \, dx\, dy\, dz, \quad \text{etc.} \tag{6.10}$$

Además, observamos de las Ecs. (6.5) y (6.2) que, debido a la ortogonalidad de las integrales (6.6), los términos de carga se hacen simplemente

$$\mathbf{f}_i^l = \int\int\int_V \mathbf{N}_i^{lT}\mathbf{b}^l \, dx\, dy\, dz \tag{6.11}$$

Esto significa que el l-ésimo término armónico del vector de fuerzas sólo afecta al l-ésimo sistema de Ecs. (6.9) y no interviene en absoluto en las otras ecuaciones. Esta importante propiedad es de considerable interés práctico, *puesto que si el desarrollo de los términos de carga sólo contiene un término, sólo será necesario resolver un único sistema de ecuaciones.* La solución de este sistema tenderá hacia la solución exacta al hacerse más tupida la malla únicamente en el dominio x-y. Por consiguiente, lo que originalmente era un problema tridimensional se ha reducido ahora a uno bidimensional, con la consiguiente disminución del volumen de cálculo necesario.

Los razonamientos anteriores se han ilustrado para una situación de elasticidad tridimensional. Es evidente que podían haberse seguido los mismos razonamientos para reducir problemas bidimensionales a unidimensionales, etc., puesto que los razonamientos no están restringidos a problemas de elasticidad. Todo problema físico regido por la minimización de un funcional cuadrático (Capítulo 9 del Volumen 1), o por ecuaciones diferenciales lineales, es susceptible de un tratamiento similar, que bajo diferentes formas ha sido utilizado desde tiempo inmemorial en mecánica aplicada.

Es preciso una nota de atención en lo que concierne a las condiciones de contorno impuestas a $\mathbf{u}$. Para que sea posible una separación completa, éstas deben satisfacerse separadamente para cada uno de los términos del desarrollo expresado en (6.1). La introducción de un desplazamiento nulo en la formulación final del problema reducido implica de hecho que dicho desplazamiento es por definición nulo a lo largo de la dirección z. Así pues, debe tenerse cuidado para no tratar la matriz final como si se tratase de un simple problema reducido. Esto constituye en realidad una de las limitaciones del procedimiento descrito.

Cuando las cargas son complicadas y es preciso considerar muchos términos del desarrollo de Fourier, las ventajas del método esbozado disminuyen y la solución directa resulta a veces más económica.

Obviamente, se pueden obtener otras permutaciones de las definiciones básicas dadas en (6.1). Por ejemplo, se pueden definir dos sistemas independientes de parámetros $\mathbf{a}^e$, y asociarlos separadamente a cada uno de los términos trigonométricos. En ciertos casos incluso pueden utilizarse otras funciones ortogonales. Como las funciones trigonométricas aparecerán con frecuencia, es conveniente recordar al lector las integrales siguientes

$$\begin{aligned} &\int_0^a \operatorname{sen}\frac{l\pi z}{a}\cos\frac{l\pi z}{a}\,dz = 0 && \text{donde } l = 0,\ 1,\ \ldots \\ &\int_0^a \operatorname{sen}^2\frac{l\pi z}{a}\,dz = \int_0^a \cos^2\frac{l\pi z}{a}\,dz = \frac{a}{2} && \text{donde } l = 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned} \tag{6.12}$$

6.2 Barra prismática

Consideremos una barra prismática como la representada en la Figura 6.1, que se supone fija en $z = 0$ y $z = a$ de manera que se impiden todos los desplazamientos en el plano x–y, pero no se impone ninguna restricción a los desplazamientos en la dirección z (fuerza de superficie $t_z = 0$). El problema es completamente tridimensional y se han de considerar las tres componentes u, v y w, del desplazamiento.

Dividiendo el plano x–y en elementos finitos, se puede definir la componente l-ésima del desplazamiento paralela a la dirección del eje x, por

$$u^l = [N_1, N_2, \ldots] \operatorname{sen}\frac{l\pi z}{a}\mathbf{u}^l \tag{6.13}$$

teniendo v^l y w^l expresiones similares pero figurando un coseno en la de esta última.

En estas expresiones N, etc., son simplemente las funciones de forma (escalares) del elemento plano utilizado. Si tal como se muestra en la Figura 6.1 se usan triángulos simples, las funciones de forma vienen dadas entonces por la expresión (4.8) del Capítulo 4 del Volumen 1, pero igualmente se podría emplear cualquiera de los elementos más elaborados estudiados en el Capítulo 7 del Volumen 1 (con o sin la transformación del Capítulo 8 del Volumen 1).

El desarrollo utilizado asegura que los desplazamientos u y w e igualmente las tensiones axiales son nulos en los extremos.

Los términos de carga pueden también expresarse en función de series de Fourier similares; las componentes contenidas en el plano x–y tienen la expresión

$$\mathbf{b}^l = \bar{\bar{\mathbf{b}}}^l \operatorname{sen} \frac{l\pi z}{a} \qquad \bar{\bar{\mathbf{b}}}^l = \bar{\bar{\mathbf{b}}}^l(x,y) \tag{6.14}$$

Como el problema es de naturaleza tridimensional, es preciso considerar la expresión completa de la deformación haciendo intervenir sus seis componentes. Esta expresión se dio en el Capítulo 6 del Volumen 1 en las Ecs. (6.9)-(6.11). Sustituyendo en ellas las funciones de forma definidas por (6.13), se tiene para un término típico de la matriz $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B}_i^l = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x}\operatorname{sen}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -N_i\frac{l\pi}{a}\operatorname{sen}\gamma \\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma & \frac{\partial N_i}{\partial x}\operatorname{sen}\gamma & 0 \\ 0 & N_i\frac{l\pi}{a}\cos\gamma & \frac{\partial N_i}{\partial y}\cos\gamma \\ N_i\frac{l\pi}{a}\cos\gamma & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x}\cos\gamma \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

siendo $\gamma = l\pi z/a$. Conviene separar la expresión anterior en dos términos así

$$\mathbf{B}_i^l = \bar{\mathbf{B}}_i^l \operatorname{sen}\frac{\pi l z}{a} + \bar{\bar{\mathbf{B}}}_i^l \cos\frac{\pi l z}{a} \tag{6.16}$$

En todo lo que precede, se ha supuesto que los parámetros nodales están ordenados según el convenio habitual:

$$\mathbf{a}_i^l = \begin{Bmatrix} u_i^l \\ v_i^l \\ w_i^l \end{Bmatrix} \tag{6.17}$$

y que los ejes están orientados como se representa en la Figura 6.1.

La matriz de rigidez puede calcularse en la forma habitual advirtiendo que

$$(\mathbf{K}_{ij}^{ll})^e = \int\int\int_{V^e} \mathbf{B}_i^{lT}\mathbf{D}\mathbf{B}_j^l \, dx\, dy\, dz \tag{6.18}$$

Sustituyendo $\mathbf{B}_i^{lT}$ y $\mathbf{B}_j^{lT}$ por sus expresiones dadas por (6.16) se obtiene, tras multiplicar y teniendo en cuenta el valor de las integrales (6.12),

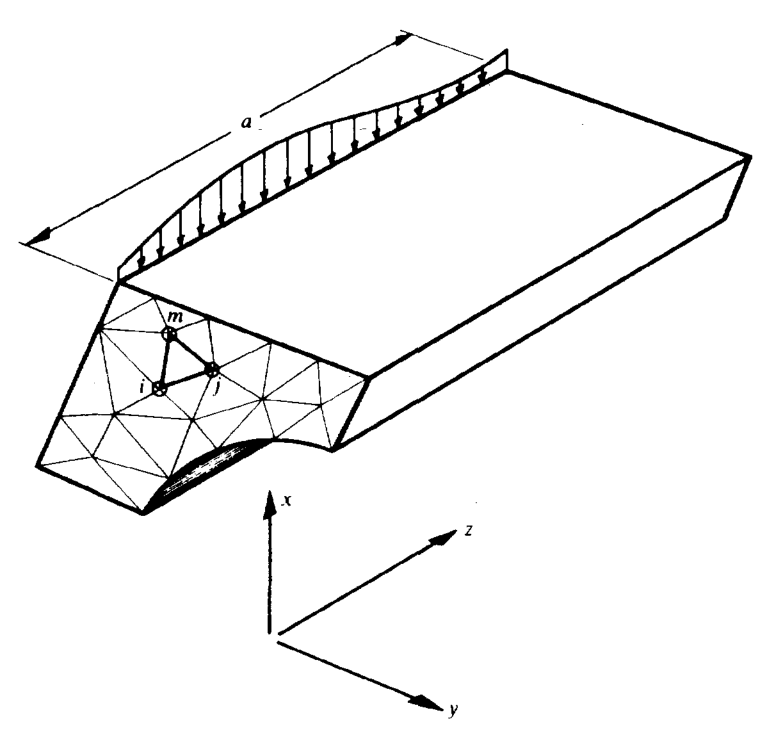


Figura 6.1 Barra prismática reducida a una serie de soluciones de elementos finitos bidimensionales.

$$(\mathbf{K}_{ij}^{ll})^e = \frac{a}{2}\int\int_{A^e} \{\bar{\mathbf{B}}_i^{lT}\mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}_j^l + \bar{\bar{\mathbf{B}}}_i^l\mathbf{D}\bar{\bar{\mathbf{B}}}_j^l\}\, dx\, dy \tag{6.19}$$

para $l = 1, 2, \ldots$. La integración se efectúa ahora simplemente sobre la *superficie* del elemento.†

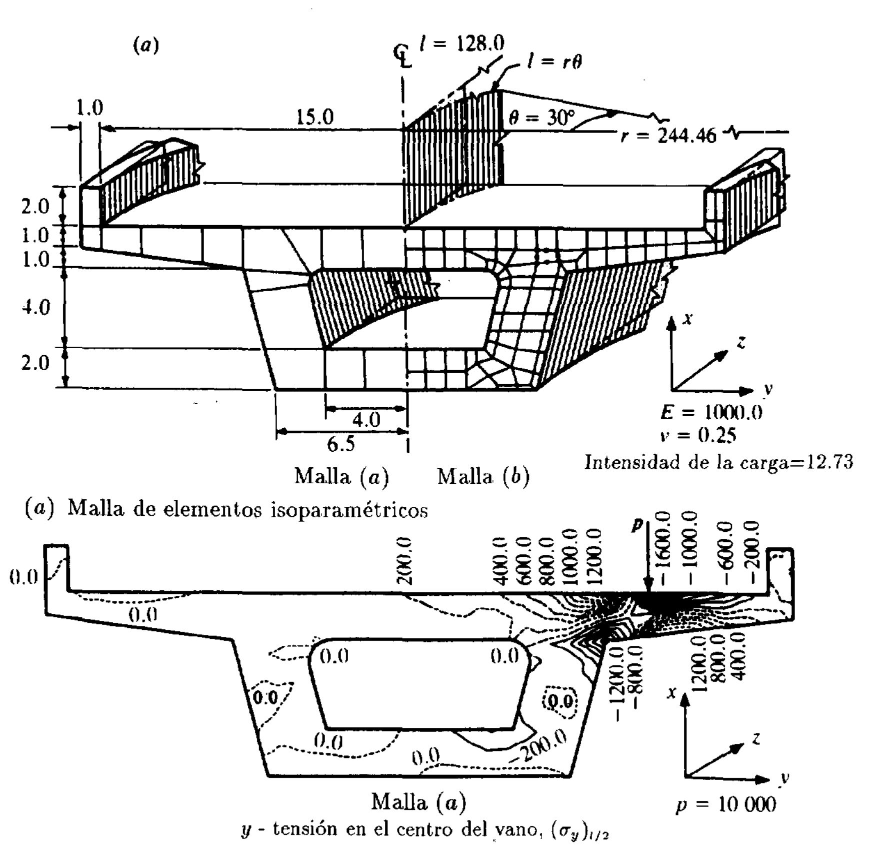
De igual forma se obtienen los términos debidos a cargas repartidas, tensiones iniciales, etc. Las cargas repartidas a lo largo de líneas, por ejemplo, se expresarían directamente como fuerzas nodales por

$$\mathbf{f}_i^l = \int_0^a \operatorname{sen}\frac{\pi l z}{a} \begin{Bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{f}}}_{xi}^l \\ \bar{\bar{\mathbf{f}}}_{yi}^l \\ \bar{\bar{\mathbf{f}}}_{zi}^l \end{Bmatrix} \operatorname{sen}\frac{\pi l z}{a}\, dz = \frac{a}{2}\bar{\bar{\mathbf{f}}}_i^l \tag{6.20}$$

† Adviértase que ahora, incluso para el caso del triángulo simple, la integración ya no es trivial, puesto que en $\bar{\bar{\mathbf{B}}}$ hay algunos términos lineales.

donde $\bar{\bar{\mathbf{f}}}_i^l$ son las intensidades de carga por unidad de longitud.

Las condiciones de contorno que en este caso se han impuesto equivalen a suponer que el prisma tiene sus extremos *simplemente apoyados*. Pueden imponerse otras condiciones mediante los desarrollos apropiados.



(b) Distribución de la tensión σ_y en el centro del vano dibujada por el computador. Carga puntual en los voladizos

Figura 6.2 Puente en cajón de paredes gruesas con tablero recto o curvo.

El método bosquejado puede aplicarse a una gran variedad de problemas prácticos entre los que puede citarse, por ejemplo, el tipo de puente de hormigón que se muestra en la Figura 6.2. En este caso es particularmente cómodo utilizar el elemento distorsionado "serendípito" de segundo o tercer orden de los Capítulos 7 y 8 del Volumen 1.[1] Finalmente, es preciso

señalar que se puede prescindir de algunas de las restricciones impuestas a las funciones definidas por (6.1) o (6.13) duplicando el número de parámetros y escribiendo desarrollos en forma de dos sumas:

$$\mathbf{u} = \sum_{l=1}^{L} \bar{\mathbf{N}}(x,y) \cos \frac{l\pi z}{a} \mathbf{a}^{Al} + \sum_{l=1}^{L} \bar{\bar{\mathbf{N}}}(x,y) \text{ sen } \frac{l\pi z}{a} \mathbf{a}^{Bl} \tag{6.21}$$

Los parámetros $\mathbf{a}^{Al}$ y $\mathbf{a}^{Bl}$ son independientes y para cada componente del desplazamiento hay que determinar dos valores y formar dos ecuaciones.

Otra solución consiste en escribir el desarrollo como

$$\mathbf{u} = \sum [\mathbf{N}(x,y) e^{i(l\pi z/a)}] \mathbf{a}^e$$

y observar que **N** y **a** son cantidades complejas.

Los ordenadores modernos permiten hoy día operar con números complejos. Se advertirá que la expresión anterior es idéntica a la (6.21), teniendo en cuenta que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \text{ sen } \theta$$

6.3 Estructuras celulares de paredes delgadas

En la sección precedente se ha reducido un problema tridimensional a otro bidimensional. Vamos a ver ahora cómo un problema similar puede reducirse a elementos unidimensionales (Figura 6.3).

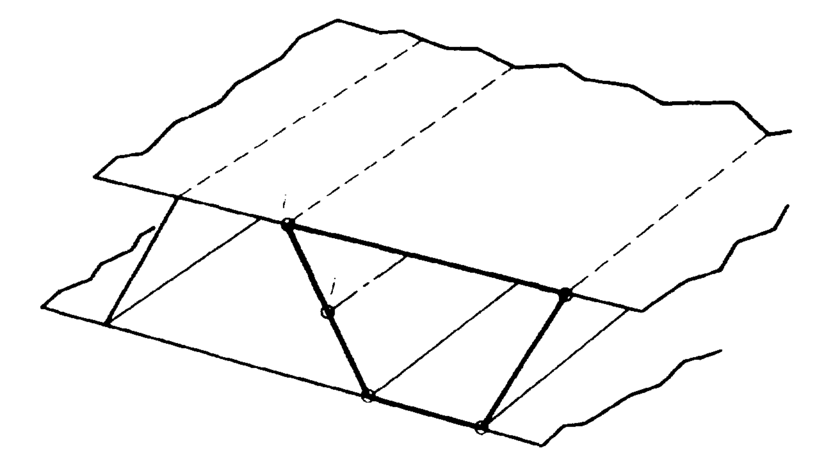


Figura 6.3 Estructura celular "de membrana" analizada con elementos unidimensionales.

Una estructura celular está compuesta de lajas delgadas capaces de resistir únicamente tensiones que actúen en sus planos.

Aquí, como en el caso anterior, hemos de considerar tres desplazamientos en cada punto para los que se podrá definir la misma variación que en la sección anterior. Sin embargo, un elemento típico ij es "unidimensional" en el sentido de que las integraciones sólo han de efectuarse a lo largo de la línea ij y únicamente hay que considerar tensiones en esa dirección. Se encontrará además que esta configuración y su solución son similares a las de un entramado formado por barras articuladas.

6.4 Placas y estructuras celulares bajo flexión

Consideremos ahora una placa rectangular simplemente apoyada en sus extremos en la que toda la energía de deformación está almacenada bajo forma de flexión. El estado de deformación puede definirse completamente en función de un único desplazamiento w (véase el Capítulo 1).

Por razones de coherencia en la notación, la dirección a lo largo de la cual la geometría y las propiedades del material no varían se ha tomado paralela al eje y (véase Figura 6.4). Para que la pendiente sea continua, es preciso incluir en las funciones el parámetro θ_i correspondiente al "giro".

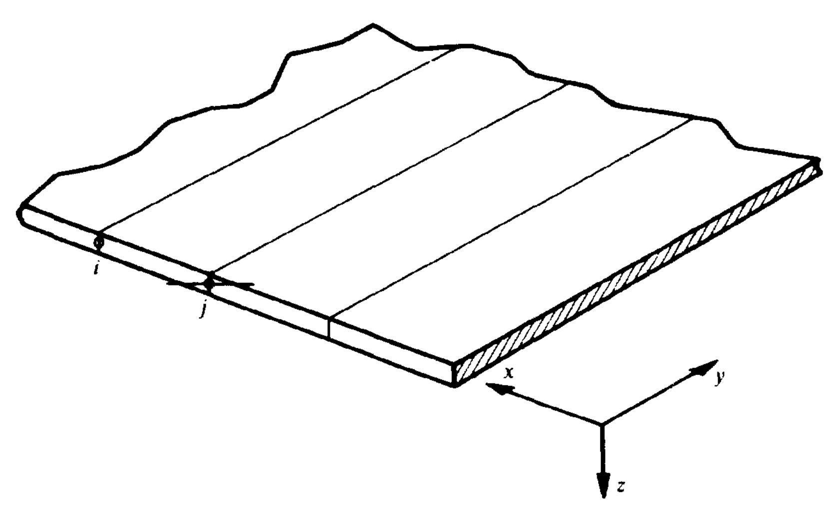


Figura 6.4 Aplicación del método de la "banda finita" en losas.

Las funciones de desplazamiento son simplemente las correspondientes a elementos de tipo viga. Para un elemento tal como el ij, podemos escribir

$$w^l = \bar{\mathbf{N}}(x) \text{ sen } \frac{l\pi z}{a}(\mathbf{a}^l)^e \tag{6.22}$$

asegurando las condiciones de *apoyo simple* en los extremos. Los parámetros nodales son ahora

$$\mathbf{a}_i^l = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \tag{6.23}$$

Se pueden escribir fácilmente las funciones de forma cúbicas que son, en realidad, idénticas a las que se emplearon en los problemas de láminas de revolución (Capítulo 4).

TABLA 6.1
PLACA CUADRADA. CARGA UNIFORME q
Simplemente apoyada en tres lados, uno empotrado

$v = 0.3$	Flecha en el centro	M_x en el centro	Máx. M negativo
$l = 1$	0·002832	0·0409	-0·0858
$= 2$	-0·000050	-0·0016	0·0041
$= 3$	0·000004	0·0003	-0·0007
$\sum$	0·002786	0·0396	-0·0824
Exacta	0·0028	0·039	-0·084
Factor	qa^4/D	qa^2	

Empleando las definiciones del Capítulo 1 se determinan las deformaciones (curvaturas) y la matriz $\mathbf{B}$. Los criterios de continuidad C_1 se satisfacen ahora de manera trivial. Así pues, se ha reducido un problema bidimensional a otro unidimensional.

Esta aplicación ha sido desarrollada por Cheung y otros,[2–17] quienes la denominan método de la "banda finita", y ha servido para resolver diversos problemas de placas rectangulares, puentes en cajón, láminas y placas plegadas de los más diversos tipos.

Sirve de aclaración citar un ejemplo contenido en los artículos anteriormente citados. Se refiere a una placa cuadrada bajo carga uniforme

y simplemente apoyada en tres lados y con el otro empotrado. Para su solución se utilizaron diez bandas o elementos en la dirección x y en la Tabla 6.1 se dan los resultados para los tres primeros armónicos.

No solamente es fácil obtener la solución relativa a cada término l, ya que sólo hace intervenir nueve incógnitas, sino además se aprecia que la importancia de los términos de mayor orden de las series decrece rápidamente.

La extensión de estos procedimientos a estructuras celulares en las que intervienen a la vez *efectos de membrana y de flexión* es casi evidente, sin más que considerar la combinación de este ejemplo con los de la sección precedente.

En otro artículo, Cheung[5] muestra cómo pueden emplearse con éxito funciones distintas a las trigonométricas, aunque entonces no se obtiene más que un desacoplamiento parcial de los armónicos.

En los ejemplos citados se ha hecho uso de la teoría de placas delgadas, utilizando como única variable la flecha w y haciendo que se cumplieran las condiciones de continuidad C_1 en la dirección x. Es evidente que podrían volver a emplearse en este caso cualquiera de los elementos de interpolaciones independientes para desplazamientos y giros del Capítulo 2, utilizando integración reducida. Así, en las referencias 6 y 7 se emplearon elementos del tipo parabólico, y en las referencias 8 y 47 se demuestra la eficacia de la interpolación lineal con un único punto de integración.

Abundan otras aplicaciones a estructuras de placas y celulares en las referencias 48 a 50 y en el texto de la referencia 17 podrá encontrarse información adicional.

6.5 Sólidos de revolución sometidos a carga asimétrica

Una de las aplicaciones más naturales de este tipo de desarrollos en series de Fourier, e incluso una de las primeras en efectuarse, se presenta en el estudio de sólidos de revolución sometidos a cargas asimétricas.

Se han de considerar ahora no solamente los desplazamientos radial (u) y axial (v) (como en el Capítulo 4 del Volumen 1), sino también una componente, w, asociada a una dirección angular θ (Figura 6.5). En esa dirección no varían ni la geometría ni las propiedades del material; es pues en ella en la que se aplica la eliminación.

Para simplificar la exposición, consideremos en primer lugar las componentes de carga simétricas con respecto al eje $\theta = 0$ y después, por separado, las componentes antisimétricas. Considerando ahora solamente

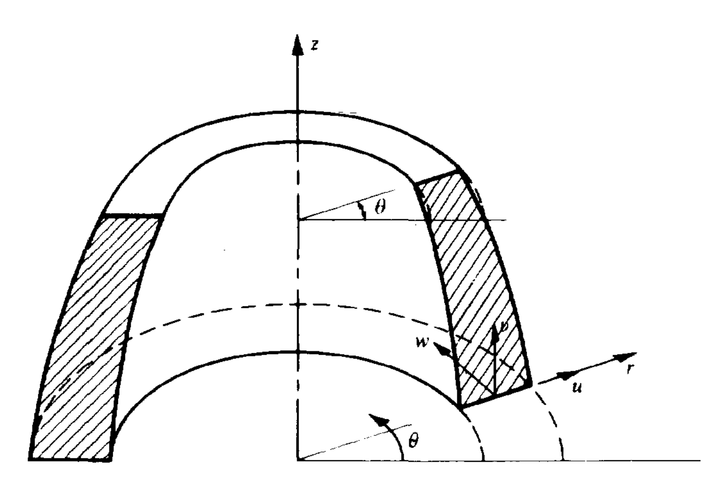


Figura 6.5 Coordenadas y componentes del desplazamiento en un cuerpo de revolución.

$$R = \sum_{1}^{L} \bar{R}^{l} \cos l\theta$$
$$Z = \sum_{1}^{L} \bar{Z}^{l} \cos l\theta \qquad (6.24)$$
$$T = \sum_{1}^{L} \bar{T}^{l} \operatorname{sen} l\theta$$

que definen las componentes paralelas a los ejes de coordenadas para la carga simétrica [Figura 6.6(a)]. Se utiliza para T un desarrollo en función del seno, que aparentemente no es simétrico, ya que para obtener simetría la dirección de T tiene que cambiar para $\theta > \pi$.

Las componentes del desplazamiento se definen de nuevo en función de las funciones de forma bidimensionales (r, z) correspondientes al tipo de elemento adoptado para la división. Haciendo uso de la simetría, escribiremos como en (6.3)

$$u^{l} = [N_1, N_2, \ldots] \cos l\theta \{\mathbf{u}^{l}\}^{e}$$

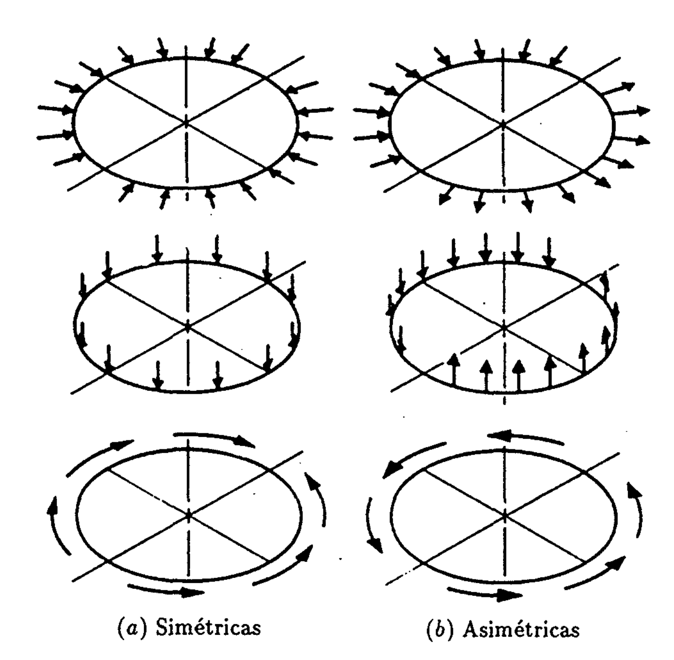


Figura 6.6 Cargas y componentes de los desplazamientos en un cuerpo de revolución.

Para seguir adelante es necesario escribir las expresiones tridimensionales de las deformaciones en coordenadas cilíndricas. O sea (véase Love[18])

$$
\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} + \dfrac{\partial w}{\partial r} - \dfrac{w}{r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad (6.26)
$$

Como antes, se observará un desacoplamiento entre los diversos modos y puede procederse al cálculo de las matrices de rigidez, etc., para cada

armónico. Tras sustituir (6.25) en (6.26) y agrupando las variables como en (6.17), se obtiene la expresión:

$$
\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r}\cos l\theta & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\cos l\theta & 0 \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial r}\cos l\theta & 0 & \dfrac{lN_i}{r}\cos l\theta \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\cos l\theta & \dfrac{\partial N_i}{\partial r}\cos l\theta & 0 \\ -\dfrac{lN_i}{r}\,\mathrm{sen} l\theta & 0 & \left(\dfrac{\partial N_i}{\partial r} - \dfrac{N_i}{r}\right)\mathrm{sen} l\theta \\ 0 & -\dfrac{lN_i}{r}\,\mathrm{sen}\theta & \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\,\mathrm{sen} l\theta \end{bmatrix} \qquad (6.27)
$$

Los pasos restantes de la formulación siguen exactamente el mismo camino establecido anteriormente y el lector puede repetirlos como ejercicio.

Para las cargas antisimétricas de la Figura 6.6(*b*) bastará simplemente intercambiar senos y cosenos en las ecuaciones (6.24) y (6.25).

Los términos de carga relativos a cada armónico se obtendrán a partir del teorema de los trabajos virtuales como

$$
\mathbf{f}_i^l = \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \bar{R}^l \cos^2 l\theta \\ \bar{Z}^l \cos^2 l\theta \\ \bar{T}^l \mathrm{sen}^2 l\theta \end{Bmatrix} d\theta = \pi \begin{Bmatrix} \bar{R}^l \\ \bar{Z}^l \\ \bar{T}^l \end{Bmatrix} \text{ cuando } l = 1, 2, \ldots
$$

$$
= 2\pi \begin{Bmatrix} \bar{R}^l \\ \bar{Z}^l \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ cuando } l = 0 \qquad (6.28)
$$

para el caso simétrico. Similarmente, para el antisimétrico

$$
\mathbf{f}_i^l = \pi \begin{Bmatrix} \bar{R}^l \\ \bar{Z}^l \\ \bar{T}^l \end{Bmatrix} \text{ cuando } l = 1, 2, \ldots
$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{T}^l \end{Bmatrix} \quad \text{cuando } l = 0 \tag{6.29}$$

De estas expresiones y del desarrollo en serie de $\mathbf{K}^e$ se deduce, como era de esperar, que para $l = 0$ el problema se reduce a sólo dos variables, o sea, que si las cargas son simétricas se tiene el caso de simetría axial.

Similarmente, cuando $l = 0$ sólo queda un sistema de ecuaciones con w como variable para el caso antisimétrico. Esto corresponde a una tracción tangencial constante y proporciona la solución a problemas de torsión de árboles de transmisión sometidos a momentos torsores (Figura 6.7). Este problema, que se trata de una manera clásica utilizando una función de tensiones[19] ha sido efectivamente resuelto mediante elementos finitos.[20] El método expuesto proporciona, por tanto, un procedimiento alternativo físicamente más real.

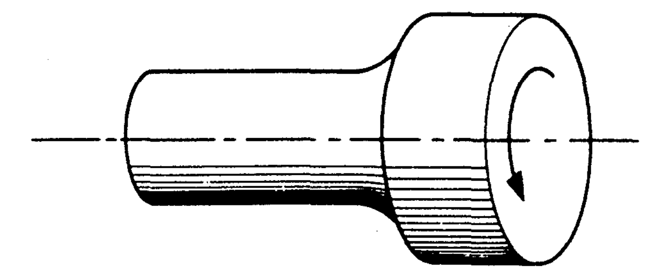


Figura 6.7 Torsión de un árbol de sección variable.

La primera aplicación de los conceptos anteriores para análisis de sólidos de revolución se debe a Wilson.[21]

En las Figuras 6.8(a) y (b) se muestra un ejemplo sencillo que ilustra la influencia de los distintos armónicos.

6.6 Láminas de revolución sometidas a carga asimétrica

Es relativamente sencillo extender el estudio de las láminas de revolución efectuado en el Capítulo 4 al caso de cargas asimétricas. Se seguirá una vez más el mismo esquema.

Sin embargo, es necesario completar la definición de las deformaciones y hacer intervenir ahora las tres componentes de fuerza y de desplazamiento (Figura 6.9). Aparecen en este caso tres efectos de membrana y tres de flexión, y ampliando la expresión (6.1) se pueden definir las deformaciones como[22,23]†

$$\varepsilon! = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} + (w\cos\phi + u\,\mathrm{sen}\phi)\dfrac{1}{r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v}{\partial s} - v\,\mathrm{sen}\phi\,\dfrac{1}{r} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v}{\partial \theta}\dfrac{\cos\phi}{r^2} - \dfrac{\mathrm{sen}\phi}{r}\dfrac{\partial w}{\partial s} \\ 2\left(-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 w}{\partial s\partial\theta} + \dfrac{\mathrm{sen}\phi}{r^2}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} + \dfrac{\cos\phi}{r}\dfrac{\partial v}{\partial s} - \dfrac{\mathrm{sen}\phi\cos\phi}{r^2}v\right) \end{Bmatrix} \tag{6.30}$$

La correspondiente matriz de tensiones es

$$\sigma = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} \tag{6.31}$$

estando los tres "esfuerzos" de membrana y de flexión definidos como se muestra en la Figura 6.9.

Como en la sección precedente, se distinguirán las variaciones simétricas y antisimétricas de cargas y desplazamientos.

Puesto que los cálculos subsiguientes son obvios, no es preciso seguir adelante con su desarrollo, sin embargo, llamaremos otra vez la atención acerca de las formas más elaboradas que ofrecen las ecuaciones cuando intervienen elementos curvos [véase Capítulo 4, Ec. (4.6)].

† Se presentan aquí varias alternativas debido a la multiplicidad de las teorías de láminas. La que se ha seguido está generalmente aceptada.

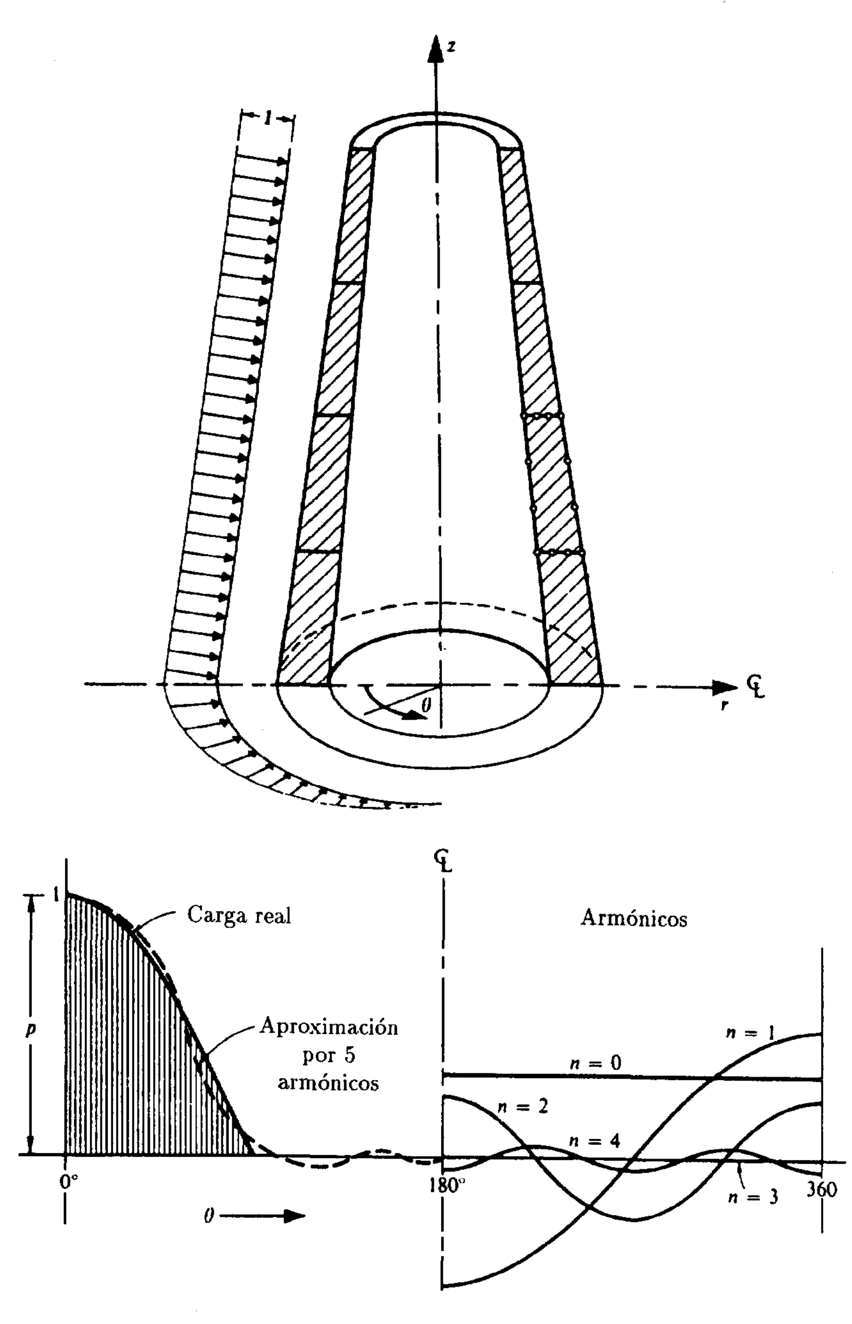


Figura 6.8*a* Torre de revolución bajo carga asimétrica. Solución mediante cuatro elementos cúbicos. Se muestran los armónicos del desarrollo de la carga empleado en el análisis.

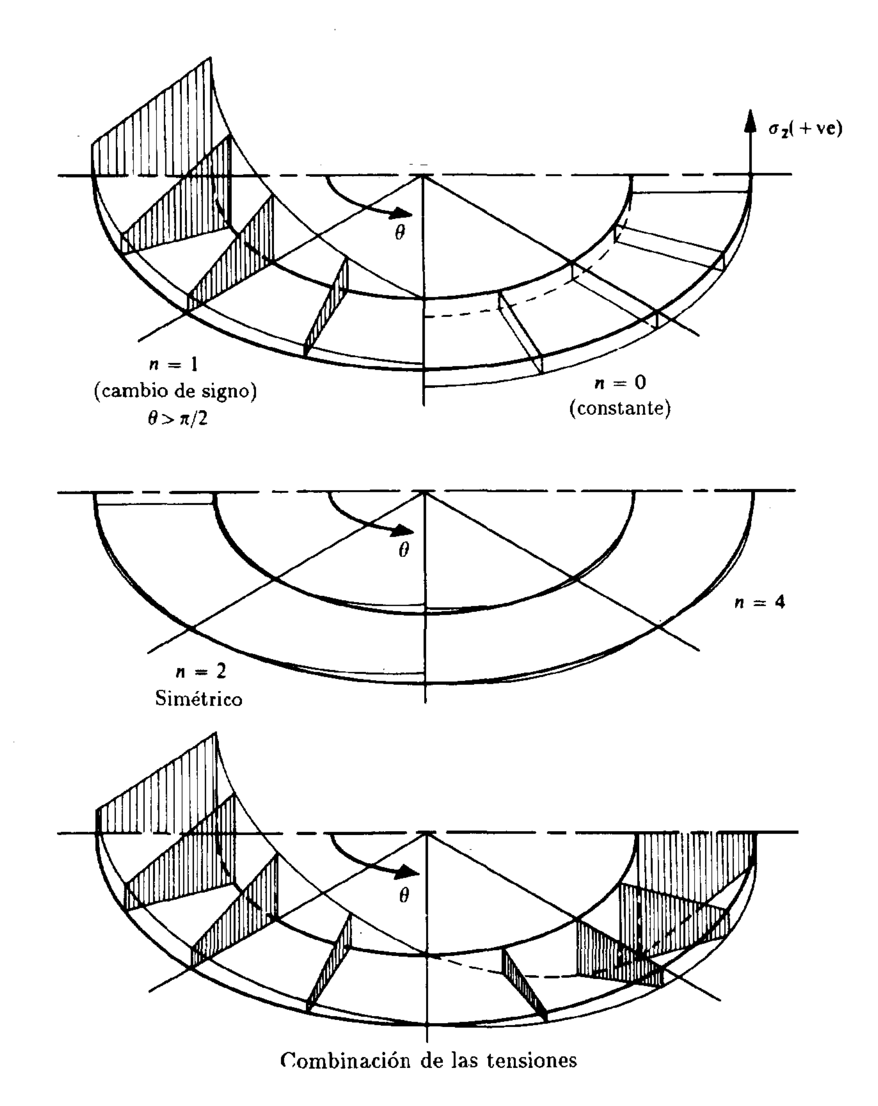


Figura 6.8*b* Distribución de la tensión vertical, σ_z, en la base debida a los distintos armónicos y a su combinación (el tercer armónico es idénticamente nulo). La solución se obtiene prácticamente con los dos primeros armónicos.

Se remite al lector al artículo original de Grafton y Strome[23] en el que se trata por primera vez este problema, y a los numerosos artículos posteriores acerca del mismo tema reseñados en el Capítulo 4.

En el Capítulo 5 se vieron algunos ejemplos de aplicación de este método al estudio de láminas de pared gruesa.

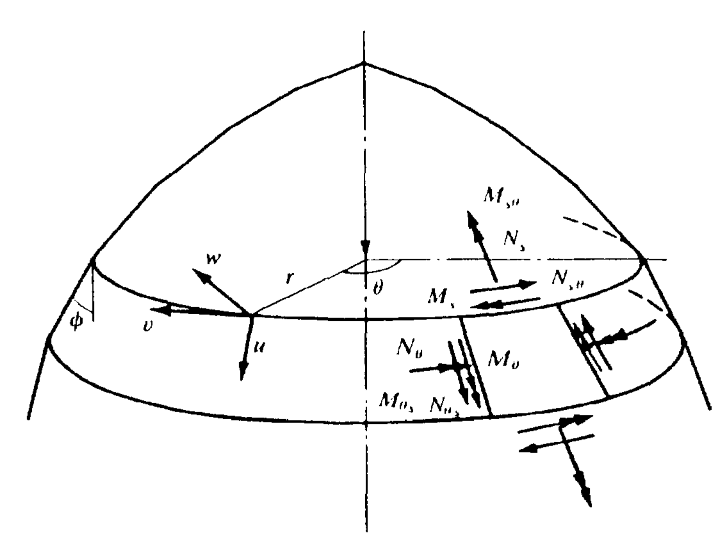


Figura 6.9 Lámina de revolución bajo carga asimétrica. Desplazamientos y tensiones resultantes.

6.7 Método de la banda finita –desacoplamiento incompleto–

Las secciones precedentes se basaban exclusivamente en el uso de funciones armónicas ortogonales en la dirección longitudinal/circunferencial. Sin embargo, el método de la banda finita desarrollado por Cheung[17] puede utilizarse de hecho para resolver problemas estructurales que involucren diferentes condiciones de contorno y formas geométricas arbitrarias, a expensas de introducir un cierto grado de acoplamiento.

Como se ha dicho antes, el método de la banda finita requiere utilizar funciones de desplazamientos del tipo multiplicativo (similar al método de separación de variables en ecuaciones diferenciables), combinando polinomios sencillos de elementos finitos en una dirección, y desarrollos en serie o funciones tipo fleje (spline) continuas y diferenciables en la otra. El primer tipo, que coincide con lo anteriormente explicado, se denomina método de la banda finita semianalítico, y las series deben escogerse de manera que satisfagan *a priori* las condiciones de contorno en los extremos de la banda. El segundo tipo se denomina método de la banda finita de fleje, en el que usualmente se utilizan funciones de fleje cúbicas (B_3) y las condiciones de contorno se incorporan *a posteriori*. En este caso, para una banda en la que un problema bidimensional se reduce a otro unidimensional, el campo de desplazamientos definido previamente por la Ec. (6.22) se supone de la forma

$$w^e = \sum_{n=1}^{r} \bar{\mathbf{N}}(x) Y_n(y) (\mathbf{a}")^e \tag{6.32}$$

donde $Y_n(y)$ son funciones continuas adecuadas.

El método de la banda finita semianalítico con desarrollos en serie ortogonales Y_n se ha desarrollado para placas y láminas de formas irregulares. El método es con diferencia uno de los mejores para resolver estructuras de placas y de láminas plegadas prismáticas simplemente apoyadas bajo carga arbitraria, debido al desacoplamiento de los términos de las series. Esta técnica tiene también aplicación para análisis dinámico y de estabilidad, así como para análisis estático de estructuras de varios vanos bajo cargas distribuidas, porque sólo se requieren unos pocos términos acoplados para obtener una solución bastante precisa. Las bandas finitas de fleje son más adecuadas para placas de forma arbitraria (paralelogramos cuadriláteros, en forma de eje, etc.), para placas y láminas con varios apoyos intermedios y para tratar cargas concentradas y apoyos puntuales.

Las *funciones de desplazamiento* son de dos tipos: la parte polinómica compuesta por las funciones de forma $\bar{N}(x)$ del tipo estándar y la parte del desarrollo en serie o con funciones de fleje.

Los desarrollos en serie más utilizados son las funciones de base[24] (o funciones propias) que se obtienen de la solución de la ecuación diferencial de la vibración de la viga simplemente apoyada

$$Y"" = \frac{\mu^4 Y}{a^4} \tag{6.33}$$

donde a es la longitud de la viga (banda) y μ es un parámetro.

La forma general de dichas ecuaciones básicas es

$$\begin{aligned} Y_n(y) = {} & C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\mu_n y}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\mu_n y}{a}\right) + C_3 \operatorname{sen} h\left(\frac{\mu_n y}{a}\right) \\ & + C_4 \cos h\left(\frac{\mu_n y}{a}\right) \end{aligned} \tag{6.34}$$

En ciertos casos se utilizan los modos de pandeo de una viga para el análisis de estabilidad,[24] y las series toman la forma siguiente

$$Y_n(y) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\mu_n y}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\mu_n y}{a}\right) + C_3 y + C_4 \tag{6.35}$$

en la cual las constantes C_i se determinan mediante las condiciones en los extremos.

Otra forma de soluciones en serie utilizada para muros de cortante[25] es del tipo

$$
\begin{aligned}
Y_1(y) &= \frac{y}{a} \\
Y_n(y) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\mu_n y}{a}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{\mu_n y}{a}\right) - \left[\cos\left(\frac{\mu_n y}{a}\right) - \cos h\left(\frac{\mu_n y}{a}\right)\right] \\
&\quad \times \frac{\operatorname{sen}(\mu_n) + \operatorname{senh}\mu_n}{\cos(\mu_n) + \cos h\mu_n} \qquad \text{para } n = 2, \ldots, r
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

donde

$$\mu_n = 1.875,\ 4.694, \ldots, (2n-1)\pi/2$$

Para vanos múltiples, como se ilustra en la Figura 6.10, se pueden utilizar series similares para cada vano ajustando de manera adecuada las constantes para asegurar la continuidad entre vanos. Sin embargo, en este caso es más útil utilizar funciones de fleje.

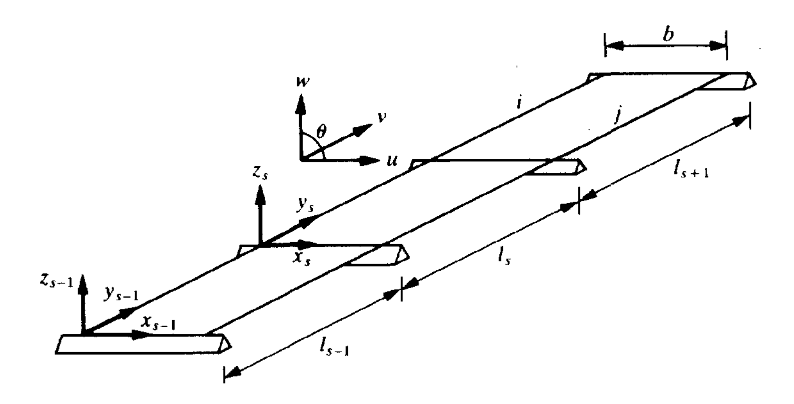
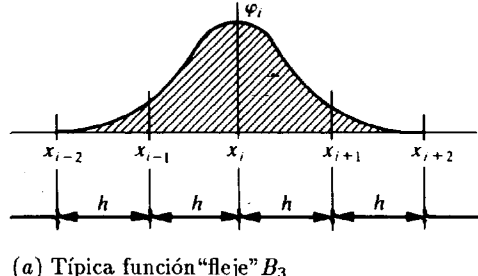


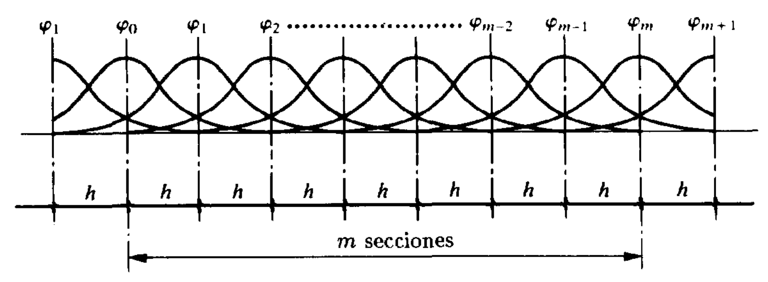
Figura 6.10 Una banda finita típica continua.

Las funciones de fleje, que toman el nombre de una banda de madera flexible empleada por los dibujantes como un instrumento para dibujar una curva continua y suave segmento a segmento, se convirtieron en un instrumento matemático después del trabajo pionero de Schoenberg.[26] Existe toda una variedad de funciones de fleje. La escogida aquí (Figura 6.11) para representar el desplazamiento es el fleje B_3 de igual longitud seccional (los flejes B_3 de secciones con longitud diferente se han discutido en un artículo por Li *et al.*[27]) y está dado por

$$Y = \sum_{i=-1}^{m+1} \alpha_i \psi_i \tag{6.37}$$



(*a*) Típica función "fleje" B_3



(*b*) Base de la expresión de funciones "flejes" B_3

Figura 6.11 Aproximaciones de fleje típicas.

en la que cada fleje local B_3 ψ_i tiene valores nulos sobre cuatro secciones consecutivas, con la sección central en $x = x_i$ y está definido por

$$
\psi_i = \frac{1}{6H^3} \times
\begin{cases}
0, & x < x_{i-2} \\
(x - x_{i-2})^3, & x_{i-2} \le x \le x_{i-1} \\
h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x_{i-1} \le x \le x_i \\
h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x_i \le x \le x_{i+1} \\
(x_{i+2} - x)^3, & x_{i+1} \le x \le x_{i+2} \\
0, & x_{i+2} < x
\end{cases}
\tag{6.38}
$$

El uso de funciones de fleje B_3 ofrece las siguientes ventajas cuando se compara con el método de elementos finitos convencional y el método de banda finita semianálitico:

1. Es eficiente desde el punto de vista computacional. Cuando se utilizan flejes B_3 como funciones de desplazamiento, la continuidad está

asegurada hasta el segundo orden (continuidad C_2). Sin embargo, para alcanzar la mismas condiciones de continuidad para elementos finitos convencionales, es necesario un número de incógnitas nodales tres veces superior.

2. Es más flexible que el método de banda finita semianalítico en el tratamiento de condiciones de contorno. Solamente necesitan definirse los flejes locales alrededor de un punto de contorno para representar cualquier condición de contorno.

3. Tienen un campo de aplicación mayor que el método de banda finita semianalítico. El método de banda finita de flejes puede utilizarse para analizar placas de formas arbitrarias.[28] En ese caso puede transformarse cualquier dominio rodeado por cuatro lados curvos (o rectos) en otro rectangular (véase Capítulo 8 del Volumen 1) y todas las operaciones en un sistema (x, y) pueden transformarse a las correspondientes en otro sistema (ξ, η).

Los métodos de bandas finitas han demostrado ser muy efectivos en un gran número de aplicaciones ingenieriles, muchas de ellas referenciadas en el texto de Cheung.[17] En las referencias 29-39 se listan algunos de los problemas lineales típicos resueltos recientemente en el análisis estático de vibraciones y pandeo de estructuras. Además, se han resuelto con éxito problemas no-lineales del tipo de los que discutiremos en el Capítulo 8.[40,41]

Es también muy interesante la extensión de estos procedimientos al análisis de medios estratificados (con capas) tal como los que se encuentran en estructuras laminares o cimentaciones.[42,44]

6.8 Observaciones finales

Se ha ilustrado con diversas aplicaciones un procedimiento bastante general que combina algunas de las ventajas del análisis mediante elementos finitos con la economía que proporcionan los desarrollos en serie de funciones ortogonales. Ciertamente, los ejemplos mostrados sólo dejan entrever las posibilidades del método, pero hay que tener en cuenta que eśte es interesante económicamente sólo cuando la geometría presenta determinadas condiciones particulares, y ello únicamente si los términos del desarrollo necesarios constituyen un número relativamente pequeño.

Se pueden tratar de la misma manera otros problemas del tipo "prismático" en los cuales el cuerpo a estudiar sea un sector de sólido de revolución (Figura 6.12). En este caso es evidente que los desarrollos deben escribirse en función del ángulo $l\pi\theta/\alpha$ pero, aparte de esto, el método es idéntico al que acabamos de describir.[1]

En los procedimientos seguidos en este capítulo se ha supuesto que

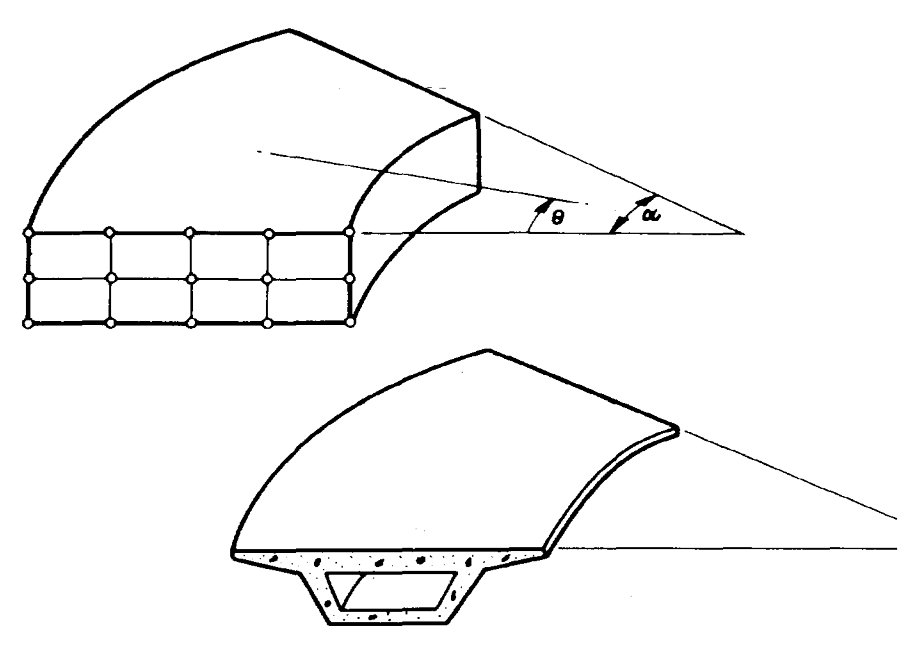


Figura 6.12 Otros casos de sectores prismáticos.

las propiedades del material no varían en la dirección de alguno de los ejes coordenados. Esta restricción puede a veces modificarse manteniendo el mismo proceso general. Stricklin y De Andrade[45] describen un ejemplo interesante de esta naturaleza.

Al hablar en el Capítulo 9 del Volumen 1 acerca de la formulación general de la discretización por elementos finitos nos referimos a la semidiscretización (Sección 9.7). En ésta se mantenía una de las variables del problema (tal como z), quedando éste reducido a una ecuación diferencial ordinaria en función de los parámetros nodales $\mathbf{a}$, y de sus derivadas con respecto a z.

En los Capítulos 10 y 11 tendremos ocasión de hacer uso de dicha discretización parcial, donde la variable z es el tiempo, en cuyo dominio el problema es de categoría "prismática". No obstante, todos los problemas que hemos descrito en este capítulo podrían haberse resuelto haciendo uso de la semidiscretización. Así, *en primer lugar* semidiscretizaríamos el problema, que quedaría definido por una ecuación diferencial de la forma

$$\mathbf{K}_1 \frac{d^2\mathbf{a}}{dz^2} + \mathbf{K}_2 \frac{d\mathbf{a}}{dz} + \mathbf{K}_3\mathbf{a} + \mathbf{f} = 0$$

En segundo lugar, el sistema de ecuaciones anterior se resolvería en el dominio $0 < z < a$ utilizando funciones ortogonales que *naturalmente* entran en el problema como soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias *de coeficientes constantes*. La resolución de este segundo paso se consigue fácilmente empleando un procedimiento de diagonalización típico de aplicaciones dinámicas (Capítulo 9).

Es evidente que el resultado de estos cálculos resultaría idéntico a los procedimientos que hemos descrito, pero en ciertas ocasiones la formulación anterior es de por sí más evidente.

Referencias

1. O.C. ZIENKIEWICZ y J.J.M. TOO, "The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **53**, 147-72, 1972.
2. Y.K. CHEUNG, "The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **40**, 1-7, 1968.
3. Y.K. CHEUNG, "Finite strip method of analysis of elastic slabs", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **94**, EM6, 1365-78, 1968.
4. Y.K. CHEUNG, "Folded plate structures by the finite strip method", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **95**, ST2, 963-79, 1969.
5. Y.K. CHEUNG, "The analysis of cylindrical orthotropic curved bridge decks", *Publ. Int. Ass. Struct. Eng.*, **29-II**, 41-52, 1969.
6. A.S. MAWENYA y J.D. DAVIES, "Finite strip analysis of plate bending including transverse shear effects", *Building Sci.*, **9**, 175-80, 1974.
7. P.R. BENSON y E. HINTON, "A thick finite strip solution for static, free vibration and stability problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 665-78, 1976.
8. E. HINTON y O.C. ZIENKIEWICZ, "A note on a simple thick finite strip", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 905-9, 1977.
9. Y.K. CHEUNG, M.S. CHEUNG y A. GHALI, "Analysis of slab and girder bridges by the finite strip method", *Building Sci.*, **5**, 95-104, 1970.
10. Y.C. LOO y A.R. CUSENS, "Development of the finite strip method in the analysis of cellular bridge decks", *Conf. on Developments in Bridge Design and Construction* (eds. Rockey *et al.*), Crosby Lockwood, London, 1971.
11. Y.K.CHEUNG y M.S. CHEUNG, "Static and dynamic behaviour of rectangular plates using higher order finite strips", *Building Sci.*, **7**, 151-8, 1972.
12. T.G. BROWN y A. GHALI, "Semi-analytic solution of skew plates in bending", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **57-II**, 165-75, 1974.
13. G.S. TADROS y A. GHALI, "Convergence of semi-analytical solution of plates", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **99**, EM5, 1023-35, 1973.
14. A.R. CUSENS y Y.C. LOO, "Application of the finite strip method in the analysis of concrete box bridges", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **57-II**, 251-73, 1974.
15. Y.K. CHEUNG, "Folded plate structures by the finite strip method", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, ST12, **95**, 63-79, 1969.
16. H.C. CHAN y O. FOO, "Buckling of multilayer plates by the finite strip method", *Int. J. Mech. Sci.*, **19**, 447-56, 1977.
17. Y.K. CHEUNG, *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1976.
18. A.E.H. LOVE, *The Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., p. 56, Cambridge University Press, 1927.
19. S. TIMOSHENKO y J.N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 2ª. ed., McGraw-Hill, New York, 1951.
20. O.C. ZIENKIEWICZ y Y.K. CHEUNG, "Stresses in shafts", *The Engineer*, 24 Noviembre 1967.
21. E.L. WILSON, "Structural analysis of axi-symmetric solids", *J.A.I.A.A.*, **3**, 2269-74, 1965.
22. V.V. NOVOZHILOV, *Theory of Thin Shells* (translation), Noordhoff, Dordrecht, 1959.
23. P.E. GRAFTON y D.R. STROME, "Analysis of axi-symmetric shells by the direct stiffness method", *J.A.I.A.A.*, **1**, 2342-7, 1963.
24. O. FOO, "Application of finite strip method in structural analysis with particular reference to sandwich plate structure" Ph.D. thesis, The Queen's University of Belfast, 1977.
25. Y.K. CHEUNG, "Computer analysis of tall buildings", en *Proc. of 3rd Int. Conf. on Tall Buildings*, Hong Kong and Guangzhou, 8-15, Diciembre 1984.
26. I.J. SCHOENBERG, "Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions", *Q. Appl. Math*, **4**, 45-99 y 112-14, 1946.
27. W.Y LI, Y.K. CHEUNG y L.G. THAM, "Spline finite strip analysis of general plates", *J. Eng. MEch.*, **112**, 43-54, 1986.
28. Y.K. CHEUNG, L.G. THAM y W.Y. LI, "Free vibration and static analysis of general plates by spline finite strip", *Comp. Mech.*, **3**, 187-97, 1988.
29. D. BUCCO, J. MAZUMDAR y G. SVED, "Application of the finite strip method combined with the deflection contour method to plate bending problems", *J. Comp. Struct.*, **10**, 827-30, 1979.
30. Y.K. CHEUNG, "Orthotropic right bridges by the finite strip

method", en *Concrete Bridge Design*, American Concrete Institute report SP–26, 812–905, 1971.

31. Y.K. CHEUNG, L.G. THAM y W.Y. LI, " Application of spline-finite-strip method in the analysis of curved slab bridge", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **81-II**, 111–24, 1986.
32. H.C. CHAN y Y.K. CHEUNG, "Static and dynamic analysis of multilayered sandwich plates", *Int. J. Mech. Sci.*, **14**, 399–406, 1972.
33. Y.K. CHEUNG y S. SWADDIWUDHIPONG, "Analysis of frame shear wall structures using finite strip elements", *Proc. Inst. Civ. Engrs.*, **65–II**, 517–35, 1978.
34. C. MEYER y A.C. SCORDELIS, "Analysis of curved folded plate structures", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **97**, ST10, 2459–80, 1979.
35. W.Y. LI, L.G. THAM y Y.K. CHEUNG, "Curved box-girder bridges", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **114**, ST6, 1324–38, 1988.
36. D.J. DAWE, "Finite strip models for vibration of Mindlin plates", *J. Sound Vibr.*, **59**, 441–52, 1978.
37. Y.K. CHEUNG, W.Y. LI y G. THAM, "Free vibration analysis of singly curved shell by spline finite strip method", *J. Sound, Vibr.*, **128**, 411–22, 1989.
38. D.J. DAWE, "Finite strip buckling of curved plate assemblies under biaxial loading", *Int. J. Solids Struct.*, **13**, 1141–55, 1977.
39. Y.K. CHEUNG y C. DELCOURT, "Buckling and vibration of thin, flat–walled structures continuous over several spans", *Proc. Inst. Civ. Engrs.*, **64–II**, 93–103, 1977.
40. Y.K. CHEUNG y DASHAN ZHU, "Large deflection analysis of arbitrary shaped thin plates", *Comp. Struct.*, **26**, 811–14, 1987.
41. D.S. ZHU y Y.K. CHEUNG, "Postbuckling analysis of shells by spline finite strip method", *Comp. Struct.*, **31**, 357–64, 1989.
42. D.J. GUO, L.G. THAM, y Y.K. CHEUNG, "Infinite layer for the analysis of a single pile", *J. Comp. Geotechnics*, **3**, 229–49, 1987.
43. Y.K. CHEUNG, L.G. THAM y D.J. GUO, "Analysis of pile group by infinite layer method", *Geotechnique*, **34**, 415–31, 1988.
44. S.B. DONG y R.B. NELSON, "On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates", *J. Appl, Mech.*, **30**, 739, 1972.
45. J.A. STRICKLIN y J.C. DE ANDRADE, "Linear and non linear analysis of shells of revolution with asymmetrical stiffness properties", en *Proc. 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1968.
46. L.A. WINNICKI y O.C. ZIENKIEWICZ, "Plastic or visco-plastic behaviour of axisymmetic bodies subject to non-symmetric loading; semi-analytical finite element solution,", *Int. J. Num. Eng.*, **14**, 1399–412, 1979.

47. E. OÑATE y B. SUAREZ, "A comparison of the linear, quadratic and cubic Mindlin strip element for the analysis of thick and thin plates", *Computers and Struct.*, **17**, 3, 427–39, 1986.
48. E. OÑATE y B. SUAREZ, "The finite strip for the analysis of plate, bridge and axisymmetric shell problems", en *Finite element software for plate and shell analysis*, (eds. E. Hinton y D.R.J. Owen), Pineridge Press, Swansea, 1984.
49. E. OÑATE y B. SUAREZ, "An unified approach for the analysis of bridges, plates and axisymmeric shells using the linear Mindlin strip element", *Computer and Struct.*, **17**, 3, 407–26, 1986.
50. B. SUAREZ, J. MIQUEL y E. OÑATE, "Free vibration analysis of plates, bridges and axisymmetric shells using a thick finite strip method", *Engng. Comput.*, **5**, 2, 156–64, 1988.

Capítulo 7

PROBLEMAS NO LINEALES. PLASTICIDAD, FLUENCIA (VISCOPLASTICIDAD), PROBLEMAS NO LINEALES DE CAMPO, ETC.

7.1 Introducción

Todos los problemas estudiados hasta el momento estaban regidos por ecuaciones diferenciales lineales y autoadjuntas, con su consiguiente funcional cuadrático clásico. En la mecánica de sólidos elásticos esto estaba implícito en:

a) una forma lineal de las relaciones deformación-desplazamiento [véase Ec. (2.2), Capítulo 2 del Volumen 1], y
b) una forma lineal de las relaciones tensión-deformación [véase Ec. (2.2), Capítulo 2 del Volumen 1]

En diversos problemas de campo una linealidad similar quedaba implícita en el hecho de que "constantes" como la permeabilidad k eran independientes de la variación del potencial incógnita ϕ [véase Ec. (10.6), Capítulo 10 del Volumen 1].

Existen muchos problemas de importancia en los cuales no se preserva tal linealidad, y es de interés ampliar los procedimientos numéricos estudiados de manera que abarquen también dichos problemas. Tal es el caso de los problemas de *mecánica de sólidos* en los que fenómenos tales como plasticidad, fluencia u otras *relaciones constitutivas complejas* sustituyen a las sencillas hipótesis de elasticidad lineal.

De forma similar, en el caso de problemas de fluidos, hechos como que la viscosidad no sea independiente del campo de velocidades, que la ley de Darcy que rige el flujo de fluidos en medios porosos no sea aplicable cuando intervienen fenómenos de turbulencia, o incluso que la permeabilidad magnética no sea independiente de la densidad de flujo,

contribuyen a la no linealidad de las propiedades del material.

A menudo este tipo de problemas se puede tratar simplemente sin necesidad de volver a reformular el proceso de discretización (o sea, sin necesidad de volver a reescribir los postulados variacionales fundamentales). De hecho, si se puede llegar a una solución al problema "lineal" y seguir un proceso de "prueba y error" de forma que, al final, se ajusten las propiedades de los materiales para satisfacer las nuevas leyes constitutivas, entonces se ha encontrado la solución.

Sin embargo, si la relación entre deformaciones y desplazamientos no es lineal, será necesario reorganizar la formulación más a fondo. Es por esta causa que tales problemas se han excluido de este capítulo y serán tratados separadamente en el Capítulo 8. No obstante, se encontrará que los procedimientos iterativos básicos son los mismos, y que ambos tipos de no linealidad pueden tratarse fácilmente.

Es preciso, sin embargo, mencionar un punto importante. Mientras que en los problemas lineales la solución es siempre única, ya no ocurre lo mismo en muchas situaciones no lineales. Así, si se obtiene *una solución* puede ser que ésta no sea necesariamente *la solución* buscada. Una correcta interpretación física de la naturaleza del problema y, normalmente, la utilización de procedimientos incrementales en pasos pequeños son esenciales para obtener resultados que tengan sentido físico. De hecho, tales incrementos son siempre necesarios si las leyes constitutivas que relacionan, por ejemplo, cambios de tensión y deformación son dependientes de la historia.

Por lo tanto, el problema general siempre se formula (en función del parámetro de discretización $\mathbf{a}$) como la solución de

$$\boldsymbol{\Psi}_{n+1} \equiv \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}_{n+1}) = \mathbf{P}(\mathbf{a}_{n+1}) - \mathbf{f} = 0 \tag{7.1}$$

que comienza con una solución de (casi) equilibrio en

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n \qquad \boldsymbol{\Psi}_n = 0 \qquad \mathbf{f} = \mathbf{f}_n \tag{7.2}$$

y generalmente surge debido a cambios de las funciones de fuerza $\mathbf{f}$ de $\mathbf{f}_n$ a

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_n + \Delta\mathbf{f}_n \tag{7.3}$$

La determinación del cambio $\Delta\mathbf{a}_n$ tal que

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta\mathbf{a}_n \tag{7.4}$$

será el objetivo buscado y, por lo general, los incrementos de $\Delta\mathbf{f}_n$ se hacen razonablemente pequeños para que se pueda seguir la dependencia de la historia. Además, estos procedimientos incrementales son útiles para

evitar un excesivo número de iteraciones y ciertamente para seguir el camino físicamente correcto. En la Figura 7.1 se muestra una típica falta de unicidad que puede aparecer si la función $\boldsymbol{\Psi}$ disminuye y a continuación aumenta a medida que el parámetro $\mathbf{a}$ crece uniformemente. Resulta claro que para seguir la trayectoria $\Delta\mathbf{f}_n$ tendrá que tomar signo negativo en ciertos pasos del cálculo.

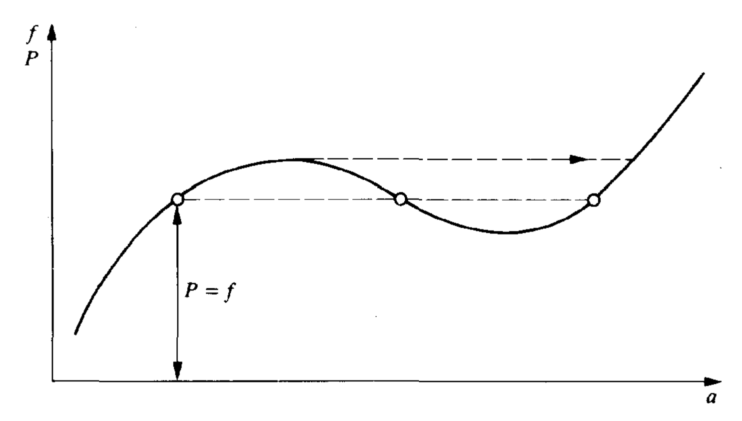


Figura 7.1 Posibilidad de soluciones múltiples.

Sólo en el caso de no linealidad suave (y sin dependencia de la historia) es posible obtener soluciones en un único incremento de $\mathbf{f}$, esto es, con

$$\Delta\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_{n+1} \tag{7.5}$$

Las ecuaciones generales se obtienen de forma natural en materiales que exhiben leyes constitutivas inelásticas en las cuales la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ depende de alguna forma compleja del estado de deformación y su historia. Siguiendo la discretización estándar con el desplazamiento como incógnita, esto es

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{a} \tag{7.6}$$

el término $\mathbf{P}$ de la Ec. (7.1) es simplemente el vector de *fuerzas internas*

$$\mathbf{P} = \int_\Omega \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega \tag{7.7}$$

mientras que $\mathbf{f}$ da las fuerzas externas de la manera descrita en el Capítulo 2 del Volumen 1.

Ahora, los parámetros $\mathbf{a}$ y su historia, junto con las relaciones constitutivas prescritas definen $\boldsymbol{\sigma}$ y llevan al problema no lineal. La

situación es completamente análoga en muchos problemas de campo, como se ilustrará más adelante.

La literatura sobre procedimientos generales de solución y sobre aplicaciones particulares crece muy rápidamente, de forma que en la órbita de un único capítulo no es posible abarcar completamente todas las variantes. Sin embargo, intentaremos dar una visión general esbozando primero *los procedimientos generales de solución* y concentrándonos luego en *la no linealidad del material independiente de la velocidad de carga en mecánica de sólidos* (plasticidad) y *la no linealidad del material dependiente de la velocidad de carga en mecánica de sólidos* (fluencia). Más tarde se discutirán *algunos problemas no lineales de campo* y otros ejemplos especiales.

En otros capítulos de este libro encontraremos otras aplicaciones en las que de nuevo se pueden aplicar los procedimientos generales de solución.

PROCEDIMIENTOS GENERALES DE SOLUCIÓN

7.2 Técnicas iterativas

7.2.1 *Consideraciones generales.* Naturalmente, la solución del problema planteado por las Ecs. (7.1) a (7.4) no puede ser abordada directamente y siempre se requiere alguna forma de iteración. Nos concentraremos aquí en procedimientos en los cuales se usa la solución repetida de ecuaciones de la forma

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{r} \tag{7.8}$$

Serán aplicables por tanto las técnicas de eliminación gaussiana del tipo discutido en el Volumen 1. Puede, sin embargo, que la aplicación de procesos de iteración directa sea más económica, y en futuros capítulos nos referiremos frecuentemente a dicha posibilidad, que todavía no ha sido completamente explorada.

Muchas de las técnicas iterativas que se usan actualmente tuvieron su origen en la aplicación intuitiva de razonamientos físicos. Sin embargo, cada una de tales técnicas tiene un buen pedigri en análisis numérico y en lo que sigue utilizaremos la nomenclatura aceptada generalmente en los textos sobre este tema.[1−5]

Presentaremos primero los procedimientos usados en el contexto de una única ecuación escalar. Esto, aunque útil desde el punto de vista pedagógico, es peligroso ya que los problemas de convergencia con varios grados de libertad pueden ser diferentes del modelo sencillo.

7.2.2 *El método de Newton-Raphson.* El método de Newton-Raphson es probablemente el proceso de más rápida convergencia para la solución de problemas no lineales (siempre que, naturalmente, la solución inicial esté

dentro de la "zona de atracción" y no ocurra divergencia). De hecho, es el único proceso en el que la convergencia es cuadrática. A veces se le llama sencillamente el método de Newton pero parece que fue deducido simultáneamente por Raphson y la referencia [6] cuenta la interesante historia de sus orígenes.

Notemos que para una iteración, la Ec. (7.1) se puede aproximar hasta el primer orden, de la forma

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}_{n+1}^{i+1}) \approx \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}_{n+1}^{i}) + \left(\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\mathbf{a}}\right)_{n+1}^{i} \delta\mathbf{a}_n^i = 0 \tag{7.9}$$

Aquí i es el contador de iteraciones, que comienza de la forma

$$\mathbf{a}_{n+1}^{i} = \mathbf{a}_n \tag{7.10}$$

y

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\mathbf{a}} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{a}} = \mathbf{K}_T \tag{7.11}$$

es la matriz jacobiana (o, en términos estructurales, la matriz de rigidez) correspondiente a la dirección tangente. La Ec. (7.9) da inmediatamente la corrección iterativa en la forma

$$\mathbf{K}_T^i \delta\mathbf{a}_n^i = -\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i \tag{7.12}$$

o

$$\delta\mathbf{a}_n^i = -(\mathbf{K}_T^i)^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i \tag{7.13}$$

Una serie de aproximaciones sucesivas da

$$\mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{a}_n + \Delta\mathbf{a}_n^i = \mathbf{a}_{n+1}^i + \delta\mathbf{a}_n^i \tag{7.14}$$

con

$$\Delta\mathbf{a}_n^i = \sum_{k=1}^{i} \delta\mathbf{a}_n^k \tag{7.15}$$

El proceso se ilustra en la Figura 7.2 y muestra que se puede conseguir una convergencia muy rápida.

La necesidad de la introducción del incremento total $\Delta\mathbf{a}_n^i$ y su almacenamiento quizá no sea obvia aquí, pero de hecho es esencial si la no linealidad constitutiva es dependiente de la trayectoria como se verá más adelante.

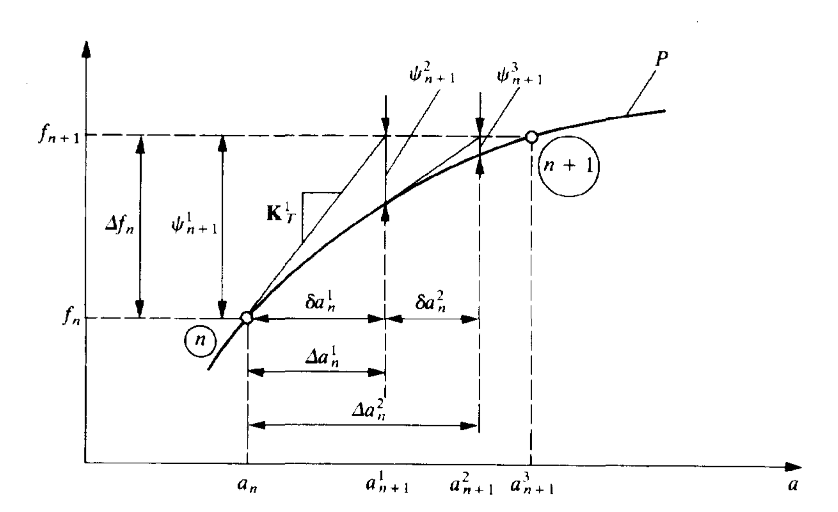


Figura 7.2 El método de Newton-Raphson.

El proceso de Newton-Raphson, a pesar de su rápida convergencia, puede ser caro e incómodo. Las principales razones para esto son:

1. Se tiene que formar y refactorizar (resolver) una nueva matriz $\mathbf{K}_T$ para cada iteración.
2. En ciertas ocasiones, tales como en elastoplasticidad no-asociada, por ejemplo, la matriz $\mathbf{K}_T$, aunque inicialmente simétrica, se vuelve no simétrica y, en consecuencia, se precisa el uso de procedimientos de solución para ecuaciones no simétricas.

Algunas de estas desventajas pueden ser evitadas por procedimientos alternativos.

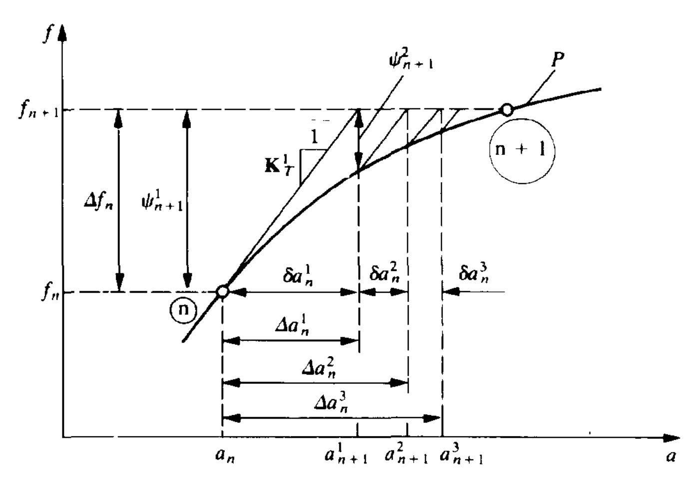
7.2.3 *Métodos de Newton-Raphson modificados.* Este método utiliza esencialmente el mismo algoritmo que el proceso de Newton-Raphson, pero reemplaza la rigidez jacobiana variable $\mathbf{K}^i_T$ por una aproximación constante:

$$\mathbf{K}^i_T \approx \bar{\mathbf{K}}_T \tag{7.16}$$

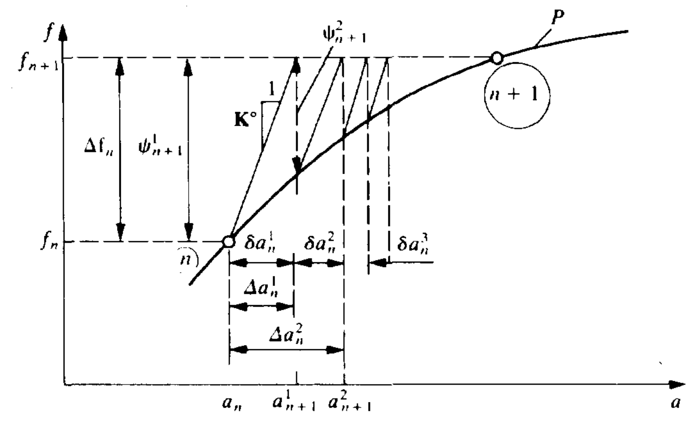
dando, en lugar de la Ec. (7.13),

$$\delta \mathbf{a}^i_n = -\bar{\mathbf{K}}_T^{-1} \boldsymbol{\Psi}^i_{n+1} \tag{7.17}$$

Se abren aquí muchas posibilidades. Por ejemplo, $\bar{\mathbf{K}}_T$ se puede escoger como la matriz correspondiente a la primera iteración $\bar{\mathbf{K}}^1_T$ [como se muestra en la Figura 7.3(a)] o puede incluso ser una correspondiente a algún paso de carga previo (inicial) $\mathbf{K}^0$ [como se muestra en la Figura 7.3(b)].



(a) **Con tangente al inicio del incremento**



(b) **Con tangente al inicio del problema**

Figura 7.3 Método de Newton-Raphson modificado.

Obviamente el procedimiento convergerá en general a una velocidad más lenta, pero las dificultades mencionadas para el proceso de Newton-Raphson desaparecen. De hecho, frecuentemente la "zona de atracción" para este proceso es mayor, y se puede conseguir convergencia para situaciones previamente divergentes, aunque lentamente. En la práctica se usan muchas variantes de este proceso, y generalmente se usan algoritmos de solución simétricos, siempre que se elija una forma simétrica de $\bar{\mathbf{K}}_T$.

7.2.4 *Métodos incremental-secantes de cuasi-Newton.* Una vez que se ha realizado la primera iteración de la sección precedente, dando

$$\delta \mathbf{a}_n^1 = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{\Psi}_{n+1}^1 \tag{7.18}$$

se puede encontrar una "pendiente" secante, como se muestra en la Figura 7.4, de tal forma que

$$\delta \mathbf{a}_n^1 = -(\mathbf{K}_s^2)^{-1} (\mathbf{\Psi}_{n+1}^1 - \mathbf{\Psi}_{n+1}^2) \tag{7.19}$$

Esta "pendiente" se puede utilizar ahora para calcular $\delta \mathbf{a}_n^2$ mediante una expresión de la forma de la Ec. (7.13), dando

$$\delta \mathbf{a}_n^2 = -(\mathbf{K}_s^2)^{-1} \mathbf{\Psi}_{n+1}^2 \tag{7.20}$$

De forma bastante general se puede escribir para $i > 1$ en lugar de la Ec. (7.20), ahora sin subíndices,

$$\delta \mathbf{a}^i = -(\mathbf{K}_s^i)^{-1} \mathbf{\Psi}^i \tag{7.21}$$

donde $(\mathbf{K}_s^i)_i^{-1}$ se determina de tal forma que

$$\delta \mathbf{a}^{i-1} = -(\mathbf{K}_s^i)^{-1} (\mathbf{\Psi}^{i-1} - \mathbf{\Psi}^i) = -(\mathbf{K}_s^i)^{-1} \boldsymbol{\gamma}^{i-1} \tag{7.22}$$

Para el sistema escalar ilustrado en la Figura 7.4 la determinación de $\mathbf{K}_s^i$ es trivial y, como se muestra, la convergencia es casi tan rápida como con el proceso de Newton-Raphson.

Para sistemas con más de un grado de libertad la determinación de $\mathbf{K}_s^i$ o su inversa es más difícil y, de hecho, no es única. Muchas formas diferentes de la matriz $\mathbf{K}_s^i$ pueden satisfacer la relación (7.22) y, como era de esperar, muchas alternativas se pueden utilizar en la práctica. Todas éstas utilizan alguna forma de actualización de la matriz previamente determinada o de su inversa de una forma que satisface idénticamente la Ec. (7.22). Algunas actualizaciones mantienen la simetría de la matriz, mientras que otras no lo hacen. Con la primera es posible evitar la dificultad de las formas de matriz no simétrica que puede aparecer en el proceso de Newton-Raphson y, sin embargo, conseguir una convergencia más rápida que la que es posible con los procedimientos de Newton-Raphson modificado.

Los métodos de actualización secante parecen surgir de ideas introducidas primeramente por Davidon[7] y desarrolladas posteriormente por otros. Dennis y More[8] estudian el campo de forma extensiva, mientras que Matthies y Strang[9] parecen ser los primeros en usar los procedimientos en el contexto de los elementos finitos. Las referencias [10] a [17] presentan más trabajos y estudios sobre el funcionamiento de varios procedimientos de actualización.

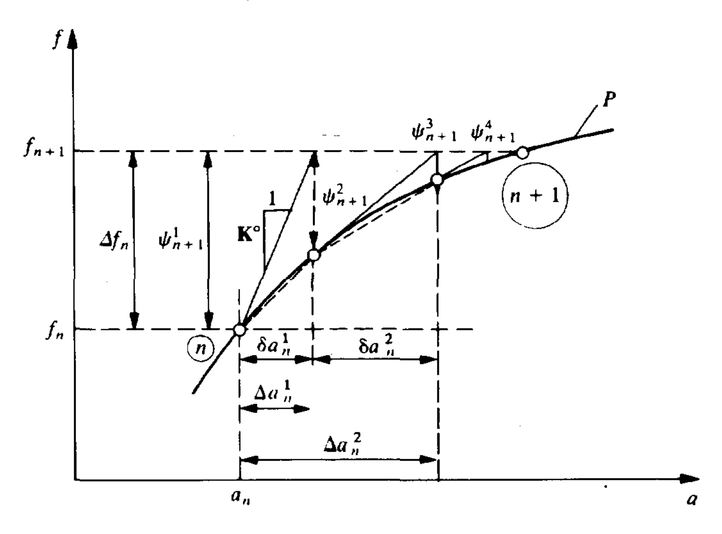


Figura 7.4 El método secante comenzando con una predicción $\mathbf{K}^0$.

La actualización llamada BFGS[8] (en honor de Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno) y la actualización DFP[8] (Davidon, Fletcher y Powell) mantienen la matriz simétrica definida positiva y las dos son ampliamente usadas. Citamos a continuación la primera de ellas, que puede escribirse de la forma

$$(\mathbf{K}^i)^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T)(\mathbf{K}^{i-1})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T) \tag{7.23}$$

donde $\mathbf{I}$ es una matriz identidad y

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{\Psi}^{i-1} \left[1 - \frac{(\delta \mathbf{a}^{i-1})^T \boldsymbol{\gamma}^{i-1}}{(\delta \mathbf{a}^i)^T \mathbf{\Psi}^{i-1}} \right] - \mathbf{\Psi}^i \\ \mathbf{w}_i &= \frac{\delta \mathbf{a}^{i-1}}{(\delta \mathbf{a}^{i-1})^T \boldsymbol{\gamma}^{i-1}} \end{aligned} \tag{7.24}$$

con $\boldsymbol{\gamma}$ tal como se definió en la Ec. (7.22). Se puede verificar rápidamente mediante un poco de álgebra que la sustitución de (7.23) y (7.24) en la Ec. (7.22) conduce a una identidad. Además, la forma de la Ec. (7.23) garantiza la conservación de la simetría de la matriz original.

La naturaleza de la actualización no garantiza la conservación de la poca densidad de la matriz. Por esta razón es conveniente volver en cada iteración a la matriz original (poco densa) $\mathbf{K}_s^1$, utilizada en la primera iteración, y volver a aplicar la multiplicación de la Ec. (7.23) para todas las iteraciones previas. Esto requiere el almacenamineto de los vectores

$\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{w}_i$ para todas las iteraciones previas y sus multiplicaciones sucesivas. Las referencias [9] y [17] describen los detalles de esta operación.

Cuando el número de iteraciones es grande ($i > 15$) la eficacia de la actualización disminuye debido a inestabilidad incipiente. Se abren entonces varios procedimientos, a menudo contemplando la omisión de varias actualizaciones previas. Una posibilidad obvia es pasar por alto *todas* las actualizaciones previas y volver siempre a la matriz original $\mathbf{K}_s^1$.

Tal procedimiento fue sugerido por primera vez por Crisfield[18,19] en el contexto de elementos finitos y se muestra en la Figura 7.5. Se ve que es convergente con una velocidad ligeramente menor pero evita totalmente las dificultades de estabilidad encontradas anteriormente y reduce el almacenamiento y el número de operaciones necesarias.

El procedimiento de la Figura 7.5 es idéntico al conocido generalmente como iteración directa (o Picard), y es particularmente útil en la solución de problemas no lineales que pueden escribirse de la forma

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{a} - \mathbf{f} = 0 \tag{7.25}$$

En tal caso se toma $\mathbf{a}_n = 0$ y la iteración se lleva a cabo sin incrementos escribiendo

$$\mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = [\mathbf{K}(\mathbf{a})_{n+1}^{i}]^{-1}\mathbf{f}_{n+1} \tag{7.26}$$

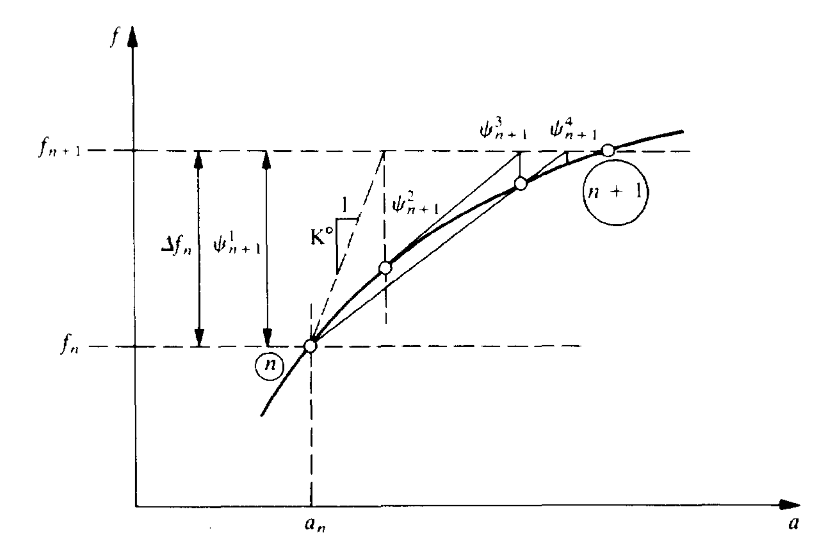


Figura 7.5 Iteración directa (o de Picard).

7.3 Procedimientos de aceleración de convergencia y búsqueda direccional

Todos los métodos iterativos de la sección precedente tienen idéntica estructura, descrita por las Ecs. (7.12) a (7.15), y en la que se utilizan varias aproximaciones a la matriz de Newton $\mathbf{K}_T^i$. Para todos éstos se determina un vector iterativo $\delta\mathbf{a}_n^i$ y el nuevo valor de las incógnitas es

$$\mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{a}_{n+1}^{i} + \delta\mathbf{a}_n^i \tag{7.27}$$

empezando por

$$\mathbf{a}_{n+1}^{1} = \mathbf{a}_n$$

El objetivo es, naturalmente, conseguir la reducción de $\mathbf{\Psi}_{n+1}^{i+1}$ a cero, aunque esto no se consigue fácilmente por ninguno de los procedimientos descritos, incluso para el ejemplo escalar mostrado. De hecho, hubiera sido más sencillo encontrar una solución aproximada para tal problema no lineal evaluando simplemente el escalar Ψ_{n+1} para varios valores de a_{n+1} y llegar a la respuesta buscada mediante una adecuada interpolación. Para sistemas con muchos grados de libertad tal procedimiento es obviamente imposible, a menos que se considere alguna norma escalar del residuo. Un procedimiento posible es escribir

$$\mathbf{a}_{n+1}^{i+1,j} = \mathbf{a}_{n+1}^{i} + (1+\eta_{ij})\delta\mathbf{a}_n^i \tag{7.28}$$

y determinar η_{ij} de tal forma que la proyección del residuo en la *dirección de búsqueda* $\delta\mathbf{a}_n^i$ se haga nula. Se puede definir esta proyección de la forma

$$G_{i,j} \equiv \delta\mathbf{a}_n^T \mathbf{\Psi}^{i+1,j} \tag{7.29}$$

donde $\qquad \mathbf{\Psi}^{i+1,j} \equiv \mathbf{\Psi}(\mathbf{a}_{n+1}^i + (1+\eta_{ij})\delta\mathbf{a}_n^i), \qquad \eta_{i0} = 0$

Naturalmente, se podrían utilizar también otras normas del residuo.

Este proceso es conocido como *búsqueda direccional* ("line search") y η_{ij} se puede calcular utilizando un método de "regula falsi" (o secante), ilustrado en la Figura 7.6. Obviamente la desventaja de la búsqueda direccional es la necesidad de varias evaluaciones de $\mathbf{\Psi}$. Sin embargo, la aceleración de la convergencia global puede ser importante cuando se aplica a los métodos de Newton modificado o cuasi Newton. A menudo se utiliza el compromiso[9] de hacer una búsqueda sólo si

$$G_{i0} > \varepsilon\delta\mathbf{a}_n^T\mathbf{\Psi}^i \tag{7.30}$$

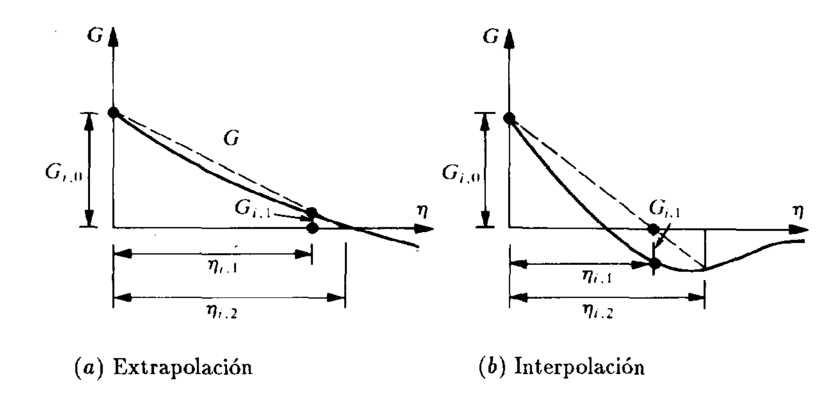


Figura 7.6 "Regula falsi" aplicado a la búsqueda direccional.

donde la tolerancia ε es cercana a 0.5. Esto significa que si el proceso de iteración resulta directamente de la reducción de la proyección del residuo a la mitad o menos de su valor original, entonces no se utiliza la búsqueda direccional.

De tiempo en tiempo se sugieren otros procedimientos de aceleración, por ejemplo, el uso de la extrapolación de Aitken[20,21] o el llamado método α.[22] Ninguno es, sin embargo, tan eficiente como el proceso de búsqueda direccional que se ha descrito.

7.4 Comportamiento "de ablandamiento" y control de desplazamiento

En todo lo anterior se ha supuesto que la iteración va asociada a incrementos positivos del vector de fuerzas, $\mathbf{f}$ en la Ec. (7.1). En problemas estructurales esto es normalmente un conjunto de cargas que se pueden suponer proporcionales unas a otras de forma que se pueda escribir

$$\Delta \mathbf{f}_n = \Delta\lambda_n \mathbf{f}_0 \tag{7.31}$$

En muchos problemas surge la situación de que no existe solución por encima de un cierto valor máximo de $\mathbf{f}$ y la solución real es una rama "de ablandamiento", como se muestra en la Figura 7.1. En tales casos, $\Delta\lambda_n$ deberá ser negativo, a menos que el problema se pueda reformular como uno en el cual la fuerza pueda aplicarse con control del desplazamiento. En el caso sencillo de una única carga o de un único desplazamiento forzado es fácil reformular el problema en incrementos de un único desplazamiento prescrito, y se ha dedicado mucho esfuerzo a tales soluciones.[23–29]

En todos los planteamientos con éxito el problema original de la Ec. (7.1) se reescribe como la solución de

$$\boldsymbol{\Psi}_{n+1} \equiv \mathbf{P}(\mathbf{a}_{n+1}) - \lambda_{n+1}\mathbf{f}_0 = 0 \tag{7.32}$$

con

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta\mathbf{a}_n$$

y

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda_n \tag{7.33}$$

incluidos como variables del incremento. Naturalmente, ahora se necesita una ecuación (restricción) adicional para resolver la variable extra $\Delta\lambda_n$.

Esta ecuación adicional puede tomar varias formas. Riks[25] supone que en cada incremento

$$\Delta\mathbf{a}_n^T\Delta\mathbf{a}_n + \Delta\lambda_n^2\mathbf{f}_0^T\mathbf{f}_0 = \Delta l^2 \tag{7.34}$$

donde Δl es una "longitud" prescrita en el espacio de $N+1$ dimensiones. Crisfield[10] propone un control más natural en desplazamientos exigiendo que

$$\Delta\mathbf{a}_n^T\Delta\mathbf{a}_n = \Delta l^2 \tag{7.35}$$

Estos llamados controles de longitud de arco y trayectoria esférica no son sino algunas de las posibles restricciones.

Ahora se puede añadir directamente la ecuación de restricción [(7.34) o (7.35)] al sistema de ecuaciones (7.32), y utilizar de nuevo los métodos iterativos previamente descritos. Sin embargo, el sistema de ecuaciones "tangente" perdería su simetría y estructura en banda, así que en general debe utilizarse un procedimiento alternativo.

Nótese que para una iteración dada, i, se puede escribir la solución generalmente de la forma

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{a}_n^i &= -\mathbf{K}_i^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i(\Delta\lambda_n^i + \delta\lambda_n^i)\\ &= -\mathbf{K}_i^{-1}(\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i(\Delta\lambda_n^i) - \delta\lambda_n^i\mathbf{f}_0)\\ &= \delta\tilde{\mathbf{a}}_n^i(\Delta\lambda_n^i) + \delta\lambda_n^i\delta\hat{\mathbf{a}}_n^i \qquad \delta\hat{\mathbf{a}}_n^i \equiv \mathbf{K}_i^{-1}\mathbf{f}_0\end{aligned} \tag{7.36}$$

Ahora se puede formular una ecuación adicional utilizando la restricción. Así, por ejemplo, con la Ec. (7.35) se tiene

$$(\Delta\mathbf{a}_n^{i-1} + \delta\mathbf{a}_n^i)^T(\Delta\mathbf{a}_n^{i-1} + \delta\mathbf{a}_n^i) = \Delta l^2 \tag{7.37}$$

La sustitución de (7.36), en la cual $\delta\lambda_i$ está todavía indeterminada, en (7.37) resulta en una ecuación cuadrática para la solución de $\delta\lambda_i$ (que bien puede resultar ser negativa). Los detalles del álgebra se dan en la referencia [19].

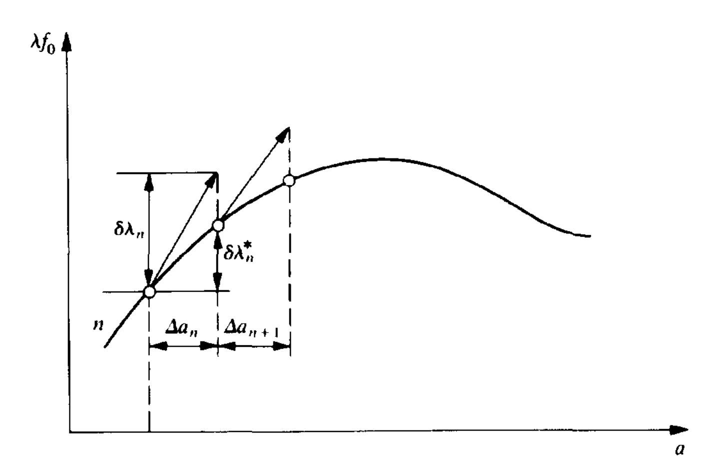


Figura 7.7 Interpretación unidimensional del procedimiento de Bergan.

El procedimiento sugerido por Bergan[26,29] es algo diferente a los anteriormente descritos. Aquí se supone primeramente un incremento de carga fijo $\delta\lambda_n$ y se utiliza cualquiera de los procedimientos iterativos antes presentados para calcular el incremento $\delta\mathbf{a}_n^i$. Ahora se calcula un nuevo incremento $\Delta\lambda_n^*$ de forma que se minimice la forma del residuo

$$[(\mathbf{P}_{n+1}^{i+1} + \Delta\lambda_n^*\mathbf{f}_0)^T(\mathbf{P}_{n+1}^{i+1} + \Delta\lambda_n^*\mathbf{f}_0)]^{1/2} = d \tag{7.38}$$

Esto resulta en

$$\frac{d(d)}{d(\Delta\lambda_n^*)} = 0 \tag{7.39}$$

y

$$\Delta\lambda_n^* = \frac{\mathbf{f}_0^T\mathbf{P}_{n+1}^{i+1}}{\mathbf{f}_0^T\mathbf{f}_0}$$

Esta cantidad puede de nuevo resultar negativa, implicando una disminución de carga, y ciertamente resulta en todos los casos en una rápida reducción del residuo, pero el control preciso de la magnitud de los desplazamientos se hace más difícil. La interpretación del método de Bergan en un ejemplo unidimensional, mostrado en la Figura 7.7, es aclaratoria. Aquí da la respuesta exacta –con un control de desplazamiento cuya magnitud viene determinada por el $\Delta\lambda_n$ inicial supuesto y la pendiente $\mathbf{K}$ utilizada en la primera iteración–.

7.5 Criterios de convergencia

En todos los procesos iterativos descritos se llega a la solución númerica sólo de forma aproximada y se tienen que poner límites de tolerancia para terminar con las iteraciones.

Frecuentemente los criterios utilizados usan una norma del cambio de los parámetros de desplazamiento $\|\mathbf{a}_n^i\|$ o, de forma más lógica, la del residuo $\|\mathbf{\Psi}_{n+1}\|$. En este último caso el límite se expresa como un porcentaje de la norma de las fuerzas exteriores $\|\mathbf{f}_{n+1}\|$. De esta forma se puede exigir que

$$\|\mathbf{\Psi}_{n+1}\| \leq \varepsilon\|\mathbf{f}_{n+1}\|/100 \tag{7.40}$$

donde ε es una tolerancia en porcentaje (por ejemplo, 0.1–1%) y

$$\|\mathbf{\Psi}\| \equiv (\mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi})^{1/2} \tag{7.41}$$

El error debido a la solución incompleta de las ecuaciones discretas no lineales se suma naturalmente al error debido a la discretización que frecuentemente medimos en norma de energía [véase Capítulo 14 del Volumen 1]. Por tanto, parece lógico usar la misma norma para acotar el proceso iterativo. Podríamos por tanto exigir que

$$(\mathbf{\Psi}^T\mathbf{a})^{1/2} \leq \varepsilon(\mathbf{f}^T\mathbf{a})^{1/2}/100 \tag{7.42}$$

y tomar para ε un valor de orden similar al utilizado para establecer errores permisibles de discretización.

7.6 Consideraciones generales sobre los métodos incrementales

Los varios métodos iterativos que se han descrito proporcionan las herramientas esenciales para la solución de *todos los problemas no lineales* en los que se ha utilizado discretización por elementos finitos. La elección precisa de la metodología óptima es dependiente del problema y aunque se han publicado muchos estudios comparativos sobre el coste de la solución[9,15,18] las diferencias son a menudo marginales. Hay, sin embargo, poca duda de que:

a) los procesos de Newton-Raphson exactos deben ser usados cuando la convergencia es difícil de conseguir, y
b) la ventaja de la actualización simétrica de matrices en los procedimientos de cuasi-Newton a menudo hace de éstos el único candidato práctico desde el punto de vista económico (cuando existen módulos tangentes no simétricos).

No se han discutido en lo anterior *métodos iterativos directos* tales como las varias formas del método de gradiente conjugado[30,34] o *métodos de relajación dinámica* en los que se realiza un análisis transitorio explícito para llegar a la solución estática[35,36] (véase Capítulo 10). Todos estos procesos se caracterizan por:

a) una forma diagonal de la matriz utilizada para calcular los incrementos de prueba $\delta\mathbf{a}$ (y por tanto un coste muy bajo por iteración), y

b) un número grande de iteraciones totales y, por tanto, de evaluaciones del residuo $\boldsymbol{\Psi}$.

Estas tendencias opuestas no han resultado aún en reducciones importantes de coste para problemas de tamaño medio, pero hay poca duda de que tales métodos son competitivos para problemas de gran tamaño. Se ilustrará su uso más adelante en este libro en el contexto de mecánica de fluidos (Capítulos 14 y 15) donde actualmente constituyen el procedimiento preferido.

Una última consideración se refiere al tamaño de los incrementos $\Delta\mathbf{f}$ o $\Delta\lambda$ que deben usarse. En primer lugar, está claro que pequeños incrementos reducen el número total de iteraciones que se necesita por incremento y en muchas aplicaciones se necesita un cálculo autómatico para mantener un número de iteraciones (casi constante) por incremento. Para esto se pueden recomendar procedimientos tales como el uso del "parámetro de rigidez instantánea" utilizado por Bergan.[26]

En segundo lugar, si la relación constitutiva es *dependiente de la historia* es deseable el uso de pequeños incrementos para mantener la precisión en la evaluación de los cambios de tensión (o de parámetros similares en otros problemas de campo). Ya se ha destacado en este contexto la necesidad de calcular tales cambios utilizando siempre el cambio acumulado $\Delta\mathbf{a}_n^i$ y no (como se hace algunas veces) sumando los cambios debidos a cada paso iterativo $\delta\mathbf{a}_n^i$ en un incremento.

En tercer lugar, si se hace un único paso de Newton-Raphson por cada incremento de $\Delta\lambda$, entonces el procedimiento es equivalente a la solución de un problema incremental estándar mediante integración directa hacia adelante. Nótese que si la Ec. (7.1) se reescribe de la forma

$$\mathbf{P}(\mathbf{a}) - \lambda\mathbf{f}_0 = 0 \tag{7.43}$$

se puede obtener, diferenciando

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{a}}\frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} = \mathbf{f}_0 \tag{7.44}$$

y escribir esto de la forma

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} = \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{f}_0 \tag{7.45}$$

o, de forma explícita

$$\Delta\mathbf{a}_n = \mathbf{K}_{Tn}^{-1}\mathbf{f}_0\Delta\lambda_n \tag{7.46}$$

Esta integración directa se muestra en la Figura 7.8 y a menudo puede ser divergente. Sin embargo, el uso de procedimientos de Runge–Kutta que se discutirán más adelante puede proporcionar una mejora en la precisión.

PROBLEMAS DE MECÁNICA DE SÓLIDOS INDEPENDIENTES DE LA VELOCIDAD DE CARGA

7.7 Consideraciones generales –elasticidad no lineal–

Con la formulación estándar en desplazamientos todos los problemas de mecánica de sólidos se pueden escribir como el conjunto de ecuaciones

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}) = \int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\,d\Omega - \mathbf{f} \equiv \mathbf{P}(\mathbf{a}) - \mathbf{f} = 0 \tag{7.47}$$

donde los desplazamientos y las deformaciones se aproximan de la forma usual como

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a} \tag{7.48}$$

De forma general $\boldsymbol{\sigma}$ será una cierta función de la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ y el cálculo de los cambios de $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ correpondientes a cambios de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ (o $\Delta\mathbf{a}$) requerirá un tratamiento especial. Sin embargo, en todos los casos se podrá utilizar cualquiera de los procedimientos iterativos discutidos previamente. Nótese que

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\mathbf{a}} \equiv \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{a}} = \mathbf{K}_T = \int_\Omega \mathbf{B}^T\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{a}}\,d\Omega = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}_T\mathbf{B}\,d\Omega \tag{7.49}$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{7.50}$$

y

$$\mathbf{D}_T = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.51}$$

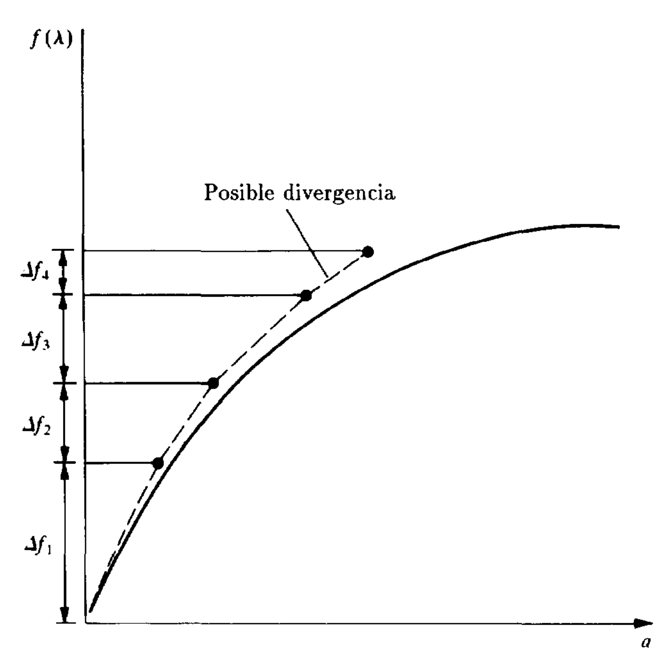


Figura 7.8 Integración directa.

se conoce como la *matriz elástica tangente.* La expresión anterior es especialmente cómoda, ya que es la misma que aparece en los problemas de elasticidad, y si $\mathbf{D}_T$ es una matriz simétrica, se podrán volver a emplear para los cálculos las mismas rutinas que para la solución de problemas de elasticidad.

Es útil interpretar el vector de residuos $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}_n)$ como un vector de fuerzas *residuales* o *desequilibradas.* Esto permite obtener una medida física de la magnitud del error en la solución de las ecuaciones.

Dado que, frecuentemente, la separación del comportamiento lineal sólo se presenta para los valores más altos de tensión o deformación, conviene comparar la relacion (7.50) con la lineal, esto es

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{7.52}$$

Evidentemente puede establecerse una equivalencia entre ambas expresiones, expresando $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ o $\boldsymbol{\sigma}_0$ como funciones del nivel de deformación, donde dichas funciones tienen valor nulo para estados de pequeña deformación y se aplican, de hecho, como *corrección* del proceso lineal. Si todas las no linealidades se expresan en términos de tensiones iniciales $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\varepsilon})$, se puede obtener una solución puramente elástica con una matriz $\mathbf{D}$ constante, pero con un error en el término de fuerzas dado por

$$\int_\Omega \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, d\Omega \tag{7.53}$$

y este *vector de fuerzas desequilibradas* debe ser corregido.

La corrección puede llevarse a cabo mediante una subsecuente solución elástica, utilizando, bien el módulo elástico tangente o el original, y el lector reconocerá que esto es precisamente la aplicación de los procedimientos de Newton-Raphson o de Newton-Raphson modificado discutidos en la sección previa, en los que comprobamos el error comparando la tensión que se ha calculado como elástica con la obtenida por la relación no lineal. Por ello, estas técnicas se conocen con el nombre de *métodos de transferencia de tensiones* o *métodos de tensiones iniciales* y son esencialmente idénticos a los descritos como algoritmos de Newton-Raphson modificado.

El caso de elasticidad no lineal (hiperelasticidad) en el que la relación (7.50) es única y no depende de la trayectoria es uno en el que todas las técnicas descritas previamente pueden ser utilizadas de forma simple. Aquí el tamaño del $\Delta\mathbf{a}$ es completamente arbitrario y puede de hecho corresponder al valor total de $\mathbf{a}$ siempre que la no linealidad sea suficientemente suave como para permitir un número razonable de iteraciones.[37] Si la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ depende únicamente de $\boldsymbol{\varepsilon}$, la energía de deformación W (potencial) debe ser tal que sea única, esto es, que

$$W = W(\varepsilon) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \tag{7.54}$$

ya que de otra forma se violaría la primera ley de la termodinámica. La consecuencia de esto es que $\mathbf{D}_T$ debe ser siempre una matriz simétrica, ya que

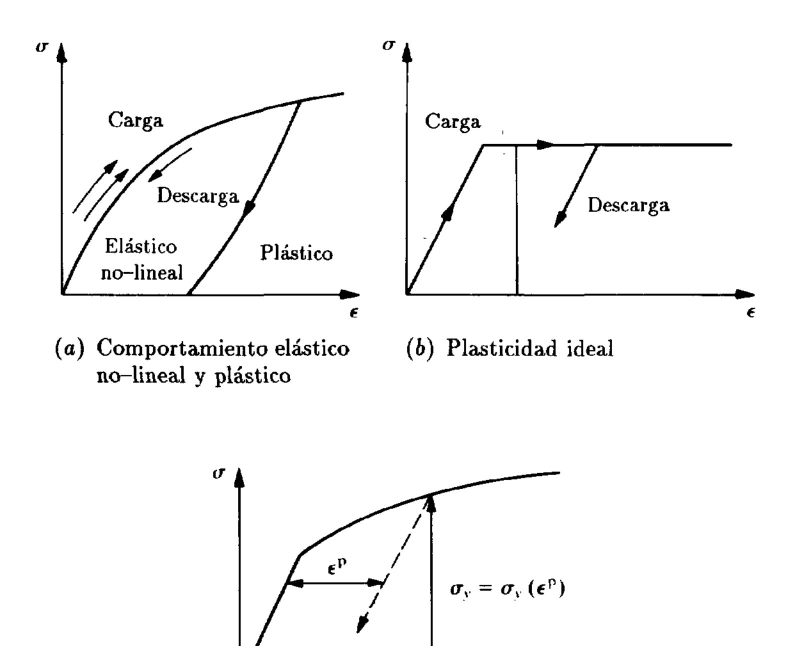
$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} \tag{7.55}$$

7.8 Plasticidad

7.8.1 *Teoría clásica de la plasticidad.* El comportamiento "plástico" de los sólidos se caracteriza por una relación no única entre tensiones y deformaciones, al contrario del caso de la elasticidad no lineal estudiado antes. Una característica de definición de plasticidad podría ser la existencia de deformaciones remanentes una vez que cesan de actuar sobre el cuerpo las fuerzas exteriores.

Si se considera el comportamiento unidimensional de un material, tal como se muestra en la Figura 7.9(a), se ve que fijándose únicamente

en el proceso de carga es imposible conocer si un material se comporta de manera elástica no lineal o plástica, aún conociendo las relaciones no lineales. Al descargarlo se apreciará inmediantamente la diferencia entre el material elástico, que seguirá la misma curva, y el plástico, que seguirá una curva distinta *dependiente de la historia.*



(*a*) Comportamiento elástico no–lineal y plástico

(*b*) Plasticidad ideal

(*c*) Plasticidad con endurecimiento por deformación

Figura 7.9 Comportamiento uniaxial de materiales reales.

Muchos materiales presentan un comportamiento *plástico perfecto* y tienen una tensión límite o de fluencia, σ_y, para la cual las deformaciones están indeterminadas. Para toda tensión por debajo de la tensión límite se supone una relación elástica lineal (o no lineal). La Figura 7.9(*b*) ilustra esta característica. Un refinamiento adicional de este modelo es el material plástico con endurecimiento/ablandamiento, en el que la tensión de fluencia depende de un parámetro κ (tal como la deformación plástica ε^p) [Figura 7.9(*c*)]. Esta sección trata sobre estas clases de plasticidad, sobre las que se han desarrollado numerosas teorías.[38]

En un estado multiaxial de tensión $\boldsymbol{\sigma}$ es necesario generalizar los conceptos de fluencia.

Superficie de fluencia. La hipótesis general, demostrada experimentalmente, es que la fluencia se produce sólo si las tensiones σ satisfacen un critero general de fluencia

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \tag{7.56}$$

donde κ es un parámetro "de endurecimiento". Esta condición de fluencia se puede visualizar como una superficie en el espacio n-dimensional de tensión, con la posición de la superficie dependiendo del valor instantáneo del parámetro de estado κ (Figura 7.10).

Regla de flujo (principio de ortogonalidad). Von Mises[38] fue el primero en sugerir que el comportamiento básico que define los incrementos de deformación plástica está relacionado con la superficie de fluencia. Diversos investigadores en este campo han expuesto argumentos heurísticos para demostrar la validez de la relación propuesta[39–46] y, hoy en día, la hipótesis que parece generalmente aceptada es la siguiente: si $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ denota el incremento de deformación plástica, entonces†

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7.57}$$

o, para cada componente n,

$$d\varepsilon_n^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_n}$$

En esta expresión, $d\lambda$ es una constante de proporcionalidad todavía indeterminada. Este criterio se conoce como principio de *ortogonalidad*, ya que la relación (7.57) se puede interpretar como una condición de que el "vector" incremento de deformación plástica sea normal a la superficie de fluencia en el espacio n-dimensional de tensiones.

Las restricciones de la regla anterior se pueden evitar definiendo separadamente un *potencial plástico*

$$Q = Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \tag{7.58}$$

† Algunos autores prefieren escribir la Ec. (7.57) en forma de velocidad, esto es

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

donde $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv d\boldsymbol{\varepsilon}^p/dt$ y t es una variable de pseudo-tiempo. Para evitar la confusión con la dependencia con el tiempo real hemos preferido operar con incrementos infinitesimales.

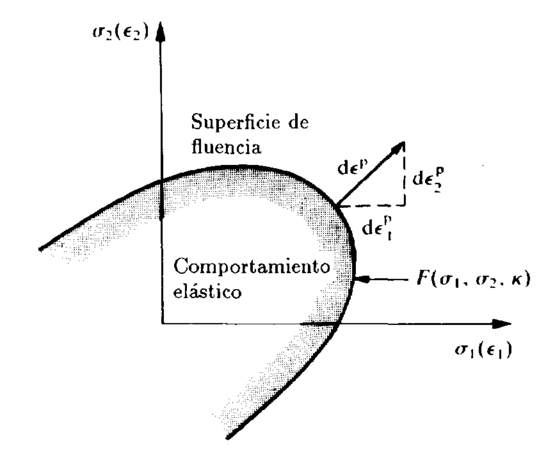


Figura 7.10 Superficie de fluencia y criterio de ortogonalidad en un espacio bidimensional de tensiones.

que defina el incremento de deformación plástica de manera similar a la Ec. (7.57), es decir

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7.59}$$

El caso particular de $Q = F$ se conoce con el nombre de *plasticidad asociada.* Si $Q \neq F$, la plasticidad es *no asociada.* En lo que sigue utilizaremos la forma más general.

Relaciones incrementales tensión-deformación. Durante un incremento infinitesimal de la tensión, supondremos que la variación de la deformación se puede separar en dos partes, una elástica y otra plástica. Así pues

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{7.60}$$

Los incrementos de deformación elástica están relacionados con los de la tensión por medio de una matriz simétrica de constantes $\mathbf{D}$ de la forma habitual. Se puede escribir, por tanto, la Ec. (7.60), incorporando la relación plástica (7.59), de la forma

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\, d\lambda \tag{7.61}$$

El incremento plástico de deformación ocurrirá solamente si el incremento "elástico" de tensión

$$d\boldsymbol{\sigma}^e \equiv \mathbf{D}\, d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.62}$$

tiende a colocar la tensión fuera de la superficie de fluencia, esto es, si está en la dirección de *carga plástica.* Si, por otro lado, este cambio de tensión es tal que produce *descarga*, entonces naturalmente no aparecerá deformación plástica, tal como se muestra para el caso unidimensional en la Figura 7.9. La comprobación de la relación anterior es por tanto crucial para diferenciar entre las operaciones de carga y descarga, y subraya la importancia de la trayectoria de deformación para calcular los cambios de tensión.

Cuando se produce carga plástica las tensiones están en la superficie de fluencia dada por la Ec (7.56). Diferenciando ésta se puede escribir

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1}\, d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2}\, d\sigma_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \kappa}\, d\kappa = 0$$

o bien
$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T d\boldsymbol{\sigma} - A d\lambda = 0 \tag{7.63}$$

en la cual se hace la sustitución

$$A = -\frac{\partial F}{\partial \kappa}\frac{d\kappa}{d\lambda} \tag{7.64}$$

Las Ecs. (7.61) y (7.63) se pueden escribir ahora en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1} & \left\{\dfrac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} \\ \left\{\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T & -A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\sigma} \\ d\lambda \end{Bmatrix} \tag{7.65}$$

La constante indeterminada $d\lambda$ se puede eliminar ahora (teniendo cuidado de no multiplicar o dividir por A, que puede ser nula en plasticidad perfecta).† Esto conduce a una relacion explícita que determina la *variación de las tensiones* en función de los *incrementos de deformación* con

† Para llevar a cabo la eliminación, se multiplica la primera de las Ecs. (7.65) por $(\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{D}$, para obtener

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T d\boldsymbol{\sigma} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D}\, d\boldsymbol{\varepsilon} - \left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D} \left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} d\lambda$$

y, sustituyendo en la segunda ecuación

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D}\, d\boldsymbol{\varepsilon} - \left[\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D} \left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} + A\right] d\lambda = 0$$

Eliminando $d\lambda$ de la primera ecuación se obtienen las Ecs. (7.66) y (7.67).

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^*_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.66}$$

y

$$\mathbf{D}^*_{ep} = \mathbf{D} - \mathbf{D}\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D}\left[A + \left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D}\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\right]^{-1} \tag{7.67}$$

La matriz elastoplástica $\mathbf{D}^*_{ep}$ hace las veces de la matriz de rigidez elástica $\mathbf{D}_T$ empleada en análisis incremental.

Esta matriz sólo es simétrica cuando la plasticidad es asociada. El material no asociado presentará dificultades especiales si se utilizan procedimientos de módulo tangente diferentes del método de Newton-Raphson modificado.

Aún en el caso de plasticidad perfecta ($A = 0$), la matriz está bien definida. La forma explícita de estas expresiones para plasticidad fue obtenida originalmente por Yamada *et al.*[47] y Zienkiewicz *et al.*[48]

Significado del parámetro "A". Es evidente que para el caso de un material plástico perfecto sin endurecimiento, A es sencillamente nulo. Si se considera endurecimiento, es preciso poner atención en la naturaleza del parámetro (o parámetros) κ del que dependen los cambios de la superficie de fluencia.

Para un material con "endurecimiento por trabajo"† κ se toma a veces como la cantidad de trabajo plástico realizado durante la deformación plástica. Así

$$d\kappa = \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \cdots = \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{7.68}$$

Utilizando la regla de flujo [Ec. (7.59)] se tiene alternativamente

$$d\kappa = d\lambda\, \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7.69}$$

Sustituyendo la Ec. (7.69) en la Ec. (7.64) se ve que $d\lambda$ desaparece y se puede escribir

$$A = \frac{\partial F}{\partial \kappa} \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7.70}$$

expresión totalmente determinada si se conoce la relación explícita entre F y κ. Se tienen interpretaciones similares para diferentes hipótesis de

† Denominado también "endurecimiento por deformación". N. del T.

endurecimiento. El lector puede consultar el trabajo de Koiter[40] para una generalización de los conceptos anteriores a una superficie de fluencia que tenga "esquinas", donde $\partial Q/\partial \boldsymbol{\sigma}$ está indeterminada.

7.8.2 *Algunos ejemplos típicos de plasticidad clásica.*

Relaciones de Prantl-Reuss. Para aclarar algunos de los conceptos, consideremos el caso particular de la conocida superficie de fluencia de Huber-von Mises con una regla de flujo asociado. La expresión de ésta es

$$F = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 3\sigma_4^2 + 3\sigma_5^2 + 3\sigma_6^2\right]^{1/2} - \sigma_y$$
$$\equiv \bar{\sigma} - Y \tag{7.71}$$

donde los subíndices 1,2,3 se refieren a las componentes normales de la tensión, y 4,5,6 a las componentes tangenciales en un estado tridimensional general de tensiones. En lo anterior, $\bar{\sigma}$ es el segundo invariante de tensión.

Tras diferenciar se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} &= \frac{3s_1}{2\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = \frac{3s_2}{2\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} = \frac{3s_3}{2\bar{\sigma}} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_4} &= \frac{3s_4}{\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_5} = \frac{3s_5}{\bar{\sigma}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_6} = \frac{3s_6}{\bar{\sigma}} \end{aligned} \tag{7.72}$$

en donde se introducen las tensiones desviadoras, esto es

$$s_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \qquad \text{etc.} \tag{7.73}$$

La cantidad $Y(\kappa)$ es la tensión uniaxial de fluencia. Si se tiene un gráfico del test uniaxial que dé $\bar{\sigma}$ en función de la deformación uniaxial plástica ε'_u, y se supone un endurecimiento por trabajo sencillo, entonces

$$d\kappa = Y d\varepsilon_u^p \tag{7.74}$$

y

$$-\frac{\partial F}{\partial \kappa} = \frac{\partial Y}{\partial \kappa} = \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_u^p}\frac{1}{Y} = \frac{H}{Y}$$

en la cual H es la pendiente del gráfico para un valor particular de $\bar{\sigma}$.

Sustituyendo en la Ec. (7.70), y tras efectuar algunas transformaciones, se obtiene simplemente

$$A = H \tag{7.75}$$

donde H se conoce como el *módulo plástico*. Esto establece las conocidas relaciones entre tensiones y deformaciones de Prandtl-Reuss.

Otras superficies de fluencia. Evidentemente el procedimiento general descrito permite determinar las matrices tangentes para casi todas las superficies de fluencia que se presentan en la práctica. Si dicha superficie (y el material) es isótropa conviene expresarla en función de los tres invariantes de tensión. Se ofrece a continuación una expresión particularmente útil de éstos, introduciendo también la notación indicial:[49]

$$\sigma_m = \frac{J_1}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \equiv \frac{\sigma_{ii}}{3}$$

$$\bar{\sigma} = J_1^{1/2} = [\frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{zy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zz}^2]^{1/2} \equiv \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (7.76)$$

$$\theta = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{\bar{\sigma}}\right) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$

donde

$$J_3 = s_x s_y s_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - s_x\tau_{yz}^2 - s_y\tau_{xz}^2 - s_z\tau_{xy}^2 \equiv \det \mathbf{s}$$

y $\quad s_x = \sigma_x - \sigma_m \qquad s_y = \sigma_y - \sigma_m \qquad s_z = \sigma_z - \sigma_m$

o bien $\quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \dfrac{\delta_{ij}\sigma_{ij}}{3}$

En la referencia [49] se muestra que las superficies de fluencia para varias condiciones clásicas de fluencia se pueden escribir de la forma:

1. Tresca:

$$F = 2\bar{\sigma}\cos\theta - Y(\kappa) = 0 \quad (7.77)$$

donde $Y(\kappa)$ es la tensión de fluencia obtenida de pruebas uniaxiales.

2. Huber-von Mises:

$$F = \sqrt{3}\bar{\sigma} - Y(\kappa) = 0 \quad (7.78)$$

Tanto la condición 1 como la 2 han sido extensamente comprobadas en el caso de la plasticidad en metales. Para suelos, hormigón y otros materiales "con rozamiento interno" se emplea generalmente la ley de Mohr-Coulomb, y su aproximación debida a Drucker y Prager.[21]

3. Mohr-Coulomb:

$$F = \sigma_m \operatorname{sen}\phi + \bar{\sigma}\cos\theta - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta - c\cos\phi = 0 \quad (7.79)$$

donde $c(\kappa)$ y $\phi(\kappa)$ son la cohesión y el ángulo de rozamiento, respectivamente, que pueden ser función de un cierto parámetro de endurecimiento por deformación κ.

4. Drucker-Prager:[50]

$$F = 3\alpha'\sigma_m + \bar{\sigma} - K = 0 \quad (7.80)$$

donde

$$\alpha' = \frac{2\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen}\phi)} \qquad K = \frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen}\phi)}$$

de nuevo c y ϕ pueden depender de un parámetro de endurecimiento por deformación.

Estas formas conducen a una definición muy cómoda de los vectores gradientes $\partial F/\partial\boldsymbol{\sigma}$ o $\partial Q/\partial\boldsymbol{\sigma}$, independientemente de si la superficie se usa como de fluencia o potencial. Se puede, por tanto, escribir siempre:

$$\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial\sigma_m}\frac{\partial\sigma_m}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial J_3}\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \quad (7.81)$$

Advirtiendo que

$$\frac{\partial F}{\partial J_3} = \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial J_3} \quad (7.82)$$

y empleando la Ec. (7.76), se puede escribir el vector gradiente como

$$\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{\partial F}{\partial\sigma_m}\mathbf{M}^0 + \frac{\partial F}{\partial J_2}\mathbf{M}^I + \frac{\partial F}{\partial J_3}\mathbf{M}^{II}\right)\boldsymbol{\sigma} \quad (7.83)$$

donde la forma de las matrices cuadradas $\mathbf{M}^0$, $\mathbf{M}^I$ y $\mathbf{M}^{II}$ viene dada en la Tabla 7.1.

En la Tabla 7.2 se dan los valores de las tres derivadas con respecto a los invariantes para las diversas superficies de fluencia mencionadas. El lector puede comprobar que en ellas se encuentran incluídas las relaciones de Prandtl-Reuss (7.72). La forma de las diversas superficies de fluencia mencionadas anteriormente se muestra en el espacio de tensiones principales en la Figura 7.11, aunque se han desarrollado muchas y más elaboradas, particularmente para problemas de suelos (geomecánica).[51–53]

Reglas generalizadas de endurecimiento/ablandamiento. Hemos supuesto hasta ahora que el parámetro κ está asociado a la cantidad de trabajo plástico disipado y éste, al ser un escalar, obviamente afectará a

TABLA 7.1

MATRICES **M** *DE LA EC. (7.83)*

$$\mathbf{M}^0 = \frac{1}{9\sigma_m}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simétrica} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}^I = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & \text{simétrica} & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{II} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sigma_x & \frac{1}{3}\sigma_z & \frac{1}{3}\sigma_y & -\frac{2}{3}\tau_{yz} & \frac{1}{3}\tau_{zx} & \frac{1}{3}\tau_{xy} \\ & \frac{1}{3}\sigma_y & \frac{1}{3}\sigma_x & \frac{1}{3}\tau_{yz} & -\frac{2}{3}\tau_{zx} & \frac{1}{3}\tau_{xy} \\ & & \frac{1}{3}\sigma_z & \frac{1}{3}\tau_{yz} & \frac{1}{3}\tau_{zx} & -\frac{2}{3}\tau_{xy} \\ & & & -\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \text{simétrica} & & & & -\sigma_y & \tau_{yz} \\ & & & & & -\sigma_z \end{bmatrix} + \sigma_m \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{simétrica} & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

TABLA 7.2

DERIVADAS DE LOS INVARIANTES

PARA VARIAS CONDICIONES DE FLUENCIA

Condiciones de fluencia	$\frac{\partial F}{\partial \sigma_m}$	$\sqrt{J_2}\frac{\partial F}{\partial J_2}$	$J_2\frac{\partial F}{\partial J_3}$
Tresca	0	$2\cos\theta(1+\tan\theta\tan 3\theta)$	$\frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta}{\cos 3\theta}$
Huber-von Mises	0	$\sqrt{3}$	0
Mohr-Coulomb	$\text{sen}\,\phi$	$\frac{\cos\theta}{2}\left[(1+\tan\theta\,\text{sen}\,3\theta) + \text{sen}\,\phi(\tan 3\theta - \tan\theta)/\sqrt{3}\right]$	$\frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,\phi\cos\theta}{2\cos 3\theta}$
Drucker-Prager	$3\alpha'$	1.0	0

la superficie de fluencia produciendo una simple expansión o contracción (endurecimiento isótropo). Se ha encontrado que tales modelos reproducen deficientemente el comportamiento real de algunos materiales, habiéndose desarrollado teorías sobre el endurecimiento cinemático en las que se tiene en consideración la dirección de deformación plástica.[42–44,54–56]

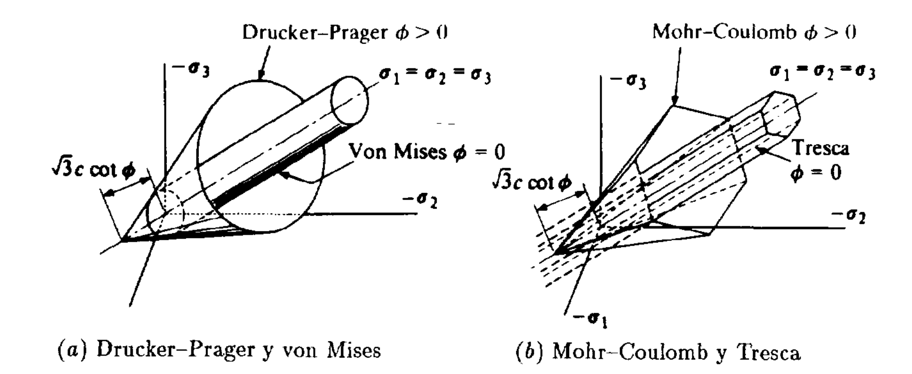


Figura 7.11 Algunas superficies de fluencia isótropas en el espacio de tensiones principales.

Otra alternativa, que utiliza directamente el método de los elementos finitos, es modelar el material mediante una técnica que considera diferentes "capas superpuestas".[57,58] En ella se supone que dos o más materiales sencillos, perfectamente plásticos, actúan en paralelo sometidos a los mismos incrementos de deformación. Esto, naturalmente, produce un efecto de endurecimiento del material con casi las mismas características que las conseguidas por los modelos de endurecimiento cinemático y, de hecho, es más realista desde el punto de vista físico. En este caso el modelo de elementos finitos describe de forma eficiente componentes separadas del material, demostrando una vez más su versatilidad.

7.8.3 *Plasticidad generalizada.* El comportamiento plástico, caracterizado por la irreversibilidad de las trayectorias de tensiones y por el desarrollo de cambios de deformación permanente después de un ciclo de carga, puede ser descrito de varias formas. En la Sección 7.8.1 se ha dado una de tales formas de descripción. Se presentará a continuación otra más general y de hecho más sencilla. Aquí se supone *a priori* la existencia de una relación incremental

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^* d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.84}$$

en la cual la matriz $\mathbf{D}^*$ depende no sólo de la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ y de los parámetros de estado $\boldsymbol{\kappa}$, sino también de la dirección del incremento de tensión (o deformación) aplicado $d\boldsymbol{\sigma}$ (o $d\boldsymbol{\varepsilon}$).[59] Se tiene una descripción algo menos ambiciosa si se acepta la dependencia de $\mathbf{D}^*$ solamente en dos direcciones –las de carga y descarga–. Si en el espacio general de tensiones se especifica una dirección de "carga" mediante un vector unitario $\mathbf{n}$ dado en cada punto (y que también depende de los parámetros de estado $\boldsymbol{\kappa}$), tal como se muestra en la Figura 7.12, se puede definir carga y descarga plástica

mediante el signo de la proyección $\mathbf{n}^T d\boldsymbol{\sigma}$. Así

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^T d\boldsymbol{\sigma} > 0 \quad & \text{para carga} \\ \mathbf{n}^T d\boldsymbol{\sigma} < 0 \quad & \text{para descarga} \end{aligned} \tag{7.85}$$

mientras que $\mathbf{n}^T d\boldsymbol{\sigma} = 0$ es una dirección neutra en la que sólo se da deformación elástica.

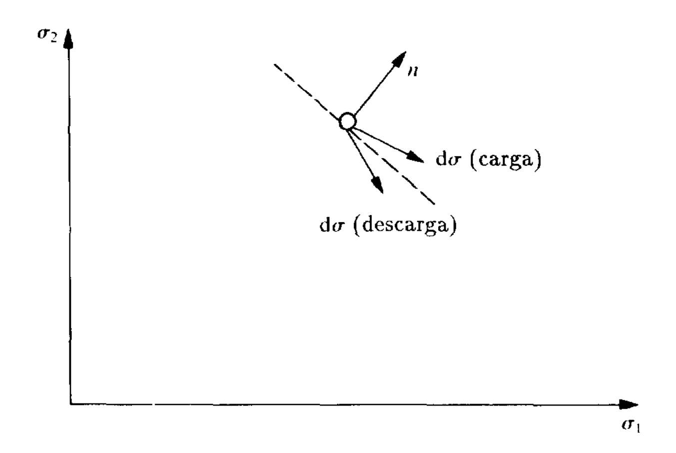


Figura 7.12 Direcciones de carga y descarga en el espacio de tensiones.

Se puede escribir de forma bastante general que

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_L^* d\boldsymbol{\varepsilon} \quad & \text{para carga} \\ d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_U^* d\boldsymbol{\varepsilon} \quad & \text{para descarga} \end{aligned} \tag{7.86}$$

donde las matrices $\mathbf{D}_L^*$ y $\mathbf{D}_U^*$ dependen sólo del estado descrito por $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\kappa}$.

La especificación de $\mathbf{D}_L^*$ y $\mathbf{D}_U^*$ debe ser tal que en la dirección neutra del incremento de tensión $d\boldsymbol{\sigma}$, los incrementos de deformación correspondientes a ésta sean iguales. Se requiere, por tanto

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_L^{*-1} d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_U^{*-1} d\boldsymbol{\sigma} \qquad \text{cuando} \quad \mathbf{n}^T d\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{7.87}$$

La forma más general de conseguir esto es escribir

$$\mathbf{D}_L^{*-1} \equiv \mathbf{D}^{-1} + \frac{\mathbf{n}_{gL}\mathbf{n}^T}{H_L}$$

y

$$\mathbf{D}_U^{*-1} \equiv \mathbf{D}^{-1} + \frac{\mathbf{n}_{gU}\mathbf{n}^T}{H_U} \tag{7.88}$$

donde $\mathbf{D}$ es la matriz elástica, $\mathbf{n}_{gL}$ y $\mathbf{n}_{gU}$ son vectores unitarios de tensión arbitrarios para las direcciones de carga y descarga, y H_L y H_U son módulos plásticos apropiados que en general dependen de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\kappa}$.

El valor de las matrices tangentes $\mathbf{D}_L^*$ y $\mathbf{D}_U^*$ se puede obtener mediante inversión directa si $H_{L/U} \neq 0$, pero de forma más general se puede escribir

$$\mathbf{D}_L^* = \mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{n}_{gL}\mathbf{n}^T(H_L + \mathbf{n}^T\mathbf{D}\mathbf{n}_{gL})^{-1} \tag{7.89}$$

con una forma similar para $\mathbf{D}_U$. Esta forma recuerda la Ec. (7.67) y efectivamente su deducción es casi idéntica. Por tanto, si escribimos

$$\frac{\mathbf{n}^T d\boldsymbol{\sigma}}{H_L} \equiv d\lambda \tag{7.90}$$

y escribimos las Ecs. (7.87) y (7.88) como

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_L^{*-1} d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\mathbf{n}_{gL}\mathbf{n}^T d\boldsymbol{\sigma}}{H_L} = \mathbf{D}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{n}_{gL} d\lambda \tag{7.91}$$

se obtiene una forma idéntica a la de la Ec. (7.65) y, de hecho, la misma eliminación bastaría para obtener $\mathbf{D}_L$ de la expresión (7.89) (véase nota al pie de la página 255). Naturalmente, el proceso para obtener $\mathbf{D}_U$ es idéntico.

Esta descripción sencilla y general de la *plasticidad generalizada* fue introducida por Mróz y Zienkiewicz.[60,61] Permite:

a) definir el modelo completo mediante la prescripción directa de $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_g$ y H para carga y descarga en cualquier punto del espacio de tensiones,
b) la existencia de plasticidad tanto en direcciones de carga como de descarga,
c) una relativa simplicidad en la descripción de resultados experimentales cuando éstos son complejos y existe incertidumbre sobre la existencia de una superficie de fluencia del tipo encontrado en plasticidad perfecta.

Por las razones anteriores las formas de plasticidad generalizada se han mostrado como extremadamente útiles para describir el comportamiento complejo de suelos.[62–64] Aquí se han mostrado también útiles otras descripciones que utilizan varias interpolaciones de $\mathbf{n}$ y de los módulos a partir de una única superficie de fluencia, conocidos como modelos *de plasticidad con superficies límite*, y que son de hecho formas particulares de la generalización anterior.[65]

Está claro que la plasticidad clásica es un caso especial de los modelos generalizados. Aqui la superficie de fluencia $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ define, naturalmente, un vector unitario normal a ella de la forma

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}}{[(\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma})^T(\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma})]^{1/2}} \tag{7.92}$$

De forma similar, el potencial plástico define un vector unitario $\mathbf{n}_g$:

$$\mathbf{n}_g = \frac{\partial Q/\partial \boldsymbol{\sigma}}{[(\partial Q/\partial \boldsymbol{\sigma})^T(\partial Q/\partial \boldsymbol{\sigma})]^{1/2}} \tag{7.93}$$

La sustitución de estos valores para los vectores unitarios en la Ec. (7.89) recupera, sin duda, la forma original de la Ec. (7.67). Sin embargo, la interpretación de la plasticidad general en los térmicos clásicos es más difícil.

El éxito de la plasticidad generalizada en las aplicaciones prácticas ha permitido resolver muchos fenómenos complejos de dinámica de suelos.[66] Nos referiremos a tales aplicaciones más tarde, pero en la Figura (7.13) se muestra como se puede seguir una respuesta cíclica compleja con carga y descarga plástica.

Aunque inicialmente se han especificado las direcciones de carga y descarga en función del cambio total de tensión $d\boldsymbol{\sigma}$, esta definición deja de aplicarse cuando aparece ablandamiento por deformación y el módulo plástico H se hace negativo. Entonces es más conveniente comprobar la dirección de carga y descarga utilizando el incremento de tensión elástica $d\boldsymbol{\sigma}^e$ de la Ec. (7.62), y especificar

$$\begin{aligned} &\mathbf{n}^T d\boldsymbol{\sigma}^e \geq 0 \qquad \text{para carga} \\ \text{y} \qquad &\mathbf{n}^T d\boldsymbol{\sigma}^e < 0 \qquad \text{para descarga} \end{aligned} \tag{7.94}$$

Naturalmente, esto resulta idéntico a la definición anterior de carga y descarga en el caso de endurecimiento.

7.9 Cálculo de los incrementos de tensión

Se ha enfatizado repetidamente que con el uso de procedimientos iterativos dentro de un incremento de carga particular $\Delta \mathbf{f}_n$ es importante calcular siempre los cambios de tensión $\Delta \boldsymbol{\sigma}_n^i$ correspondientes al cambio total de los parámetros de desplazamiento $\Delta \mathbf{a}_n^i$ y, por tanto, al cambio total de deformación

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^i = \mathbf{B} \Delta \mathbf{a}_n^i \qquad \Delta \mathbf{a}_n^i = \sum_0^i \delta \mathbf{a}_n^k \tag{7.95}$$

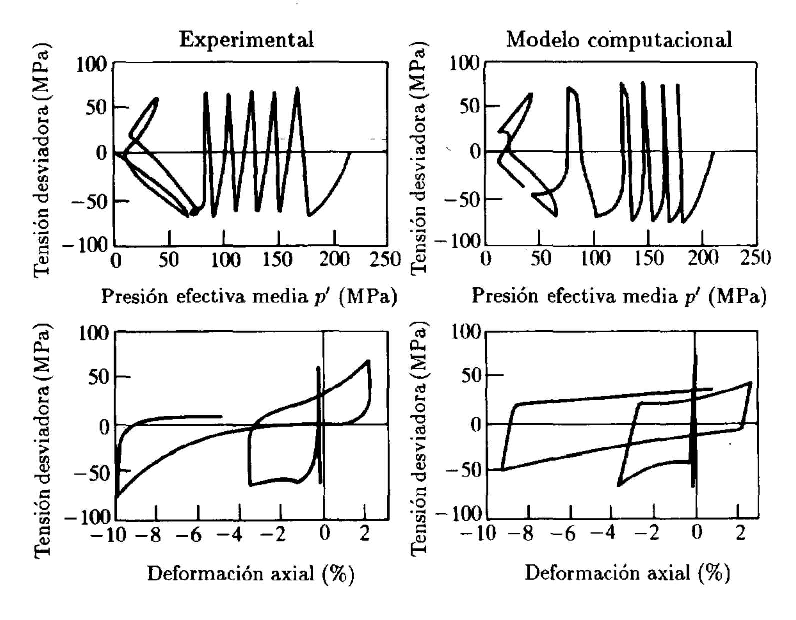


Figura 7.13 Un modelo de plasticidad generalizada para describir una trayectoria muy compleja, y comparación con datos experimentales. Carga cíclica no drenada en arenas de Niigata (T. Tatsueka y K. Ishihera, "Yielding of sand in triaxial compression", *Soil Found.*, **14**, 63–76, 1974)). (Nótese que en un test de suelo no drenado el fluido impide la deformación volumétrica y se desarrolla la presión intersticial; ver Capítulo 11).

que se ha acumulado en todas las iteraciones previas. Este punto es de importancia, ya que durante los cambios de desplazamiento iterativos $\delta \mathbf{a}_n^i$ se siguen diferentes trayectorias de deformación, llevando ocasionalmente a cambios de signo de la tensión y a descargas puramente elásticas.

En función de la matriz de rigidez elastoplástica dada por las Ecs. (7.67) y (7.89) esto significa que las tensiones deben ser integradas de la forma

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n^i = \int_0^{\Delta \varepsilon_n^i} \mathbf{D}_{ep}^* d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.96}$$

incorporando en $\mathbf{D}_{ep}^*$ la dependencia con $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{a}$ y $\boldsymbol{\kappa}$ de forma correspondiente a un incremento lineal de $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^i$ (o $\Delta \mathbf{a}_n^i$). Aquí, naturalmente, el cambio de los parámetros de estado $\boldsymbol{\kappa}$ [véase, por ejemplo, la Ec. (7.68)] debe incluirse adecuadamente, aunque esto generalmente presenta pocos problemas ya que normalmente se toma

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

Desde los primeros tiempos de los cálculos elastoplásticos se han adoptado varios procedimientos para la integración de la Ec. (7.96). Éstos pueden ser clasificados en las categorías de explícitos e implícitos.

7.9.1 *Métodos explícitos.* En los procedimientos explícitos se utiliza, bien un proceso de integración directa o bien se adopta alguna forma del método de Runge-Kutta. En el primero, el incremento conocido $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^i$ se subdivide em k intervalos y la integral de la Ec. (7.96) se reemplaza por un sumatorio, escribiéndose

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \sum_{l=0}^{k} \frac{{}^{l-1}\mathbf{D}^*\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{k} \tag{7.97}$$

donde $\mathbf{D}^*$ es la matriz tangente. En lo anterior se han omitido los subíndices n e i por claridad, tal como se hará en el resto de esta sección. ${}^{l-1}\mathbf{D}^*$ implica la evaluación de $\mathbf{D}^*$ para $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\kappa}$ en $l-1$.

Este procedimiento, introducido originalmente en la referencia [46] y descrito con detalle en las referencias [67] y [68], se conoce como *subincrementación.* Su precisión aumenta naturalmente con el número de subincrementos utilizados k. En general, es difícil decidir *a priori* sobre este número, y la precisión de la predicción no es fácil de determinar.

Tal integración conduce generalmente a que el cambio de tensión se separa un cierto margen de la superficie de fluencia. En problemas tales como los de plasticidad perfecta donde la superficie de fluencia es un límite físicamente claro, se realiza frecuentemente un escalado proporcional de las tensiones[69,70] (o procedimientos de retorno radial) para obtener tensiones que están siempre sobre las superficies de fluencia. Sin embargo, esto tiene poco sentido en situaciones de endurecimiento por deformación donde la superficie de fluencia es realmente una ficción.

El método de Runge-Kutta proporciona un procedimiento explícito de mayor precisión. Aquí se aplica primero un incremento de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}/2$ en un único paso y de forma explícita para obtener

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{1/2} = \mathbf{D}_0^*\frac{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{2} \tag{7.98}$$

utilizando la matriz elastoplástica inicial. Este incremento de tensión (y el correspondiente incremento de $\boldsymbol{\kappa}^{1/2}$) se evalúa para calcular ${}^{1/2}\mathbf{D}^*$ y finalmente se obtiene

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = {}^{1/2}\mathbf{D}^*\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.99}$$

Este proceso tiene precisión de segundo orden, y además puede dar una estimación del error cometido de la forma

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} - 2\Delta\boldsymbol{\sigma}_{1/2} \tag{7.100}$$

Si tales errores de tensión superan una cierta norma, el tamaño del incremento $\Delta\mathbf{f}_n$ puede ser modificado. Se recomienda expresamente este procedimiento para problemas de plasticidad generalizada en los que las matrices tangentes se evalúan con sencillez.

En algunos programas se utiliza a veces un cálculo puramente explícito en un solo paso. Esto conlleva errores considerables y, de hecho, linealiza el problema hasta el extremo de que una única iteración de Newton basta para obtener un incremento de carga.

7.9.2 *Métodos implícitos.* La integración de la Ec. (7.96) se puede, naturalmente, escribir en forma implícita. Por ejemplo, se puede escribir en lugar de la Ec. (7.96), durante cada iteración i, que

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_n^i = [(1-\theta)\mathbf{D}_n^{*i} + \theta\mathbf{D}_{n+1}^{*i}]\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^i \tag{7.101}$$

donde $\mathbf{D}_n^*$ es el valor de la matriz tangente al principio del incremento y $\mathbf{D}_{n+1}^i$ el valor al final.

Esta ecuación no lineal puede resolverse por cualquiera de los procedimientos descritos previamente; sin embargo, las derivadas de $\mathbf{D}^*$ son bastante complejas y, en cualquier caso, se comete un serio error en la forma aproximada de la Ec. (7.101). Además, no hay garantía de que las tensiones no se separen de la superficie de fluencia.

Para materiales con una superficie de fluencia bien definida es deseable volver a las ecuaciones originales de plasticidad (7.59) a (7.61) y escribir alternativamente

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\sigma}_n &= \mathbf{D}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^p &= \Delta\lambda\left[(1-\theta)\left.\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|_n + \theta\left.\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|_{n+1}\right] \\ F_{n+1} &= 0 \end{aligned} \tag{7.102}$$

donde sólo se ha aproximado la ecuación del incremento de deformación (7.58).

La aproximación es particularmente sencilla y estable para $\theta = 1$ (diferencias hacia atrás) y ahora, eliminando $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$, se puede escribir el sistema no lineal anterior de la sencilla forma

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n - \mathbf{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{\sigma}_n - \left.\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|_{n+1}\Delta\lambda = 0 \\ F_{n+1} = 0 \end{aligned} \tag{7.103}$$

Llamando $\mathbf{R}^i$ y r^i a los residuos de estas ecuaciones se puede utilizar cualquiera de los algoritmos generales iterativos descritos en la Sección 7.2. En particular, es conveniente utilizar el proceso de Newton-Raphson. Notando que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n$ es una constante fija, se puede escribir, diferenciando,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} & \dfrac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dfrac{\partial F^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & -A \end{bmatrix}_{n+1}^{i} \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\sigma}^i \\ \delta\lambda^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^i \\ r^i \end{Bmatrix} \tag{7.104}$$

En lo anterior,

$$\tilde{\mathbf{D}}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} + \Delta\lambda^i \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \tag{7.105}$$

y A es el mismo parámetro de endurecimiento que el obtenido en la Ec. (7.64). Se ha introducido cierta complejidad por la presencia de las segundas derivadas de Q en la Ec. (7.105) y frecuentemente se omite ese término por simplicidad, aunque se dispone de formas análiticas para dichas derivadas segundas para las superficies potenciales utilizadas con frecuencia.[71–74]

Es, sin embargo, importante notar que la vuelta al requisito de que $F_{n+1} = 0$ [véase Ec. (7.103)] asegura que el residuo r^i mide exactamente la separación de la superficie de fluencia. No se dispone de esta medida para la forma tangencial si se adopta $\mathbf{D}^{ep}$. Naturalmente, para la solución de $\delta\lambda^i$ sólo es necesario actualizar

$$\Delta\lambda^i = \sum_0^i \delta\lambda^k \tag{7.106}$$

y esa variable puede, en general, eliminarse. Esta eliminación puede hacerse exactamente de la misma manera que se estableció en la Ec. (7.67).

Se puede ahora escribir

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{D}^{**}\mathbf{R}^i - \frac{\tilde{\mathbf{D}}(\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma})r^i}{A + (\partial F^T/\partial \boldsymbol{\sigma})} D(\partial Q/\partial \boldsymbol{\sigma}) \tag{7.107}$$

donde $\mathbf{D}^{**}$ se obtiene sustituyendo $\tilde{\mathbf{D}}$ en lugar de $\mathbf{D}$ en la Ec. (7.67).†

† Es en cierta forma sorprendente que la tangente "consistente" $\mathbf{D}^{**}$ sea diferente de la matriz tangente $\mathbf{D}^{*}$ de la Ec. (7.67). Esto es enteramente debido a la aproximación que se hace cuando el incremento $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ es finito, y naturalmente desaparece cuando éste se hace pequeño. Es discutible cuál de estas tangentes debe ser usada en la iteración principal.

El tipo de algoritmo descrito aquí a menudo comienza en la primera iteración con un incremento puramente elástico, esto es

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\sigma}^0 &= \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \Delta\lambda^0 &= 0 \end{aligned} \tag{7.108}$$

y reduce iterativamente la tensión hasta la superficie de fluencia si se producen deformaciones plásticas. Por esta razón a veces se le llama *algoritmo de retorno.*

Debe remarcarse que el cálculo iterativo de la tensión se combina generalmente con iteraciones de equilibrio. De esta forma se pueden sumar los incrementos de tensión en los pasos individuales ya que la Ec. (7.103) concierne únicamente al incremento total.

En las primeras aplicaciones de la plasticidad se utilizaban procedimientos de Newton modificados y métodos de retorno simple.[46–49,75–81] Hoy son cada día más populares los otros procedimientos iterativos descritos anteriormente, tales como los métodos secantes.

7.10 Algunos ejemplos de cálculo plástico

La manera de efectuar la discretización mediante elementos finitos en problemas de plasticidad es idéntica a la de los problemas de elasticidad correspondientes. Se puede hacer uso de cualquiera de los elementos ya estudiados, encontrándose de nuevo que los elementos de orden elevado, junto con la integración reducida, presentan generalmente mejor comportamiento y tienen los mismos puntos de integración *óptimos* que los elementos descritos en el Capítulo 12 del Volumen 1.

El empleo de la integración reducida es muy importante para el estudio de fenómenos plásticos en metales, ya que las leyes de deformación plástica de von Mises no permiten cambios de volumen. A medida que las zonas plásticas se extienden y se llega a la carga de colapso, el proceso de deformación se asimila al de un material incompresible y con elementos convencionales, integrados exactamente, el sistema *se bloquea* y no se puede obtener una verdadera carga de colapso.[82,83] Naturalmente, las formulaciones mixtas son una alternativa viable.

Mientras que la matriz elastoplástica obtenida anteriormente es válida para un medio continuo general tridimensional, en plasticidad bidimensional hay que obtener expresiones reducidas que presentan peculiaridades especiales. En *tensión plana*, por ejemplo, esta reducción es evidente, basta con suprimir las columnas apropiadas en la Ec. (7.65) a las que corresponden las componentes de tensión nulas; en situaciones de *deformación plana* hay que tomar en consideración todas las tensiones, y son las componentes

apropiadas de la deformación las que deben anularse. Procediendo cuidadosamente en su eliminación se obtienen las expresiones explícitas que se pueden encontrar en la referencia [49]. Es interesante advertir que en dichos casos el término de la diagonal correspondiente a A ya no es cero, incluso en el caso de plasticidad perfecta.

Finalmente señalaremos que pueden resolverse problemas de plasticidad mediante formulaciones distintas a la del método de los desplazamientos. Otras formulaciones adecuadas son las basadas en las expresiones de equilibrio y también, por supuesto, la mayoría de las que se describieron en el Capítulo 12 del Voumen 1,[84–86] pero debido a su sencillez y fácil interpretación las utilizadas más frecuentemente son las basadas en el método de los desplazamientos.

7.10.1 *Placa perforada con o sin endurecimiento por deformación.*[48,79] En la Figura 7.14 se muestran la configuración y división de la placa en elementos triangulares sencillos. Se ha supuesto en este ejemplo que se satisfacen las condiciones de tensión plana; la solución se ha obtenido para los casos de plasticidad perfecta y teniendo en cuenta endurecimiento por deformación. Se ha empleado el criterio de von Mises y, en el caso en que se ha tenido en cuenta endurecimiento por deformación, se ha considerado una pendiente constante de la curva uniaxial de endurecimiento, H [Ec. (7.75)]. Se puede observar en las Figuras 7.14(b) y (c) el desarrollo de las zonas plásticas para distintas intensidades de la carga.

Aunque el estudio del proceso plástico se ha efectuado por incrementos, si se aplican las cargas en un incremento único y grande, el método de la tensión inicial sigue proporcionando una solución de equilibrio en la que no se exceden las tensiones límites. Dicha solución mediante un único incremento de carga muy grande se muestra en la Figura 7.14(b). Es interesante advertir que incluso ahora, a pesar de que no se cumplen las leyes que rigen el incremento de deformación, se obtienen resultados muy similares para las zonas plásticas. Es aún más importante observar que las deformaciones máximas que se alcanzan en el punto de primera fluencia son casi iguales a las obtenidas por el método incremental (Figura 7.15).

7.10.2 *Probeta entallada* (Figura 7.16). En el ejemplo anterior se emplearon elementos triangulares sencillos; se muestra ahora un estudio comparativo de dichos elementos con elementos isoparamétricos de mayor orden.[67,87] Adviértase cómo con estos elementos se consigue una mejor propagación de las zonas plásticas y una convergencia de los resultados más rápida.

7.10.3 *Vasija de presión metálica.* Este último ejemplo, en el que se dispone de los resultados experimentales obtenidos por Dinno y Gill,[88] ilustra una

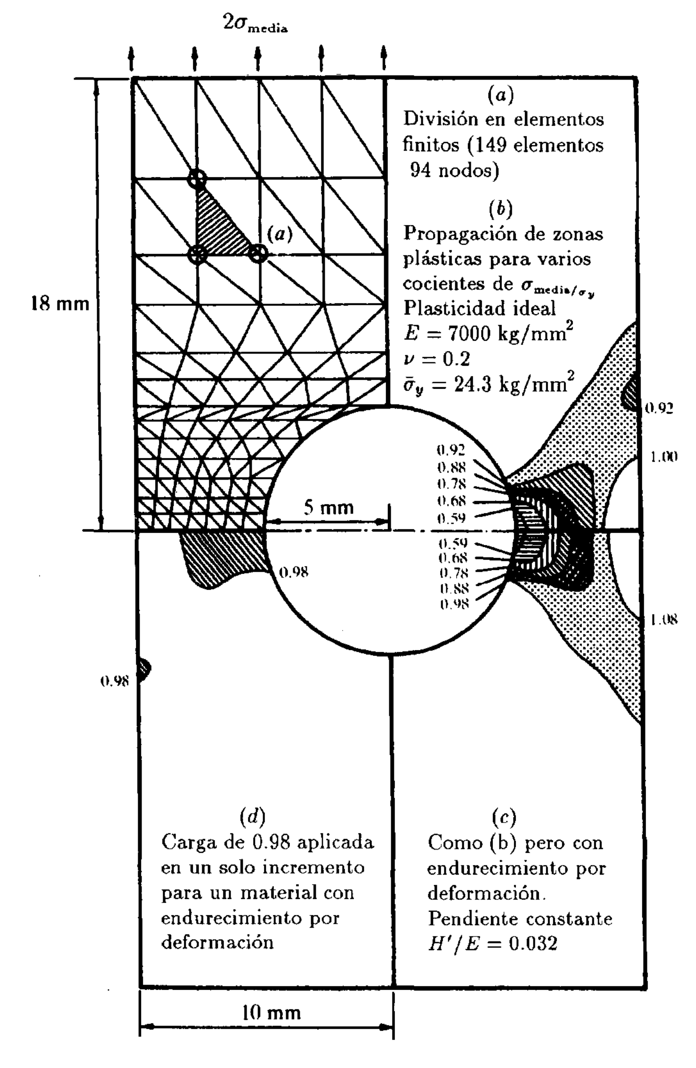


Figura 7.14 Placa perforada sometida a tracción (tensión plana). Malla utilizada y desarrollo de las zonas plásticas.

aplicación práctica y su objetivo es doble.

En primer lugar, mostrar que este problema, que puede considerarse como de lámina delgada, se puede representar adecuadamente por un número limitado (53) de elementos isoparamétricos cuadráticos. Este modelo simula, efectivamente, el comportamiento globlal de la vasija, así

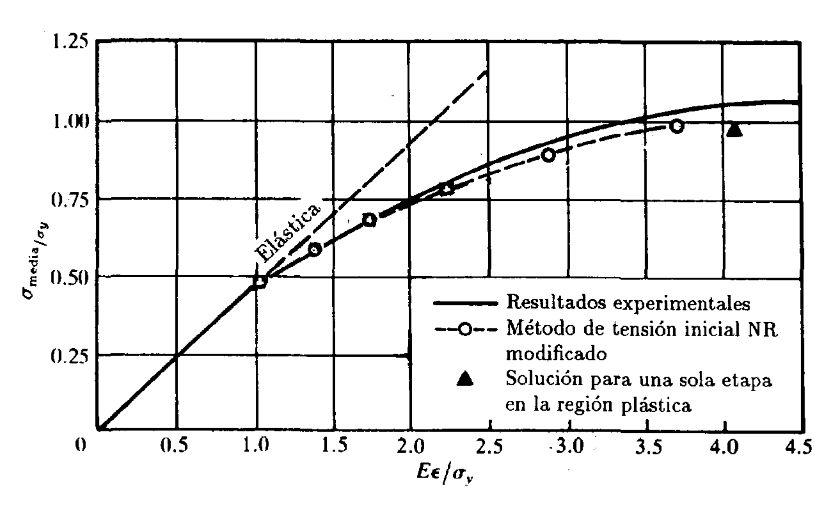


Figura 7.15 Placa perforada (tensión plana). Deformación total versus tensión media para $H^1/E = 0.032$. Incrementos de carga de $0.2 \times$ primera carga de fluencia.

como la concentración local de tensiones [Figura 7.17(a)].

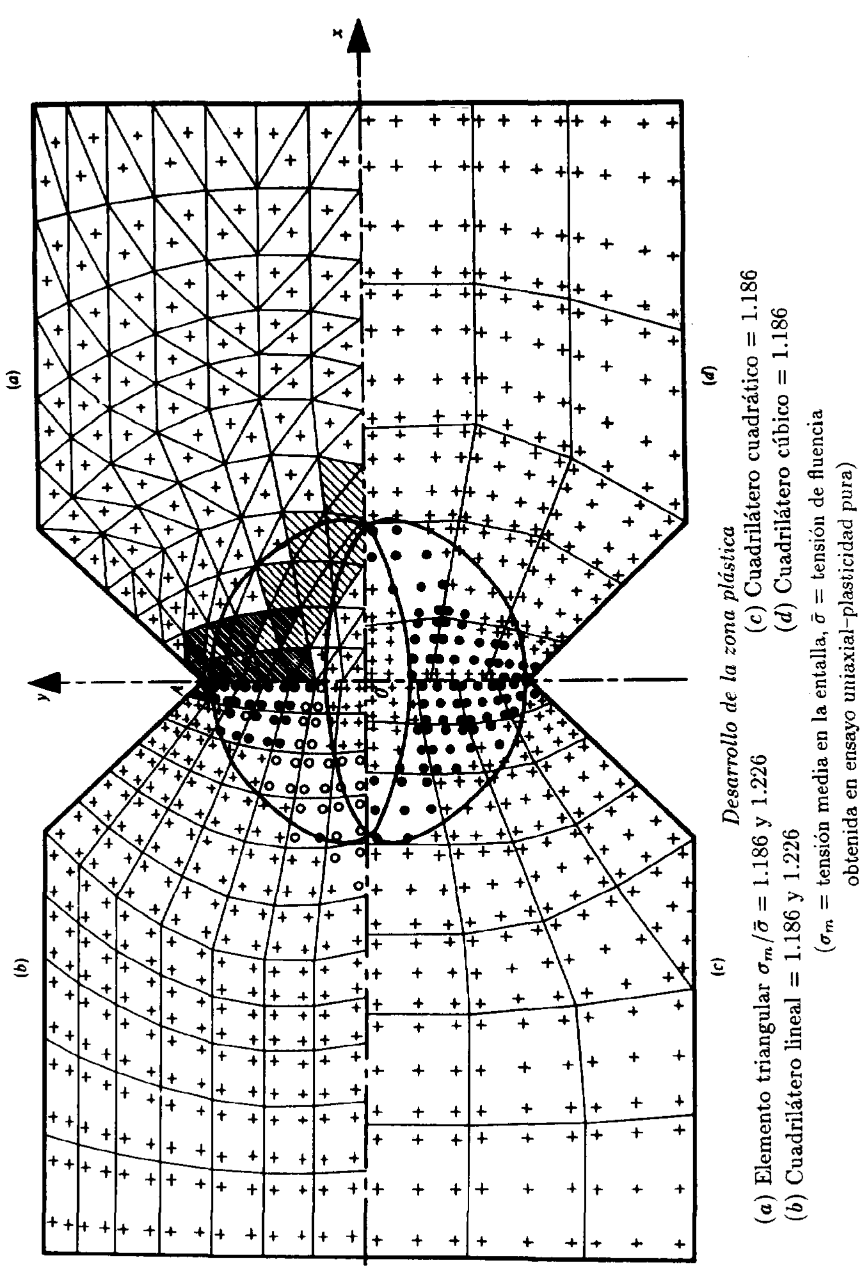
En segundo lugar, se decidió seguir con la solución hasta alcanzar casi el punto de rotura, aumentando la presión en vez de los desplazamientos. La comparación de los deplazamientos calculados y medidos que se puede apreciar en la Figura 7.17(b), muestra lo bien que se lograron los objetivos anteriores.

PROBLEMAS DEPENDIENTES DE LA VELOCIDAD DE CARGA. FLUENCIA, VISCOPLASTICIDAD Y VISCOELASTICIDAD

7.11 Formulación básica de los problemas de fluencia

El fenómeno de "fluencia" se manifiesta por una deformación dependiente del tiempo a tensión constante. Así, además de una deformación instantánea, el material sufre deformaciones de fluencia ε_c que generalmente aumentan con la duración de la carga. La ley de comportamiento de la fluencia será generalmente tal que la *velocidad de deformación de fluencia* venga definida como cierta función de las tensiones y de las deformaciones totales de fluencia, es decir

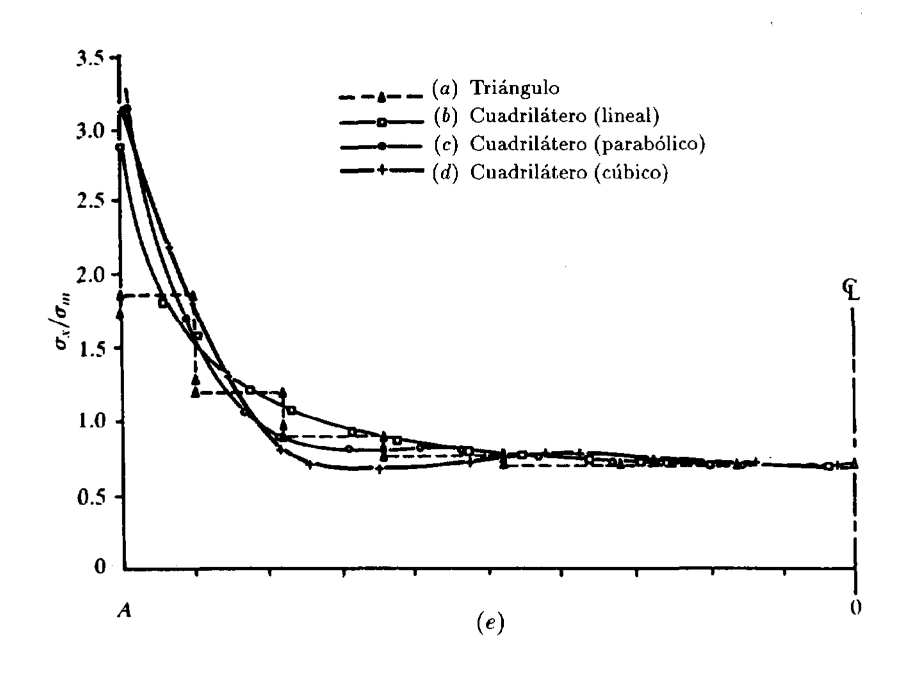
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \equiv \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^c}{dt} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^c) \qquad (7.109)$$

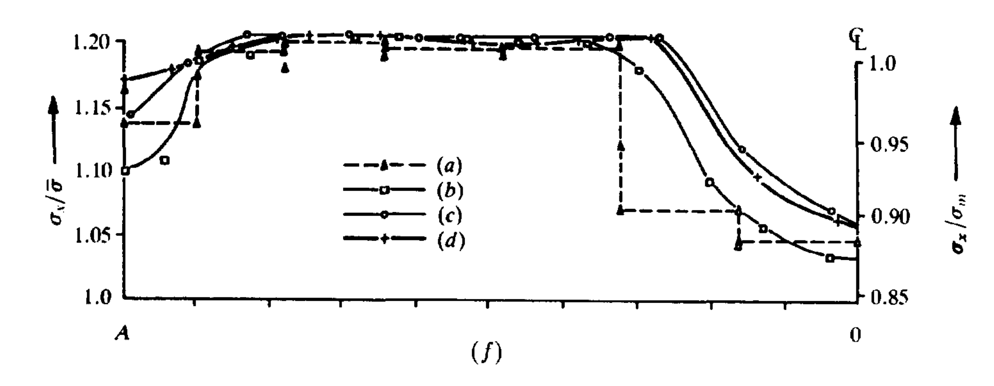


Desarrollo de la zona plástica

(a) Elemento triangular $\sigma_m/\bar{\sigma} = 1.186$ y 1.226
(b) Cuadrilátero lineal $= 1.186$ y 1.226
(c) Cuadrilátero cuadrático $= 1.186$
(d) Cuadrilátero cúbico $= 1.186$
(σ_m = tensión media en la entalla, $\bar{\sigma}$ = tensión de fluencia obtenida en ensayo uniaxial–plasticidad pura)

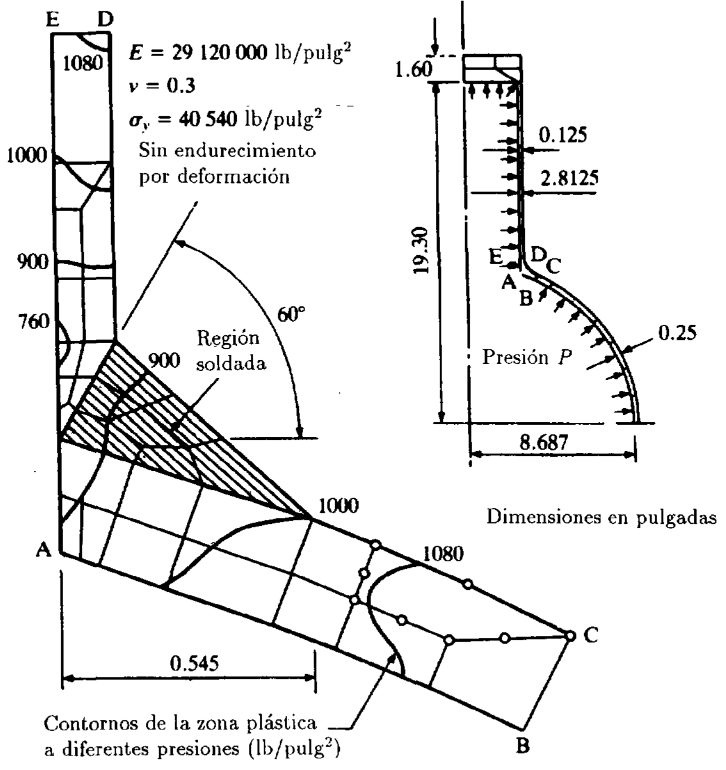
Figura 7.16 Comparación de varios elementos en la solución elastoplástica de una probeta entallada sometida a un estado de tensión plana.



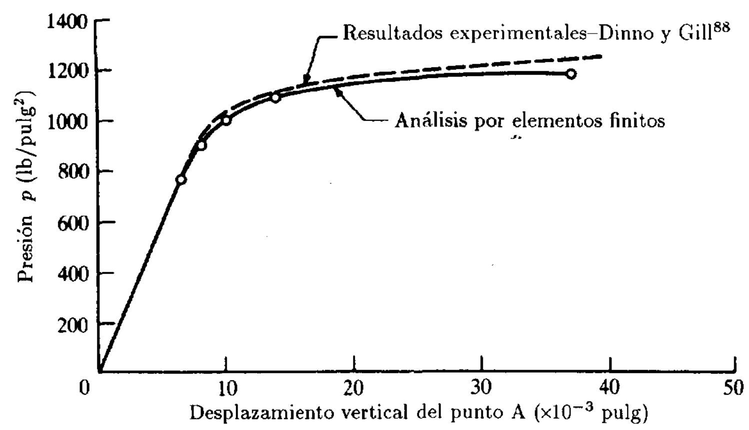


Distribución de tensiones en la entalla
(e) Elástica
(f) Elastoplástica para $\sigma_m/\bar{\sigma} = 1.186$
Número de grados de libertad aproximadamente igual a 172-178 en las cuatro soluciones

Figura 7.16 (*continuación*).



(*a*) Subdivisión en elementos y desarrollo de zonas plásticas (superficie de von Mises y plasticidad ideal)



(*b*) Desplazamiento vertical del punto A al aumentar la presión

Figura 7.17 Vasija de presión metálica.

Si se considera que las deformaciones instantáneas son elásticas, la deformación total puede escribirse como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^c \tag{7.110}$$

con

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{7.111}$$

despreciando cualquier deformación inicial (térmica) o tensión inicial (residual). Como de costumbre las condiciones de equilibrio

$$\int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \mathbf{f} = 0 \tag{7.112}$$

se satisfacen para todo tiempo, y si se conocen las condiciones iniciales del sistema, las Ecs. (7.109) a (7.112) proporcionan un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de coeficientes no lineales cuya solución es obtenible. En el Capítulo 10 se discutirán con detalle los métodos de solución de dichas ecuaciones, pero como la no linealidad más importante aquí es la que afecta al comportamiento del material, vamos a anticipar algunos de los procedimientos generales para obtener dicha solución.

En particular, si se considera un intervalo de tiempo Δt_n, al comienzo del cual se conoce el estado que se caracteriza por un conjunto de parámetros de desplazamientos nodales $\mathbf{a}_n$, tensiones $\boldsymbol{\sigma}_n$ y fuerzas $\mathbf{f}_n$, se puede escribir un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que relacionen las condiciones iniciales con las finales en el tiempo $t_n + \Delta t = t_{n+1}$. Por lo tanto, se tiene que resolver un conjunto de ecuaciones de equilibrio no lineales del tipo usual [véase Ec. (7.47)]

$$\boldsymbol{\Psi}_{n+1} \equiv \int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\, d\Omega - \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{7.113}$$

con una relación constitutiva apropiada que relacione los cambios de tensión y deformación. Esto puede reescribirse en una forma aproximada similar a la usada en plasticidad [véase Ec. (7.102)] de la forma

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\sigma}_n &= \mathbf{D}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n - \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^c) \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^c &= \Delta t\boldsymbol{\beta}_{n+\theta} \end{aligned} \tag{7.114}$$

donde $\boldsymbol{\beta}_{n+\theta}$ se calcula como

$$\boldsymbol{\beta}_{n+\theta} = (1-\theta)\boldsymbol{\beta}_n + \theta\boldsymbol{\beta}_{n+1}$$

Al eliminar $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^c$ se tiene sencillamente la ecuación no lineal

$$\mathbf{R}_{n+1} \equiv \Delta\boldsymbol{\sigma}_n - \mathbf{D}\mathbf{B}\Delta\mathbf{a}_n + \mathbf{D}\Delta t\boldsymbol{\beta}_{n+\theta} = \mathbf{0} \tag{7.115}$$

El sistema de ecuaciones (7.113) a (7.115) se puede resolver iterativamente utilizando, por ejemplo, el procedimiento de Newton-Raphson.

Comenzando por algún valor inicial –por ejemplo, $\Delta\mathbf{a}_n^0 = 0$; $\Delta\boldsymbol{\sigma}_n^0 = 0$– el proceso general iterativo/incremental se puede escribir (abandonando los subíndices n y $n+\theta$) como

$$\boldsymbol{\Psi}^{n+1} = \mathbf{0} = \boldsymbol{\Psi}^i + \int_\Omega \mathbf{B}^T\delta\boldsymbol{\sigma}^i\, d\Omega \tag{7.116}$$

De la Ec. (7.113), utilizando (7.109) y (7.114) y suponiendo para este ejemplo que $\boldsymbol{\beta}$ no depende de $\boldsymbol{\varepsilon}^c$, se tiene, de forma similar,

$$\mathbf{R}^{i+1} = \mathbf{0} = \mathbf{R}^i + \delta\boldsymbol{\sigma}^i - \mathbf{D}\mathbf{B}\delta\mathbf{a}^i + \mathbf{D}\Delta t\mathbf{C}\delta\boldsymbol{\sigma}^i \tag{7.117}$$

donde

$$\mathbf{C} = \left\{\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}_{n+\theta} = \theta\left\{\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}_{n+1} \tag{7.118}$$

Evaluando los residuos $\boldsymbol{\Psi}^i$ y $\mathbf{R}^i$ (este último a nivel elemental para todos los puntos de integración) se puede seguir el cálculo eliminando $\delta\boldsymbol{\sigma}^i$ de (7.116) utilizando (7.117) y restando

$$\left(\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}^{**}\mathbf{B}\, d\Omega\right)\delta\mathbf{a}^i = -\boldsymbol{\Psi}^i - \int_\Omega \mathbf{B}^T(\mathbf{I}+\mathbf{D}\Delta t\mathbf{C})^{-1}\mathbf{R}^i\, d\Omega - \Delta\mathbf{f}_n \tag{7.119}$$

donde

$$\mathbf{D}^{**} = (\mathbf{I}+\mathbf{D}\Delta t\mathbf{C})^{-1}\mathbf{D} \equiv [\mathbf{D}^{-1} + \Delta t\mathbf{C}]^{-1} \tag{7.120}$$

El cálculo iterativo que sigue es muy parecido al utilizado en plasticidad, pero aquí Δt es equivalente al incremento de carga, y, dada la naturaleza del tiempo, es siempre positivo. De hecho, la matriz tangente $\mathbf{D}^{**}$ juega aquí un papel muy similar al usado en la Ec. (7.107).

Mientras que en plasticidad hemos usado generalmente procedimientos implícitos (Euler hacia atrás), aquí son posibles muchas alternativas sencillas. En particular, son populares dos esquemas con un único paso iterativo.

7.11.1 *Procedimiento completamente explícito de "deformación inicial": $\theta = 0$, $i = 0$.* Aquí, de las Ecs. (7.118) y (7.120) se ve que

$$\mathbf{C} = \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{D}^{**} = \mathbf{D} \tag{7.121}$$

De la Ec. (7.115), poniendo $\Delta\boldsymbol{\sigma}_n = 0$ y $\Delta\mathbf{a}_n^0 = 0$, se tiene

$$\mathbf{R}^0 = \mathbf{D}\Delta t\boldsymbol{\beta}_n \tag{7.122}$$

y mediante la Ec. (7.119),

$$\delta\mathbf{a}^0 = \Delta\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1}\left(\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\Delta t\boldsymbol{\beta}_n\, d\Omega + \Delta\mathbf{f}_n\right) \tag{7.123}$$

donde

$$\mathbf{K} = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, d\Omega \tag{7.124}$$

es la matriz de rigidez elástica estándar. Naturalmente, esto es equivalente a evaluar el incremento de la deformación de fluencia a partir de los valores de la tensión inicial en el tiempo n y es extraordinariamente sencillo de calcular.

Este procedimiento es merecidamente popular[89-92] ya que el cálculo de cada paso de tiempo implica sencillamente resolver un sistema de ecuaciones, pero es obviamente menos preciso que otras alternativas. Además, si el intervalo de tiempo es demasiado grande, se pueden obtener resultados inestables (ver Capítulo 10). Por tanto, es necesario que

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit} \tag{7.125}$$

donde Δt_{crit} se determina de forma adecuada.

Una regla práctica que resulta bastante eficiente es que el incremento de deformación de fluencia no debe ser mayor que la mitad de la deformación elástica, es decir[93]

$$\Delta t\boldsymbol{\beta}_n \leq \frac{1}{2}\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}_n \tag{7.126}$$

7.11.2 *Procedimiento completamente explícito con rigidez modificada:* $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1,\ i = 0$. La principal diferencia con respecto al primer procedimiento explícito es que la matriz $\mathbf{C}$ no es igual a cero, pero se toma como constante dentro de un único paso, esto es

$$\mathbf{C} = \theta\left\{\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}_n \tag{7.127}$$

Ahora

$$\mathbf{D}^{**} = (\mathbf{I} + \mathbf{D}\Delta t\mathbf{C})_n^{-1}\mathbf{D} \equiv (\mathbf{D}^{-1} + \Delta t\mathbf{C})_n^{-1}$$

Utilizando las mismas sustituciones que antes se tiene

$$\delta\mathbf{a}^0 = \Delta\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{K}}\left(\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\Delta t\boldsymbol{\beta}_n\, d\Omega + \Delta\mathbf{f}_n\right) \tag{7.128}$$

donde $\tilde{\mathbf{K}}$ se obtiene sustituyendo $\mathbf{D}^{**}$ en lugar de $\mathbf{D}$ en la matriz de rigidez estándar de la Ec. (7.124).

Este procedimiento es más costoso que el explícito mencionado previamente ya que se debe formar y resolver la matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ para cada paso de tiempo. Además, tales matrices pueden ser no simétricas, añadiendo dificultades computacionales.

Ninguno de los procedimientos simplificados de iteración descritos anteriomente prestan atención alguna a los errores introducidos en las estimaciones de la deformación de fluencia. Sin embargo, por razones de precisión se recomienda el proceso iterativo con $\theta \geq \frac{1}{2}$. Estos procedimientos completamente iterativos fueron introducidos primeramente por Cyr y Teter,[94] Zienkiewicz *et al.*[95,96] y más tarde por otros.[97]

Nótese que el proceso tiene gran parecido con las soluciones iterativas de los problemas plásticos de la Sección 7.9 para el caso de viscoplasticidad, que se discutirá en la próxima sección.

7.12 Viscoplasticidad

7.12.1 *Generalidades.* El comportamiento puramente plástico de los sólidos postulado en la Sección 7.8 es probablemente una ficción, ya que la tensión máxima que pueden soportar está relacionada invariablemente con la velocidad de aplicación de la carga. En la Figura 7.18(a) se describe un modelo puramente elastoplástico bajo carga uniaxial en el que la velocidad de deformación plástica es nula para tensiones por debajo de la fluencia, esto es

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \qquad \text{si} \quad \sigma - \sigma_y < 0 \qquad \text{y} \qquad \sigma > 0$$

estando $\dot{\varepsilon}^p$ indeterminada cuando $\sigma - \sigma_y = 0$.

Por otra parte, un material elastoviscoplástico se puede representar mediante el modelo esquematizado en la Figura 7.18(b), donde un amortiguador se une en paralelo con el elemento plástico. Las tensiones pueden superar ahora el valor σ_y para velocidades de deformación distintas de cero.

La velocidad de deformación viscoplástica (o de fluencia) viene dada ahora por la expresión general

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \gamma < \phi(\sigma - \sigma_y) > \tag{7.129a}$$

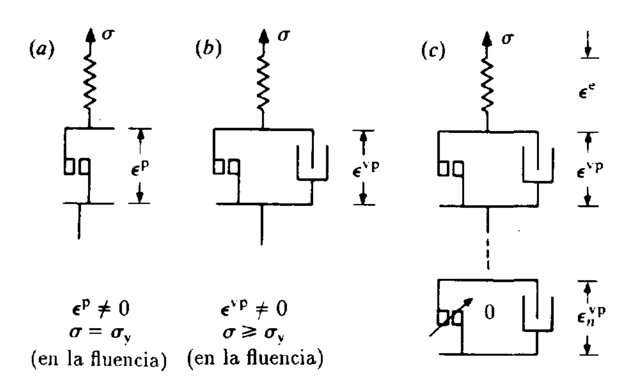


Figura 7.18 (*a*) Elastoplástico (*b*) Elastoviscoplástico (*c*) Modelos elastoviscoplásticos en serie.

donde la función arbitraria ϕ es tal que

$$
\begin{aligned}
&< \phi(\sigma - \sigma_y) >= 0 \qquad &\text{si } \sigma - \sigma_y \leq 0 \\
\text{y} \qquad &< \phi(\sigma - \sigma_y) >= \phi(\sigma - \sigma_y) \qquad &\text{si } \sigma - \sigma_y > 0
\end{aligned}
\tag{7.129b}
$$

El modelo sugerido es, en realidad, similar al utilizado en secciones anteriores para analizar los fenómenos de fluencia y parece ser un modelo más real que el empleado para la plasticidad pura.

La generalización del modelo viscoplástico a un estado de tensión general sigue precisamente los mismos razonamientos empleados en la sección de plasticidad.

En primer lugar, vemos que la velocidad de deformación será una función de la condición de fluencia

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)$$

definida en la Ec. (7.56). Si esto es menor que cero, no habrá flujo plástico.

En segundo lugar, definiremos un potencial viscoplástico $Q(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)$, de tal forma que el cociente entre las diversas componentes de la velocidad de deformación será función de las normales a dicho potencial [véase Ec. (7.59)]. Así pues, se puede escribir con carácter general

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \gamma < \phi(F) > \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \tag{7.130}$$

donde

$$
\begin{aligned}
&< \phi(F) >= 0 \qquad &\text{si } F \leq 0 \\
&< \phi(F) >= \phi(F) \qquad &\text{si } F > 0
\end{aligned}
\tag{7.131}
$$

y γ es un parámetro de "viscosidad". La deformación plástica puede ser de nuevo *asociada* o *no asociada*, dependiendo de que sea $Q = F$ o no. Además, para definir con detalle dicha deformación se puede usar cualquiera de las superficies de fluencia estudiadas en la Sección 7.8.2.

Fue Bingham en 1922[98] quien desarrolló una de las primeras versiones del concepto de viscoplasticidad; en la referencia [99] se ofrece una compilación completa de dichos modelos. El procedimiento computacional para usar el modelo viscoplástico puede obviamente seguir cualquiera de los procedimientos generales que se estudiaron en la sección anterior. El más comúnmente usado es el método de *Euler*.[100-104] Las condiciones de estabilidad para éste han sido discutidas con detalle para varios tipos de condiciones de fluencia por Cormeau.[105] El método *tangencial* puede usarse también, pero a menos que el flujo viscoplástico sea asociado (esto es, $Q = F$), hay que resolver un sistema de ecuaciones no simétrico en cada paso.

7.12.2 *Solución iterativa.* El esquema completo de solución iterativa de las Ecs. (7.113) a (7.119) para viscoplasticidad es muy similar al usado en plasticidad y descrito en las Ecs. (7.102) a (7.107). Para subrayar esta similitud se reescribe la Ec. (7.114) con $\theta = 1$ en la forma de la Ec. (7.103) utilizando la ecuación viscoplástica (7.130) de la forma

$$\mathbf{R} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n - \mathbf{D}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}_n - \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1} \Delta \lambda = 0 \tag{7.132a}$$

con

$$r = \frac{1}{\gamma \Delta t} \Delta \lambda - < \phi(F) >_{n+1} = 0 \tag{7.132b}$$

cuando $F_{n+1} \geq 0$; en caso contrario $\Delta \lambda = 0$.

Los incrementos iterativos de Newton-Raphson $\delta \boldsymbol{\sigma}^i$ y $\delta \lambda$ se pueden determinar ahora mediante diferenciación en la forma habitual. Tenemos así (prescindiendo de nuevo de los subíndices n)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{B} \delta \mathbf{a}^i - \mathbf{D}^{-1} \delta \boldsymbol{\sigma}^i - \Delta \lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \delta \boldsymbol{\sigma}^i - \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \delta \lambda^i + \mathbf{R}^i = 0 \\
&\frac{1}{\gamma \Delta t} \delta \lambda - \left(A \delta \lambda + \phi' \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \delta \boldsymbol{\sigma} \right) + r^i = 0 \qquad \left(\phi' = \frac{d\phi}{dF} \right)
\end{aligned}
\tag{7.133}
$$

o

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1}, & \dfrac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \phi' \dfrac{\partial F^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, & -\left(A + \dfrac{1}{\gamma \Delta t} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}^i \\ \delta \lambda^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^i - \mathbf{B} \delta \mathbf{a}^i \\ r^i \end{Bmatrix} \tag{7.134}
$$

Ahora las ecuaciones son casi idénticas a las de la plasticidad [véase Ec. (7.104)] con $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$ de la forma dada por la Ec. (7.105). Además, $\phi' = 1$ si $\phi(F) = F$ y ahora la única diferencia es en el término dependiente del tiempo $1/\gamma\Delta t$.

De nuevo se puede obtener la tangente consistente $\mathbf{D}^{**}$ mediante la eliminación de $\delta\lambda^i$ y se tiene de esta forma un esquema iterativo general.

De hecho, como era de esperar, $\gamma = \infty$ o $\Delta t = \infty$ corresponden exactamente con la solución de plasticidad. Ésta se alcanzará fácilmente por cualquier solución que tienda al estado estacionario. Por lo tanto, el modelo viscoplástico proporciona una forma conveniente para la solución de problemas puramente plásticos, independientes de la velocidad de carga.

En este contexto, como se ha expuesto anteriormente, el esquema iterativo implícito con un único paso de tiempo (correspondiente a un único incremento de carga) puede usarse directamente. Sin embargo, los esquemas de iteración explícita descritos previamente son también aplicables, siendo ahora el avance en el tiempo sencillamente una herramienta de cálculo necesaria para alcanzar el estado en el que *las velocidades de deformación son nulas* y por lo tanto se ha alcanzado la fluencia plástica. El proceso explícito sencillo, de deformación inicial, es equivalente a un método de Newton-Raphson modificado que utilice la rigidez elástica. En tales procedimientos existe un paso de tiempo crítico[105] y este límite es aproximadamente equivalente al uso del método de Newton-Raphson modificado y un acelerador de convergencia.

Las leyes viscoplásticas pueden generalizarse fácilmente para incluir una serie de componentes, tal como se muestra en la Figura 7.18(c). Así, escribimos ahora

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{vp} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{vp} + \cdots = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\sigma}) \tag{7.135}$$

siendo de nuevo aplicable la formulación general. Si, como se muestra en el último elemento de la Figura 7.18(c), la fluencia plástica se toma igual a cero, se tiene una situación de fluencia "pura" en la que hay flujo para todos los niveles de tensión.

7.12.3 *Fluencia en metales.* Si se considera una forma de viscoplasticidad asociada siguiendo el criterio de fluencia de von Mises expresado por la Ec. (7.78), la velocidad de deformación viscoplástica se puede escribir como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \gamma < \phi(\bar{\sigma} - \sigma_y) > \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7.136}$$

Si la tensión de fluencia, σ_y, se pone igual a cero, ϕ se toma como una función exponencial y se hace uso de las expresiones de la Tabla 7.1, la igualdad anterior toma la siguiente forma

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \gamma \bar{\sigma}^m \mathbf{M}^I \boldsymbol{\sigma} \tag{7.137}$$

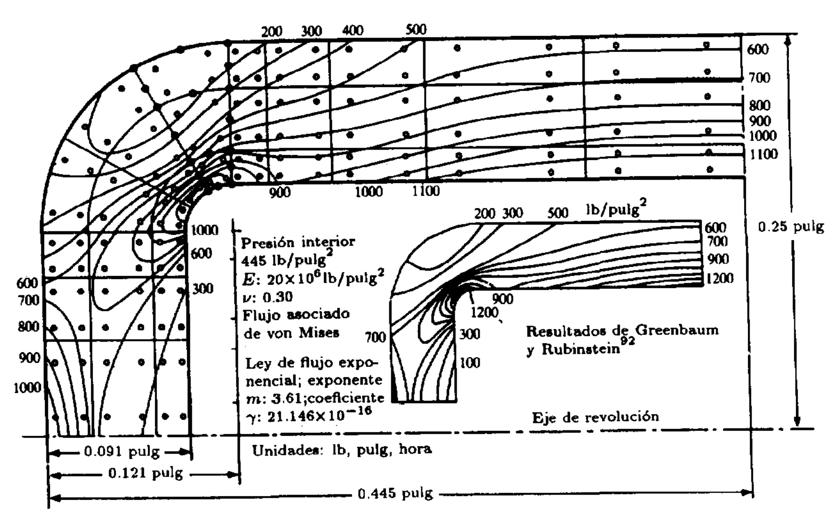
y se obtiene la conocida ley de fluencia de Norton-Soderberg. En ésta, el parámetro γ es generalmente función del tiempo, de la temperatura y de la deformación total de fluencia. Para una compilación de dichas leyes el lector puede consultar las referencias especializadas.[106,107]

En la Figura 7.19 se presenta un ejemplo que inicialmente se resolvió usando un número muy elevado de elementos triangulares,[92] y en el que se necesitó un número mucho más reducido de elementos cuadriláteros isoparamétricos en un programa viscoplástico general.[104]

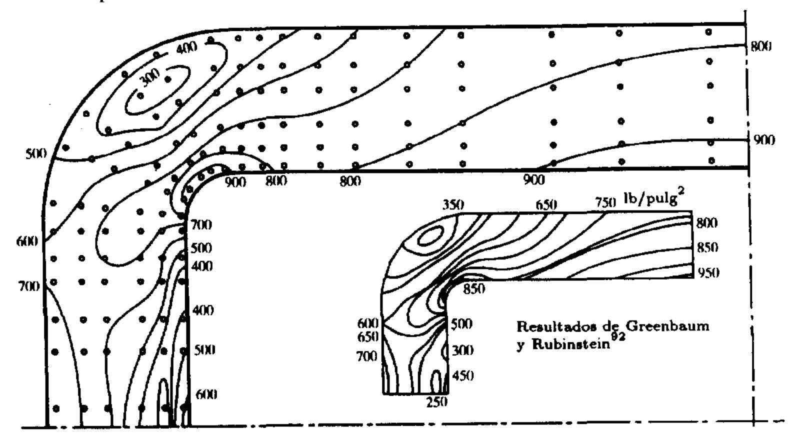
7.12.4 *Solución de problemas de plasticidad mediante el algoritmo viscoplástico. Mecánica de suelos.* Como ya hemos dicho antes, el modelo viscoplástico proporciona una herramienta sencilla y eficaz para resolver todos los problemas de plasticidad. Así, en la referencia [104] se empleó para solucionar muchos problemas plásticos y en ella podrá encontrar el lector los detalles. En esta sección se discutirán algunos problemas de mecánica de suelos, con los cuales se demostrará la facilidad del procedimiento para resolver problemas en los que el comportamiento del material es no asociado.[108] El comportamiento de suelos y demás medios porosos es tema del que todavía queda mucho por conocer hasta que se consigan modelos que representen adecuadamente las propiedades del comportamiento de los mismos. Si el lector desea mayor información sobre el tema se le recomienda que consulte textos recientes, conferencias y artículos sobre el mismo.[109,110]

Una de las controversias acerca de esto está centrada en si la naturaleza del comportamiento del suelo es "asociada" o "no asociada". En el ejemplo sencillo de la Figura 7.20, que estudia una muestra con simetría de revolución, se investigan los efectos de estas dos hipótesis diferentes.[108] Para definir la superficie de fluencia se ha usado la ley de Mohr-Coulomb, y para el potencial plástico se ha empleado una expresión similar, pero con un ángulo de rozamiento diferente, $\bar{\phi}$, reduciéndose de esta forma el potencial plástico a la forma de Tresca de la Figura 7.11 cuando $\bar{\phi} = 0$ y suprimiéndose los cambios de deformación volumétrica. Como puede apreciarse en los resultados, sólo se obtienen cambios moderados en la carga de colapso, aunque las diferencias en la distribución de las deformaciones plásticas sí son ostensibles.

En la Figura 7.21 se muestra un estudio similar llevado a cabo para un talud. En este caso, a pesar de las diferencias en la distribución de las deformaciones, la carga de colapso estimada no varía al usar diferentes leyes para la velocidad de deformación plástica.



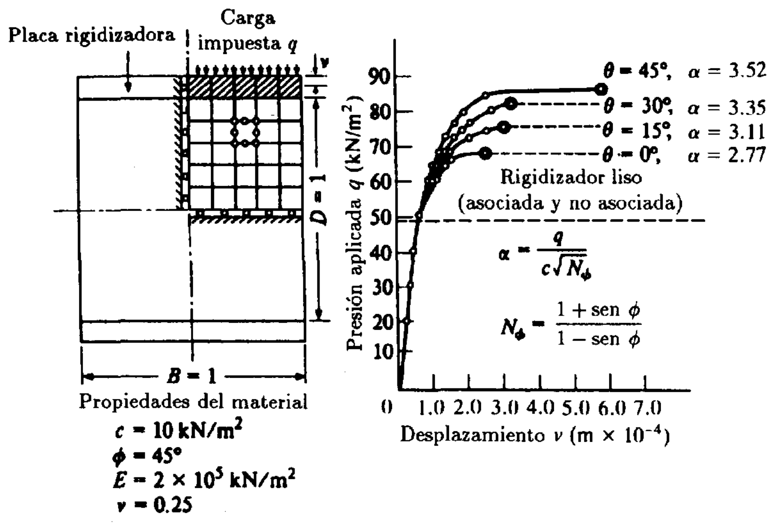
(*a*) Malla e iso-líneas de tensión efectiva al principio de la presurización



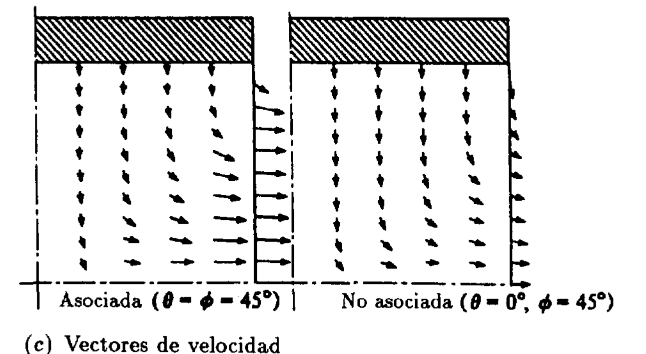
(*b*) Iso-líneas de tensión efectiva tras 3 horas de presurización

Figura 7.19 Fluencia en una vasija de presión.

La plasticidad no asociada, motivada esencialmente por el comportamiento friccional, puede llevar a falta de unicidad de la solución. La forma viscoplástica equivalente es, sin embargo, siempre única y, por tanto, se utiliza a veces la viscoplasticidad como un procedimiento de *regularización.*



(*a*) Malla y definición del problema (*b*) Resultados presión–desplazamiento



(*c*) Vectores de velocidad

Figura 7.20 Compresión uniaxial, axisimétrica, entre placas rugosas.

7.13 Viscoelasticidad –dependencia de la fluencia con la historia–

Los fenómenos viscoelásticos se caracterizan por el hecho de que la velocidad de fluencia depende no sólo del estado actual de las tensiones y de las deformaciones sino, en general, de la *historia completa* de su evolución. Por consiguiente, para determinar el incremento de deformación $\Delta\varepsilon^c$ en un intervalo de tiempo particular es necesario conocer el estado de deformaciones y tensiones para *todos los intervalos de tiempo precedentes.* Puesto que en el proceso de cálculo se pueden obtener de hecho dichas

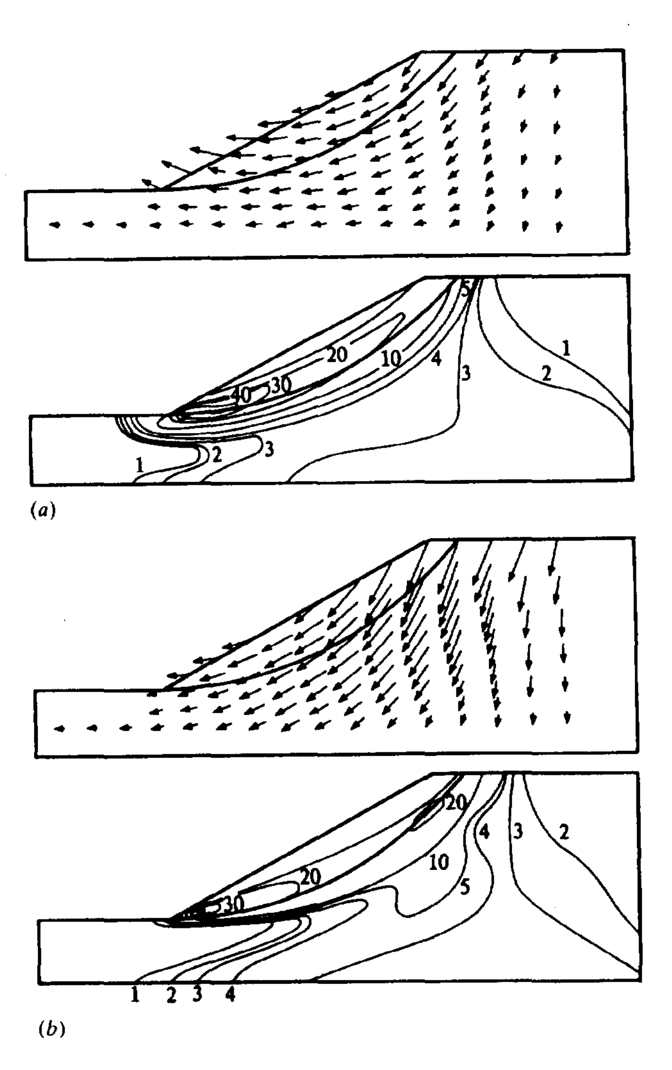


Figura 7.21 Talud bajo la acción de la gravedad, velocidades plásticas relativas en colapso e isolíneas de velocidad de deformación de cortante efectivas en colapso; (*a*) y (*b*) muestran el comportamiento asociado y no asociado (variación nula de volumen).

deformaciones y tensiones, el problema no presenta *en principio* ninguna dificultad. Sin embargo, en la práctica aparecen enseguida limitaciones. Incluso con los ordenadores más potentes no es posible almacenar en la memoria central la historia completa, y usar constantemente la memoria periférica es un procedimiento demasiado lento y, por consiguiente, muy costoso como para ser tenido en cuenta.

Zienkiewicz *et al.*[90] han presentado un método para sortear esta dificultad en el caso de materiales con *viscoelasticidad lineal*, susceptible de aplicación al caso de materiales viscoelásticos *no lineales* definidos convenientemente.

En viscoelasticidad lineal es siempre posible escribir las relaciones entre tensiones y deformaciones en una forma análoga a la de los problemas de elasticidad; los términos de la matriz $\mathbf{D}$ ya no representan constantes elásticas sino operadores diferenciales o integrales adecuados. Así, para un medio continuo isótropo habrá un par de operadores en lugar del par de constantes elásticas característico del comportamiento de un medio elástico isótropo, mientras que para materiales anisótropos puede ser necesario definir hasta 21 operadores diferentes.[111]

Por tanto, la parte de la deformación correspondiente a la fluencia puede escribirse típicamente de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \bar{\mathbf{D}}\boldsymbol{\sigma}$$

con

$$\bar{D}_{rs} = \frac{a_0 + a_1(d/dt) + a_2(d^2/dt^2) + \cdots}{b_0 + b_1(d/dt) + b_2(d^2/dt^2) + \cdots} \tag{7.138}$$

Aquí los operadores se escriben en forma diferencial. Si este desarrollo es finito, separando todos los efectos elásticos instantáneos podrá generalmente volver a escribirse la Ec. (7.138) como suma de fracciones simples en la forma

$$\bar{D}_{rs} = \frac{A_1}{(d/dt) + B_1} + \frac{A_2}{(d/dt) + B_2} + \cdots \tag{7.139}$$

Esto, como es sabido, puede interpretarse como la respuesta de un conjunto de elementos de "Kelvin" conectados en serie, tal como se muestra en la Figura 7.22 (aunque no es preciso asignar a estos modelos ningún significado físico), donde cada término representa una unidad Kelvin. Una componente típica de la deformación se obtiene, por consiguiente, con una suma de términos del tipo

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^{ve} = \frac{A_k}{(d/dt) + B_k}\boldsymbol{\sigma} \tag{7.140a}$$

o bien

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_k^{ve}}{dt} = A_k\boldsymbol{\sigma} - B_k\boldsymbol{\varepsilon}_k^{ve} \tag{7.140b}$$

y de nuevo es posible obtener una expresión completa para $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{ve}$ similar a la Ec. (7.109), a la que se pueden aplicar los métodos generales descritos en la Sección (7.12). En la referencia [90] se hizo uso del procedimiento de Euler, pero los métodos tangenciales proporcionan soluciones más exactas

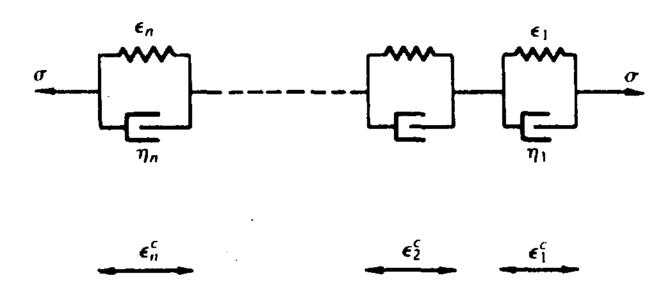


Figura 7.22 Elementos de Kelvin conectados en serie.

y en un tiempo mucho menor, observando que la matriz $\mathbf{C}$ es constante en las expresiones de viscoelasticidad lineal.

En la práctica basta con un número pequeño de elementos de Kelvin para representar el comportamiento del material y, adicionalmente, no existe más que un número pequeño de operadores "viscoelásticos". Por ejemplo, en el caso de un material isótropo incompresible basta con un solo operador para definir la matriz $\mathbf{D}^{-1}$. Puesto que este operador está definido por dos términos del desarrollo de la Ec. (7.138), solamente hay que almacenar dos cantidades en el proceso de cálculo.

Los valores de A_n y B_n para cada modelo de Kelvin pueden depender del tiempo o de la temperatura sin que esto complique los cálculos –pueden tratarse así problemas de termoviscoelasticidad, tal como aparecen en el estudio de la fluencia del hormigón o de los plásticos–.[112,113]

A veces, los cálculos que hay que efectuar en un problema de viscoelasticidad pueden simplificarse fijando métodos especiales para desarrollar la historia de la deformación por fluencia. Taylor *et al.*[112] sugieren un método que resulta particularmente eficiente.

En ciertas ocasiones es factible reducir sustancialmente el trabajo que implica una solución por incrementos sucesivos de los problemas de viscoelasticidad lineal. En el caso de una estructura homogénea formada por un material viscoelástico isótropo lineal y un coeficiente de Poisson constante, las analogías de Alfrey-McHenry permiten usar soluciones elásticas en un único paso para obtener tensiones y desplazamientos en un tiempo dado mediante el uso de *fuerzas exteriores, desplazamientos y temperaturas equivalentes.*[114,115]

Algunas extensiones de estas analogías han sido propuestas por Hilton y Russell.[116] Más aún, cuando la deformación por fluencia es tal que tiende a un valor constante para un tiempo infinito es posible determinar la distribución de tensiones final, incluso en casos en los que no pueden aplicarse las analogías anteriores. Así, por ejemplo, cuando las propiedades

viscoelásticas dependen de la temperatura y la estructura está sometida a un sistema de fuerzas exteriores y temperaturas constantes con el tiempo, se pueden encontrar constantes elásticas "equivalentes" a largo plazo y resolver un único problema como si se tratase de un material heterogéneo con comportamiento elástico lineal.[117]

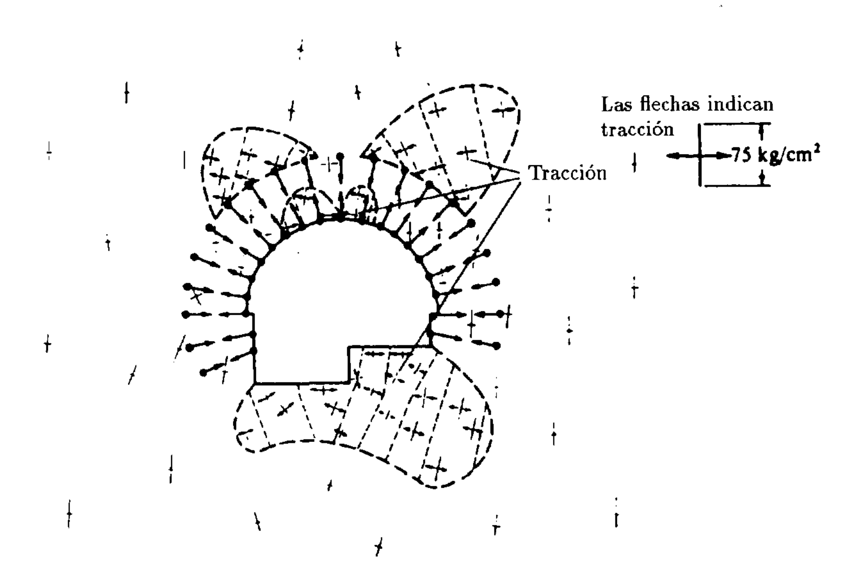
7.14 Problemas especiales de rocas, hormigón, etc.

7.14.1 *Material sin resistencia a tracción.* Un material hipotético capaz sólo de resistir tensiones de compresión y deformarse a tracción sin ofrecer resistencia alguna es, en muchos aspectos, similar a un material plástico perfecto. Mientras que es probable que dicho material ideal no exista, en la práctica proporciona una buena aproximación al comportamiento de una roca con grietas distribuidas aleatoriamente, y al de otros materiales granulares. A pesar de que generalmente no es posible escribir una relación entre tensiones y deformaciones en forma explícita, basta con efectuar el cálculo en el dominio elástico y hacer cero las tensiones en los puntos donde aparezcan tracciones. El método de tensiones iniciales se aplica en este caso de manera natural; realmente, fue en relación con este tipo de problemas como se desarrolló.[118] Los diferentes pasos del cálculo son evidentes, pero es importante recordar que han de eliminarse las *tensiones de tracción principales.*

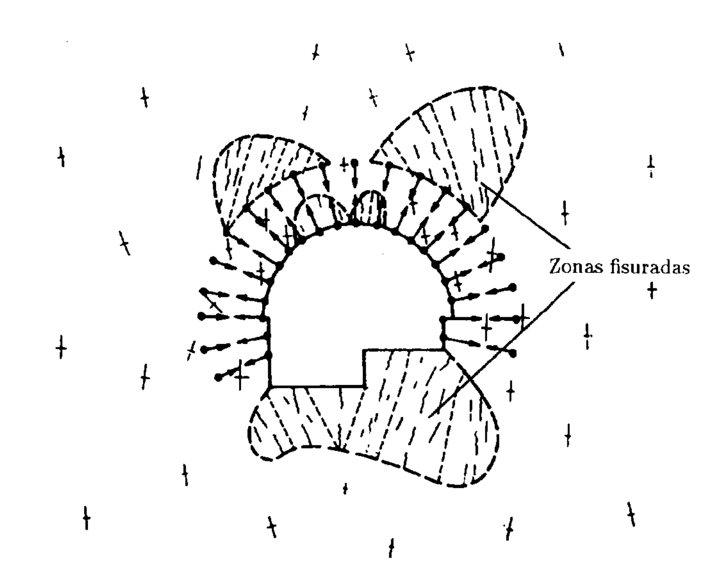
La ley "constitutiva" tal como se ha expuesto anteriormente no puede, en el mejor de los casos, sino dar una aproximación de la situación real, ya que no tiene en cuenta el cierre de las grietas cuando se aplican de nuevo tensiones de compresión. A pesar de todo, estos resultados proporcionan, sin duda alguna, una visión más clara del comportamiento real de las estructuras rocosas.

Central de generación subterránea.[118] Las Figuras 7.23(a) y (b) muestran una aplicación de este modelo a un problema práctico. En la Figura 7.23(a) se ha representado la solución elástica, indicando las tensiones en puntos próximos a una central subterránea con cables pretensados aplicados en la periferia de la excavación. Se indican las zonas en que aparecen tracciones. En la Figura 7.23(b) se muestra para el mismo problema la solución correspondiente a un material *incapaz de resistir tracciones.* Se aprecia que la redistribución general de tensiones es pequeña, así como las zonas donde se producen "fisuras".

Hormigón armado. Una variante de este tipo de material puede ser otro que tenga una resistencia a la tracción finita pero que se anula bruscamente cuando es excedida (debido a la formación de una fisura). Dicha hipótesis fue considerada por Valliappan y Nath[119] para estudiar el com-



(*a*) Tensiones elásticas



(*b*) Tensiones de compresión

Figura 7.23 Estación generadora subterránea. Cargas de gravedad y pretensado.

portamiento de vigas de hormigón armado. Los resultados obtenidos muestran una gran correlación con los experimentales para vigas sobrearmadas (para las que la deformación plástica en compresión no es importante). La viga analizada fue objeto de diversos ensayos por Krahl *et al.*[120] La Figura 7.24 muestra algunos resultados importantes de este análisis.

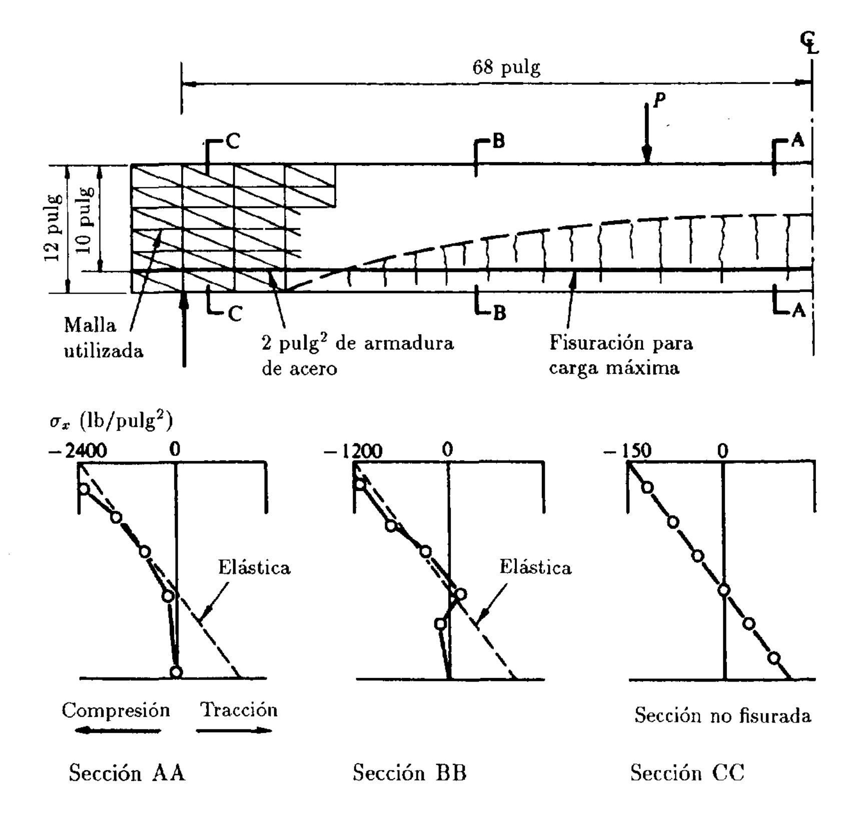


Figura 7.24 Fisuración de una viga de hormigón armado. (Tensión máxima de tracción 200 lb/pulg^2). Distribución de las tensiones del hormigón en varias secciones.[119]

Se ha desarrollado mucho trabajo en el comportamiento del hormigón armado introduciendo varias formas de plasticidad que permitan el colapso a compresión y procedimientos para tener en cuenta el cierre de las fisuras. Las referencias [121] a [126] listan algunos de los artículos básicos en este tema.

7.14.2 *Material "laminar" y elementos junta.* Otro modelo idealizado de

material es el que se supone formado por un gran número de láminas isótropas y elásticas. Sometidas a compresión estas láminas pueden transmitir tensiones tangenciales paralelamente a su dirección, con la condición de que éstas no excedan la resistencia al rozamiento. Sin embargo, en la dirección normal a las láminas no pueden transmitirse tensiones de tracción.

Este material idealizado tiene uso evidente para estudiar macizos rocosos con juntas paralelas pero, como se verá más adelante, el campo de aplicación del mismo es mucho más amplio. La Figura 7.25 muestra el ejemplo de un problema bidimensional donde interviene un material de este tipo. Con un eje local x' orientado en la dirección de las láminas se puede escribir para una junta sencilla de contacto friccional

$$|\tau_{x'y'}| < \mu\sigma_{y'} \qquad \text{si } \sigma'_{y'} \leq 0 \qquad (7.141a)$$

y

$$\sigma'_{y'} = 0 \qquad \text{si } \varepsilon_{y'} > 0 \qquad (7.141b)$$

para las tensiones que tienen lugar en los puntos donde el comportamiento es puramente elástico. En la expresión anterior, μ es el coeficiente de rozamiento entre las láminas.

Si las tensiones elásticas son superiores a los límites impuestos han de reducirse a los valores límite definidos por las inecuaciones anteriores. Otra vez es evidente la aplicación del método de las tensiones iniciales, y el problema es muy similar al del material *no tracción* de la sección precedente. En cada paso del cálculo elástico se comprueba ante todo si existen tensiones de tracción $\sigma_{y'}$, y, si efectivamente existen, se introduce una tensión inicial correctora que haga nulas dichas tensiones y las tensiones tangenciales. Si $\sigma_{y'}$ es una tensión de compresión, se comprueba de nuevo el valor absoluto de las tensiones tangenciales $\tau_{x'y'}$; si éstas son superiores al valor definido en la Ec. (7.141a) se reducen al límite establecido.

Dicho procedimiento plantea, sin embargo, la pregunta sobre la forma en que hay que reducir las tensiones, puesto que hay que considerar dos componentes. Es preferible, por tanto, emplear las Ec. (7.141a) y (7.141b) para definir la superficie de fluencia plástica (F). La hipótesis de un potencial plástico adicional (Q) definirá ahora el flujo, y se advierte que si se supone un comportamiento asociado usando la Ec. (7.141) como potencial, esto implica que se produce una separación y deslizamiento simultáneos de las láminas (ya que las velocidades de deformación correspondientes $d\gamma_{x'y'}$ y $d\varepsilon_{y'}$ son finitas). Habrá que usar, por consiguiente, técnicas especiales para tratar poblemas de plasticidad no asociada (o viscoplasticidad). De nuevo, si es posible un cambio de signo de la tensión es necesario tener en cuenta la apertura de las láminas, esto es, la superficie de fluencia pasa a ser función de las deformaciones.

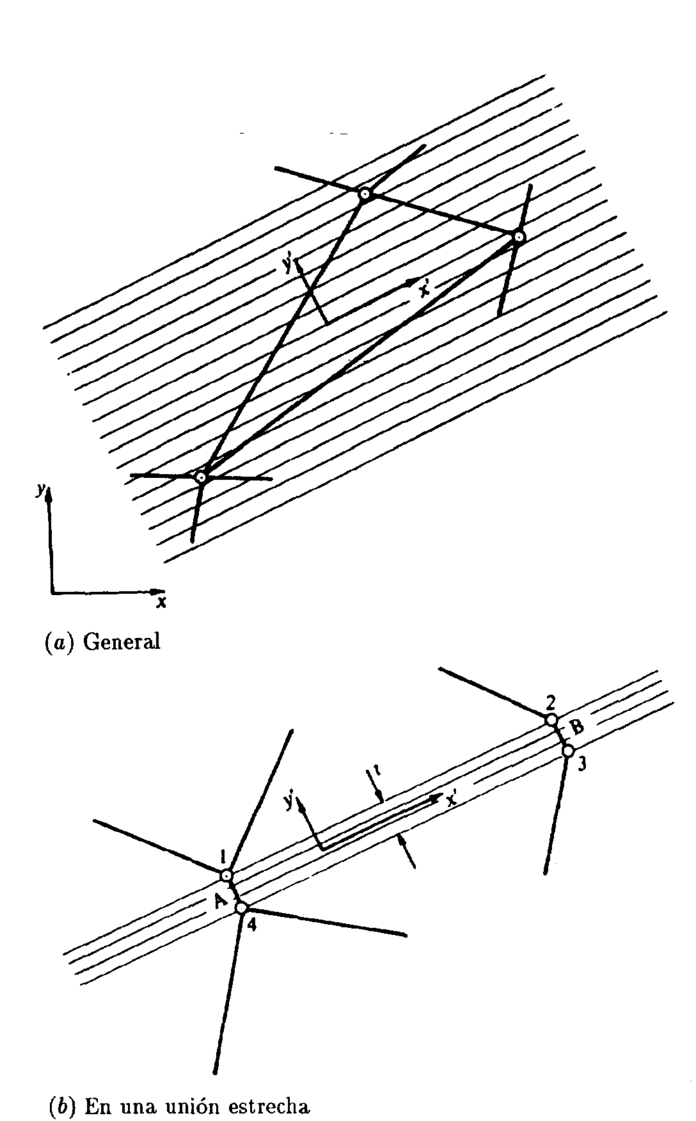


Figura 7.25 Material "laminar."

En algunos casos el comportamiento laminar se reduce a una junta estrecha entre masas elásticas relativamente homogéneas. Éste podría ser el caso de una falla geológica o de una forma rocosa fragmentada. En estas situaciones conviene usar elementos delgados, generalmente rectangulares, cuya geometría se pueda definir por las coordenadas medias de los dos

extremos A y B [Figura 7.25(*b*)] y el espesor. El elemento aún tiene, sin embargo, distintos puntos (1–4) que establecen la continuidad con las masas adyacentes.[127,128] Dichos elementos para juntas pueden ser simples rectángulos como en este caso, pero igualmente pueden tener formas más complejas definiéndolos mediante una formulación isoparamétrica (véase Capítulo 8).

El comportamiento laminar puede no estar limitado a una dirección únicamente –y de hecho el propio material interlaminar puede tener un límite plástico–. El uso de estos modelos multilaminares ha demostrado ser muy eficiente en el contexto de la mecánica de rocas;[129] con una distribución aleatoria de láminas se vuelve, naturalmente, a un típico material tipo suelo y las posibilidades de extender tales modelos para obtener nuevas e interesantes relaciones constitutivas han sido subrayadas por Pande y Sharma.[130]

7.15 Falta de unicidad y localización en mecánica de sólidos –algunos problemas sobresalientes–

7.15.1 *Consideraciones generales. Falta de unicidad.* En las secciones precedentes se han examinado los procesos generales para operar con relaciones constitutivas complejas y no lineales y se han discutido algunas aplicaciones particulares. Claramente, el tema es tan extenso y de tal importancia práctica que su presentación en un único capítulo es imposible. Para diferentes materiales se pueden proponer y verificar experimentalmente diferentes formas de relaciones constitutivas. *Una vez que se dispone de las relaciones constitutivas los procedimientos estándar de este capítulo pueden aplicarse*; de hecho, es posible construir sistemas de cálculo generales aplicables a una amplia variedad de propiedades de los materiales en los que puedan introducirse de forma sencilla nuevas especificaciones del comportamiento como en una "caja negra".

Una vez más puede resaltarse que, en los problemas no lineales,

a) puede aparecer falta de unicidad de la solución,
b) no puede nunca garantizarse convergencia, *a priori*,
c) el coste de la solución es siempre mayor que en las soluciones lineales.

Naturalmente, la cuestión de mayor importancia es la primera, esto es, la de falta de unicidad, que podría significar que se llegase a una solución físicamente imposible a pesar de obtener convergencia numérica y posiblemente a costa de un gran gasto computacional. Tal falta de unicidad puede deberse a varias razones en cálculos elastoplásticos:

a) la existencia de esquinas en las superficies de fluencia (o potenciales) en las que los gradientes no estén definidos de forma única,
b) la introducción de *no asociatividad* en la formulación (a la que ya nos hemos referido anteriormente),[131–134]
c) la aparición de ablandamiento por deformación.[135]

El primer problema es el menos serio y puede evitarse fácilmente modificando la forma de la superficie de fluencia (o potencial) para evitar las esquinas. Una modificación sencilla de las expresiones de la superficie de Mohr-Coulomb (o Tresca) [Ec. (7.79)] se consigue escribiendo[51]

$$F = \sigma_m \operatorname{sen} \phi - c \cos \phi + \frac{\bar{\sigma}}{g(\theta)} \tag{7.142}$$

donde

$$g(\theta) = \frac{2K}{(1+K) - (1-K) \operatorname{sen} 3\theta}$$

y

$$K = \frac{3 - \operatorname{sen} \phi}{3 + \operatorname{sen} \phi}$$

La Figura 7.26 muestra como la sección angulosa de la superficie de Mohr-Coulomb en el plano Π (σ_m constante) se vuelve ahora redondeada. Otros han sugerido procedimientos similares.[136]

La segunda y la tercera posibles causas de falta de unicidad mencionadas anteriormente son mucho más serias. Aquí se puede evitar la falta de unicidad teórica considerando que la deformación plástica es un estado límite de un comportamiento viscoplástico en la forma a que nos hemos referido ya en la Sección 7.12. Tal proceso, conocido matemáticamente como *regularización*, nos ha permitido obtener muchas soluciones realistas tanto para comportamiento no asociado como para ablandamiento por deformación, como ya se ha mostrado.

Sin embargo, a veces (aunque no inevitablemente), ambas formas de comportamiento pueden conducir a fenómenos de *localización* donde aparecen discontinuidades de deformación (y de desplazamiento).[133–145] La falta de unicidad puede ser particularmente evidente en plasticidad con ablandamiento por deformación. Se ilustra esto con el ejemplo de la Figura 7.27 donde una barra de longitud L, dividida en elementos de longitud h, se somete a una extensión uniformemente creciente u. El material es inicialmente elástico con un módulo E y después de excederse la tensión σ_y, la tensión de fluencia disminuye (plásticamente) con un módulo negativo H.

Por tanto, la relación tensión-deformación es [Figura 7.27(*a*)]

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \text{si} \;\; \varepsilon < \sigma/E = \varepsilon_y \tag{7.143a}$$

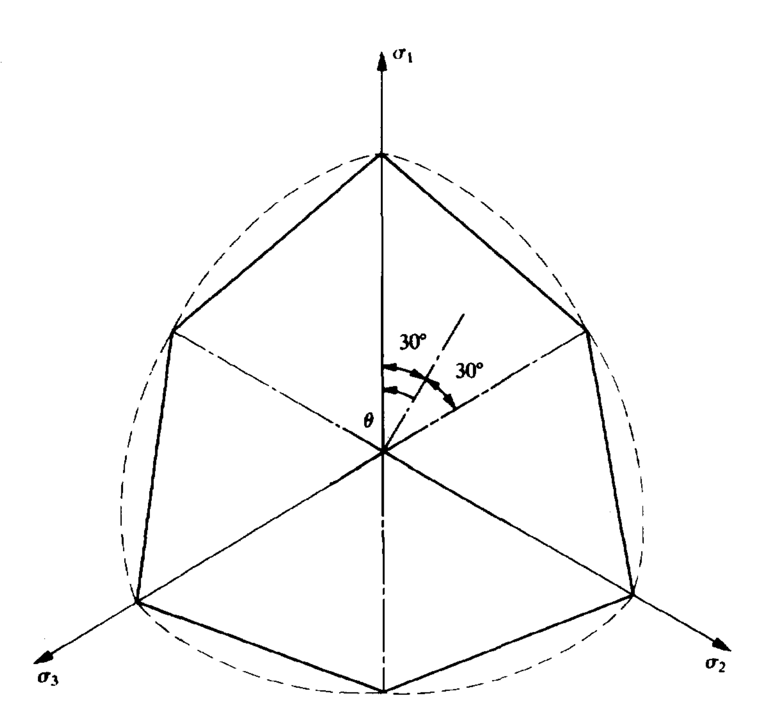


Figura 7.26 Sección en el plano Π de la superficie de fluencia de Mohr-Coulomb en el espacio de tensiones principales con $\phi = 20°$ (línea continua). Aproximación suavizada de la Ec. (7.142) (línea punteada).

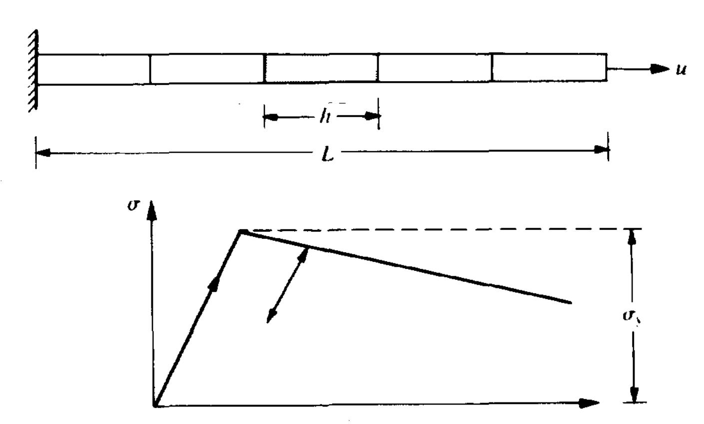
y para ε creciente, solamente

$$\sigma = \sigma_y - H(\varepsilon - \varepsilon_y) \qquad \text{si } \varepsilon > \varepsilon_y \tag{7.143b}$$

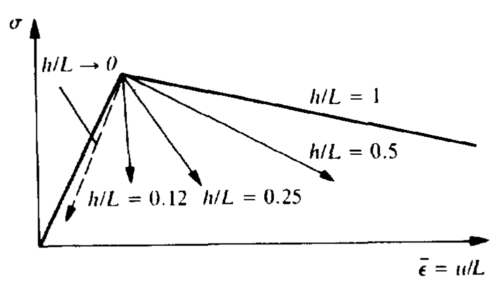
En descarga desde cualquier punto plástico el material se comporta elásticamente, tal como se muestra.

Una posible solución es, naturalmente, que todos los elementos fluyan de forma idéntica. Si se dibuja la tensión aplicada en función de la deformación de alargamiento $\bar{\varepsilon} = u/L$ se obtiene una curva idéntica al comportamiento del material, tal como se muestra en la Figura 7.27(b) ($h/L = 1$). Sin embargo, es igualmente posible que después de alcanzar la tensión máxima σ_y, sólo un elemento (probablemente con una tensión de fluencia infinitesimalmente menor) entre en el rango plástico, mientras que todos los demás descargan elásticamente. El alargamiento total viene entonces dado por

$$U = (L-h)\frac{\sigma}{E} + h\left(\frac{\sigma_y - \sigma}{H} + \frac{\sigma_y}{E}\right) \tag{7.144a}$$



(a) Tensión σ versus deformación ε para el material



(b) Tensión $\bar{\sigma}$ versus deformación media $\bar{\varepsilon} = u/L$ suponiendo fluencia en un único elemento de longitud h

Figura 7.27 Falta de unicidad y dependencia del tamaño de la malla en el alargamiento de una barra homogénea con un material con ablandamiento por deformación. (El valor pico de la tensión de fluencia σ_y está perturbado en un único elemento).

lo que resulta en una deformación global dada por

$$\bar{\varepsilon} = \frac{U}{L} = \sigma\left(\frac{L-h}{LE} - \frac{h}{LH}\right) + \sigma_y\left(\frac{h}{LH} + \frac{h}{LE}\right) \tag{7.144b}$$

y si $h \to 0$ entonces $\bar{\varepsilon} \to \sigma/E$. Claramente es posible una multiplicidad de soluciones para cualquier subdivisión en elementos y es imposible obtener una solución única mediante elementos finitos en este ejemplo trivial (con localización en un único elemento).

El lector puede verificar que si se supone una relación de tipo viscoplástica la situación anterior es imposible siempre que se supongan

idénticas propiedades del material, y en este caso se consigue unicidad correspondiente a fluencia uniforme en todos los elementos. Sin embargo, si se introduce una perturbación haciendo que la tensión de fluencia en un único elemento sea menor que en los otros, entonces de nuevo se produce fluencia *localizada* en el límite, y la curva tensión deformación depende nuevamente de la relación h/L.[137]

En problemas reales donde las distribuciones de tensión-deformación son raramente constantes la localización vendrá motivada por la falta de uniformidad en la distribución de tensión. Sin embargo, con elementos *finitos* el problema de que el tamaño local de los elementos influye en la solución final todavía existe, estándose desarrollando actualmente mucho trabajo de investigación en esta área. Se recomiendan dos direcciones principales para evitar el problema:

1. Hacer el módulo de ablandamiento dependiente del tamaño del elemento, tal como se indica en el trabajo de Pietruszczak y Mróz.[135] Bazant *et al.*[138,139], Biĉanić *et al.*[140] y muchos otros dan argumentos físicos para tal planteamiento.
2. Utilizar regularización viscoplástica además de una dimensión de escala física que limite el tamaño local del defecto.

El lector interesado puede consultar muchas referencias sobre este tema.[142]

7.15.2 *Localización. Tratamiento numérico.* La localización causada por el ablandamiento por deformación (en la forma discutida en la sección anterior) o por el comportamiento no asociado[134,143] precisa claramente de un tratamiento numérico especial, ya que en una zona local las deformaciones pueden volverse infinitas y aparecer discontinuidades de desplazamiento. Tales discontinuidades pueden aparecer a veces bajo comportamiento plástico perfecto y son representadas de forma muy cruda por subdivisiones sencillas de elementos finitos.

Para tratar el problema se han utilizado funciones de forma localmente discontinuas[144,145] con cierto éxito, pero el refinamiento local manteniendo funciones continuas proporciona una alternativa más sencilla.[146,147] En la Figura 7.28 se muestra el efecto de un refinamiento adaptable tipo h utilizando elementos alargados de forma triangular para captar la distribución localizada de la deformación de cortante en una superficie de deslizamiento.

La localización debida al comportamiento no lineal está recibiendo mucha atención en otros problemas de mecánica. En particular, el lector encontrará muchas similitudes entre la discusión anterior, con los problemas que plantea la formación de ondas de choque en flujo de fluidos compresibles que serán discutidos en el Capítulo 13.

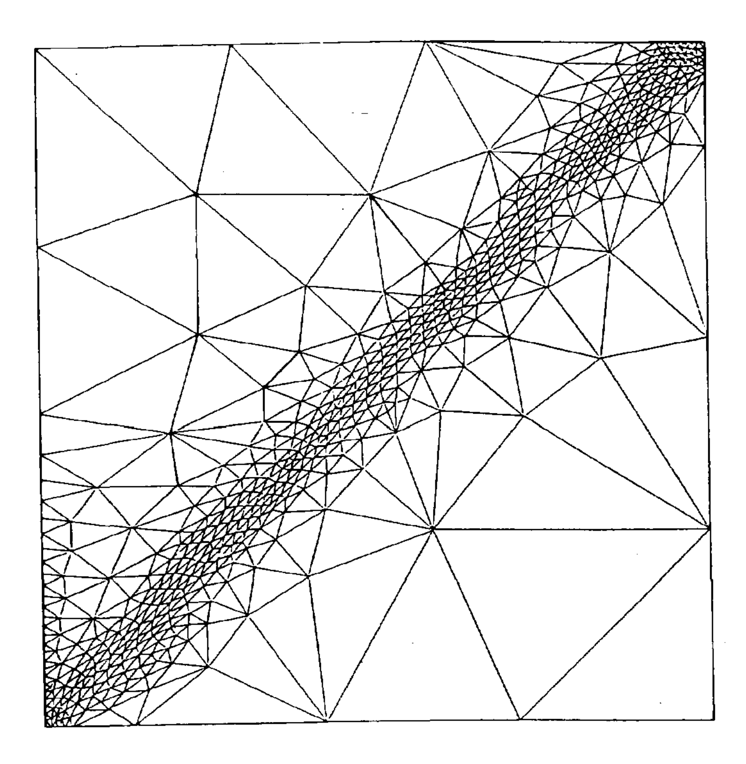


Figura 7.28 Uso de refinamiento adaptable de malla para captar una discontinuidad de deslizamiento en un campo homogéneo de tensión.

OTROS PROBLEMAS NO LINEALES

7.16 Problemas de campo cuasi-armónicos no lineales

La no linealidad puede presentarse en muchos problemas distintos a los de mecánica de sólidos, pero las técnicas descritas al comienzo de este capítulo son universalmente aplicables. En capítulos posteriores se estudiarán dichas no linealidades en relación con problemas en los que interviene el tiempo como variable (Capítulos 10 y 11) y distintos casos de mecánica de fluidos (Capítulos 12 a 15). Aquí vamos a considerar una clase de dichos problemas regidos por las ecuaciones del Capítulo 10 del Volumen 1. Considerando por sencillez un material isótropo y el caso bidimensional, se tiene la ecuación de gobierno escrita de la forma

$$\nabla^T k \nabla \phi + Q \equiv \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial \phi}{\partial y} + Q = 0 \qquad (7.145)$$

con las condiciones de contorno apropiadas.

Si k y/o Q (y, por supuesto, las condiciones de contorno) son función de ϕ y sus derivadas, sigue siendo válido el método de Galerkin como procedimiento de discretización. Por consiguiente, la forma discretizada viene dada por

$$\phi = \mathbf{Na}$$
$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{Ha} + \mathbf{f} \qquad \text{con} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{a}) \qquad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \tag{7.146}$$

y es tal que el integrando de cada término es una función escalar de ϕ (o de sus derivadas).

Las Ecs. (7.146) son un caso particular del problema general no lineal expresado por la Ec. (7.25) *a las que se pueden aplicar las técnicas de iteración directa.* Sin embargo, como éstas a veces no dan soluciones convergentes, es necesario determinar la matriz tangente $d\mathbf{\Psi}/d\mathbf{a}$ y utilizar alguno de los otros procedimientos estudiados.

Examinemos esto con detalle, haciendo uso de las matrices de discretización adecuadas. Usando éstas se puede escribir

$$\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{a}} d\mathbf{a} \equiv \mathbf{H}d\mathbf{a} + d\mathbf{Ha} + d\mathbf{f} \tag{7.147}$$

Si k y Q son funciones directas de ϕ se puede poner†

$$(d\mathbf{H})\mathbf{a} = \mathbf{A}d\mathbf{a} \qquad A_{ij} = \int_\Omega \nabla N_i^T (\nabla \mathbf{Na}) N_j k' \, d\Omega \tag{7.148}$$

$$\text{y} \quad d\mathbf{f} = \left(\int_\Omega \mathbf{N}^T Q' \mathbf{N} \, d\Omega \right) d\mathbf{a} = \mathbf{C}d\mathbf{a} \qquad \text{con } C_{ij} = \int_\Omega N_i^T Q' N_j \, d\Omega \tag{7.149}$$

donde

$$k' = \frac{dk}{d\phi} \qquad Q' = \frac{dQ}{d\phi} \tag{7.150}$$

† Para obtener los términos de la matriz $d\mathbf{Ha}$ conviene considerar solamente la fila j-ésima de $d\mathbf{\Psi}_i$, o sea

$$d\left(\int (\nabla N_i^T) k \nabla \mathbf{N} \, d\Omega \right) \mathbf{a} = \int \nabla N_i^T [\nabla N_1 k' (N_1 da_1 + N_2 da_2 + \cdots) a_1 + \nabla N_2 k' (N_1 da_1 + \cdots) + \cdots]$$

El coeficiente de da_j proporciona inmediatamente el valor de A_{ij}.

La matriz tangente pasa así a valer

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{d\mathbf{a}} = \mathbf{H} + \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{7.151}$$

en la que el segundo término es no simétrico. No son de aplicación cómoda en este caso los métodos de Newton-Raphson y lo que se hace a veces es efectuar algunas modificaciones para obtener simetría.

Se demuestra con facilidad que en dichos casos la expresión variacional no es la misma que se vio en el Capítulo 10 del Volumen 1. Se pueden obtener formas especiales de un principio variacional que comportaría simetría.[149] En muchos problemas físicos, sin embargo, los valores de k dependen del valor absoluto del gradiente $\nabla\phi$, esto es

$$V = \sqrt{(\nabla\phi)^T(\nabla\phi)} = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2} \qquad \bar{k}' = \frac{dk}{dV} \tag{7.152}$$

Afortunadamente, en estos casos se puede escribir

$$d\mathbf{Ha} = \bar{\mathbf{A}}d\mathbf{a} \tag{7.153}$$

donde

$$\bar{A}_{ij} = \int_\Omega (\nabla N_i)^T (\nabla \mathbf{Na})^T \bar{k}' (\nabla \mathbf{Na}) \nabla N_j \, d\Omega \tag{7.154}$$

manteniéndose la simetría.

Situaciones de este tipo surgen en problemas de filtración donde la permeabilidad es función del valor absoluto de la velocidad de flujo;[150–151] en campos magnéticos[152–155] donde la permeabilidad magnética es función del valor absoluto de la intensidad de campo; en el flujo de fluidos ligeramente compresibles y en muchas otras situaciones físicas.[156] La Figura 7.29 tomada de la referencia [152] ilustra una solución típica correspondiente a un campo magnético no lineal.

A pesar de que podrían citarse muchos otros problemas interesantes, concluiremos con uno en el cual la no linealidad se debe al término generador de calor Q de la Ec. (7.145). Este problema particular de ignición espontánea, donde Q es función exponencial de la temperatura, sirve como ejemplo de la posibilidad de que existan soluciones múltiples, e incluso, de que en ciertos casos de no linealidad no exista solución alguna.[157]

Tomando $k = 1$ y $Q = \delta e^\phi$ se ha estudiado un dominio elíptico (ver Figura 7.30). Usando varios valores de δ se ha empleado el método iterativo de Newton-Raphson para obtener la solución, encontrándose que no hay

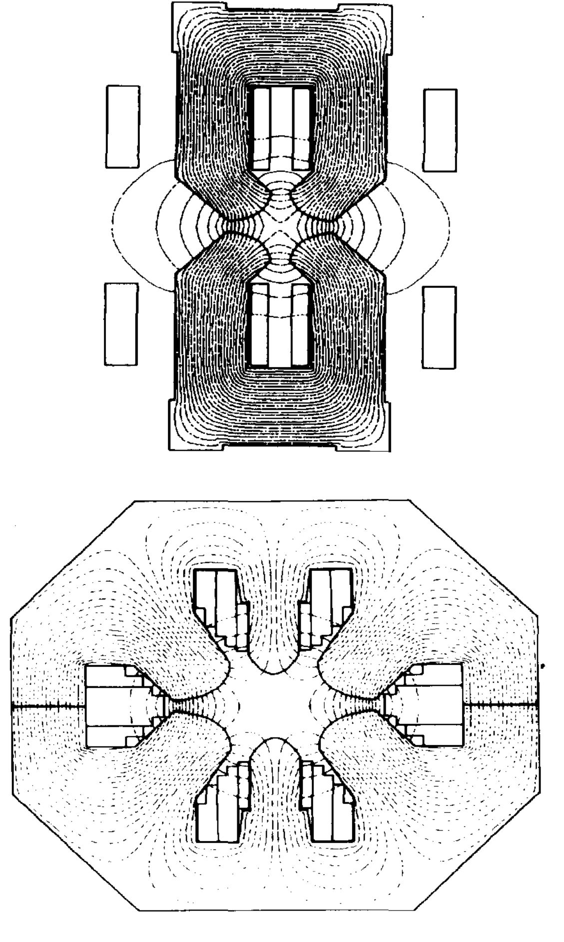
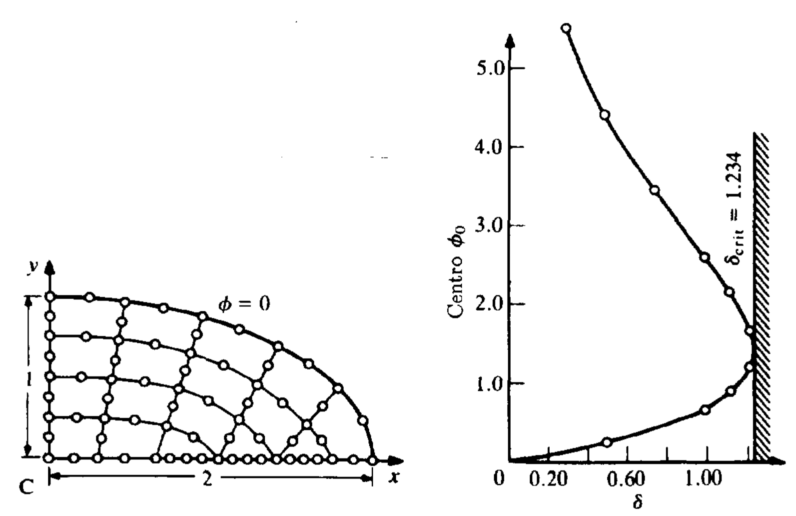


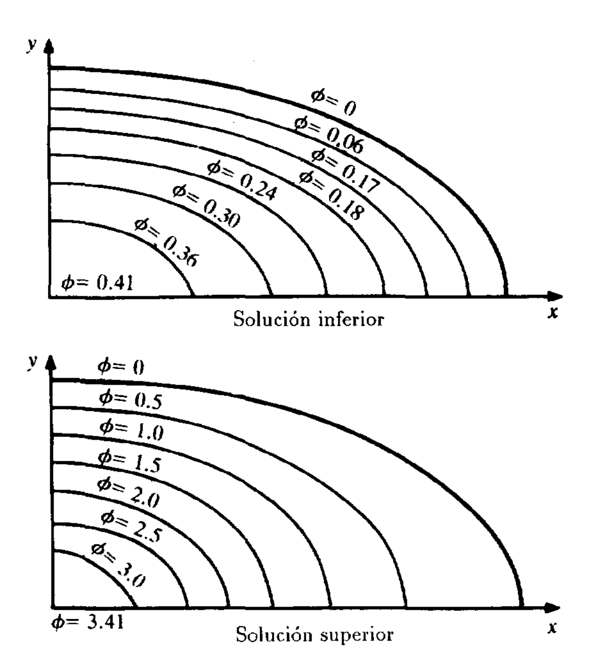
Figura 7.29 Campo magnético en un imán de seis polos con no linealidad debida a la saturación.[152]

convergencia (y de hecho *no hay solución*) cuando $\delta > \delta_{crit}$. Por encima del valor crítico δ_{crit} la temperatura aumenta indefinidamente y se produce la *ignición espontánea* del material. Para valores inferiores a éste son posibles *dos* soluciones y el punto inicial de las iteraciones determina cuál se obtiene de hecho.

Este último ejemplo muestra como en problemas no lineales, más que en ningún otro tipo de problemas, es de suma importancia comprender la naturaleza física de la solución.



(a) Malla y variación de la temperatura en el punto C con parámetro δ



(b) Dos posibles distribuciones de temperatura para $\delta = 0.75$

Figura 7.30 Problema no lineal de generación de calor[157] ilustrando la posibilidad de soluciones múltiples o de falta de solución, dependiendo del parámetro de generación del calor δ ($Q = \delta e^{\phi}$). Combustión espontánea.

Referencias

1. R. BECKETT y J. HURT, *Numerical Calculations and Algorithms*, McGraw–Hill, New York, 1967.
2. A. RALSTON, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1965.
3. H.R. SCHWARZ, *Numerical Analysis*, Wiley, Chichester, 1989.
4. L.B. RALL, *Computational Solution of Non-linear Operator Equations*, Wiley, Chichester, 1969.
5. G. DAHLQUIST y A. BJÖRK, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.
6. N. BIĈANIĈ y K.W. JOHNSON, "Who was Raphson", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14**, 148–52, 1979.
7. W.C. DAVIDON, "Variable metric method for minimization", Argonne National Labratory report ANL-5990, 1959.
8. J.E. DENNIS y J. MORE, "Quasi-Newton methods–motivation and theory", *SIAM Rev.*, **19**, 46–89, 1977.
9. H. MATTHIES y G. STRANG, "The solution of nonlinear finite element equations", *Int. J. Num. Meth. Eng*, **14**, 1613–26, 1979.
10. M.A. CRISFIELD, "Incremental/iterative solution procedures for nonlinear structural analysis", en *Numerical Methods for Nonlinear Problems* (eds C. Taylor, E. Hinton, D.R.J. Owen y E. Oñate), pp. 261–90, Pineridge Press, Swansea, 1980.
11. M. GERADIN, S. IDELSOHN y M. HOGGE, "Nonlinear structural dynamics via Newton and quasi-Newton methods", *Nuclear Eng. Des.*, **58**, 339–48, 1980.
12. M.S. ENGELMAN, "Quasi-Newton methods in fluid dynamics", en *The Mathematics of Finite Elements and Applications* (ed. J. Whiteman), Vol. IV, Academic Press, London, 1982.
13. K.J. BATHE y A.P. CIMENTO, "Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **22**, 59–85, 1980.
14. E. HINTON y H. ABDEL RAHMAN, "Nonlinear solution algorithms for reinforced concrete plates", en *Proc. 6th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Paris, paper M3/4, 1981.
15. A. PICA y E. HINTON, "The quasi-Newton BFGS method in the large deflection analysis of plates", en *Numerical Methods for Nonlinear Problems* (eds C. Taylor, E. Hinton, D.R.J. Owen y E. Oñate), pp. 355–66, Pineridge Press, Swansea, 1980.
16. M. GERADIN, S. IDELSOHN y M. HOGGE, "Computational strategies for the solution of large nonlinear problems via quasi-Newton methods", *Comp. Struct.*, **13**, 73–81, 1981.
17. H. ABDEL RAHMAN, "Computational models for the nonlinear

analysis of reinforced concrete flexural slab systems", Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1982.

18. M.A. CRISFIELD, "Finite element analysis for combined material and geometric nonlinearity", en *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (eds W. Wunderlich *et al.*), Springer-Verlag, Berlin 1981.
19. M.A. CRISFIELD, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through", *Comp. Struct.*, **13**, *55–62, 1981*.
20. A.C. AITKEN, "The evaluation of the latent roots and latent vectors of a matrix", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **57**, 269–304, 1937.
21. B.M. IRONS y R. TUCK, "A version of the Aitken acceleration for computer iteration", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 275–77, 1969.
22. G.C. NAYAK y O.C. ZIENKIEWICZ, "Note on the *alpha*-constant stiffness method for the analysis of nonlinear problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **4**, 579–82, 1972.
23. T.H.H. PIAN y PIN TONG, "Variational formulations of finite displacement analysis", en *Symp. on High Speed Electronic Computation of Structures*, Liège, 1970.
24. O.C. ZIENKIEWICZ, "Incremental displacement in non-linear analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 587–92, 1971.
25. E. RIKS, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", *Int. J. Solids Struct.*, **15**, 529–51, 1979.
26. P.G. BERGAN, "Solution algorithms for nonlinear structural problems", en *Int. Conf. on Engineering Applications of the Finite Element Method , Computas*, pp. 13.1–13.39, 1979.
27. J.L. BATOZ y G. DHATT, "Incremental displacement algorithms for nonlinear problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14**, 1261–6, 1979.
28. E. RAMM, "Strategies for tracing nonlinear response near limit points", en *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (eds W. Wunderlich, E. Stein y K.J. Bathe), pp. 63–89, Springer-Verlag, New York, 1981.
29. P.G. BERGAN, "Solution by iteration in displacement and load spaces", en *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (eds W. Wunderlich *et al.*), Springer-Verlag, New York, 1981.
30. M. HESTENES y E. STIEFEL, "Method of conjugate gradients for solving linear systems", *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **49**, 409–36, 1952.
31. R. FLETCHER y C.M. REEVES, "Function minimization by conjugate gradients", *The Computer Journal*, **7**, 149–54, 1964.
32. E. POLAK, *Computational Methods in Optimization: A Unified Approach*, Academic Press, London, 1971.
33. B.M. IRONS, "The conjugate-Newton method", en *Int. Res. Semi. on Theory and Applications of the Finite Element Method*, University

of Calgary, Canada, 1973.
34. B.M. IRONS y A.F. ELSAWAF, "The conjugate Newton algorithm for solving finite element equations", en *Proc. U.S.-German Symp. on Formulations and Algorithms in Finite Element Analysis* (eds K.J. Bathe, J.T. Oden y W. Wunderlich), pp. 656–72, MIT Press, Cambridge, Mass., 1977.
35. J.R.H. OTTER, E. CASSEL y R.E. HOBBS, "Dynamic relaxation", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **35**, 633–56, 1966.
36. O.C. ZIENKIEWICZ y R. LÖHNER, "Accelerated relaxation or direct solution? Future prospects for FEM", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **21**, 3–11, 1986.
37. J.T. ODEN, "Numerical formulation of non-linear elasticity problems", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **93**, ST3, 235–55, 1967.
38. R. VON MISES, "Mechanik der Plastischen Formänderung der Kristallen", *Z. angew. Math. Mech.*, **8**, 161–85, 1928.
39. D.C. DRUCKER, "A more fundamental approach to plastic stress-strain solutions", *Proc. 1st U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, pp. 487–91, 1951.
40. W.T. KOITER, "Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic plastic materials with a singular yield surface", *Q.J. Appl. Math.*, **11**, 350–4, 1953.
41. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1980.
42. W. JOHNSON y P.W. MELLOR, *Plasticity for Mechanical Engineers*, Van Nostrand, New York, 1962.
43. W. PRAGER, *An Introduction to Plasticity*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.
44. W.F. CHEN, *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill, New York, 1982.
45. D.C. DRUCKER, "Conventional and unconventional plastic response and representation", *Appl. Mech. Rev.*, **41**, 151–67, 1988.
46. G.C. NAYAK y O.C. ZIENKIEWICZ, "Elasto-plastic stress analysis. Generalization for various constitutive relations including strain softening", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **5**, 113–35, 1972.
47. Y. YAMADA, N. YISHIMURA y T. SAKURAI, "Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method", *Int. J. Mech. Sci.*, **10**, 343–54, 1968.
48. O.C. ZIENKIEWICZ, S. VALLIAPPAN y I.P. KING, "Elasto-plastic solutions of engineering problems. Initial-stress, finite element approach", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 75–100, 1969.
49. G.C. NAYAK y O.C. ZIENKIEWICZ, "Convenient forms of stress invariants for plasticity", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **98**, ST4, 949–53,

1972.
50. D.C. DRUCKER y W. PRAGER, "Soil mechanics and plastic analysis or limit design", *Q. J. Appl. Math.*, **10**, 157–65, 1952.
51. O.C. ZIENKIEWICZ y G.N. PANDE, "Some useful forms of isotropic yield surfaces for soil, and rock mechanics", en *Finite Elements in Geomechanics* (ed. G. Gudehus), cap. 5, pp. 171–90, Wiley, Chichester, 1977.
52. O.C. ZIENKIEWICZ, V.A. NORRIS, L.A. WINNICKI, D.J. NAYLOR y R.W. LEWIS, "A unified approach to the soil mechanics problems of offshore foundations", en *Numerical Methods in Offshore Engineering* (eds O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis y K.G. Stagg), cap. 12, Wiley, Chichester, 1978.
53. O.C. ZIENKIEWICZ, V.A. NORRIS y D.J. NAYLOR, "Plasticity and viscoplasticity in soil mechanics with special reference to cyclic loading problems", en *Proc. Int. Conf. on Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics*, Geilo, Norway, Vol. 2, pp. 455–85, Tapir Press, Trondheim, 1977.
54. O.C. ZIENKIEWICZ, C.T. CHANG, N. BIĈANIĈ y E. HINTON, "Earthquake response of earth and concrete in the partial damage range", en *Proc. 13th Inst. Cong. on Large Dams*, New Delhi, R. 14, pp. 1033–47, 1979.
55. J.F. BESSELING, "A theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material", *J. Appl. Mech.*, **25**, 529–36, 1958.
56. Z. MRÓZ, "An attempt to describe the behaviour of metals under cyclic loads using more general work hardening model", *Acta Mech.*, **7**, 199, 1969.
57. O.C. ZIENKIEWICZ, G. C. NAYAK y D.R.J. OWEN, "Composite and *"Overlay"* models in numerical analysis of elasto-plastic continua", en *Foundations of Plasticity* (ed. A. Sawczuk), pp. 107–22, Noordhoff, Dordrecht, 1972.
58. D.R.J. OWEN, A. PRAKASH y O.C. ZIENKIEWICZ, "Finite element analysis of non-linear composite materials by use of overlay systems", *Comp. Struct.*, **4**, 1251–67, 1974.
59. F. DARVE, "An incrementally nonlinear constitutive law of second order and its application to localization", en *Mechanics of Engineering Materials* (eds C.S. Desai y R.H. Gallagher), cap. 9, pp. 179–96, Wiley, Chichester, 1984.
60. O.C. ZIENKIEWICZ y Z. MRÖZ, "Generalized plasticity formulation and applications to geomechanics", en *Mechanics of Engineering Materials* (eds C.S. Desai y R.H. Gallagher), cap. 33, pp. 655–80, Wiley, Chichester, 1984.
61. Z. MRÓZ y O.C. ZIENKIEWICZ, "Uniform formulation of consti-

tutive equations for clays and sand", en *Mechanics of Engineering Materials* (eds C.S. Desai y R.H. Gallagher), cap. 22, pp. 415–50, Wiley, Chichester, 1984.

62a. O.C. ZIENKIEWICZ, K.H. LEUNG y M. PASTOR, "Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. Part I-Basic model and its application", *Int. J. Num Anal. Meth. Geomechanics*, **9**, 453–76, 1985.

62b. M. PASTOR, O.C. ZIENKIEWICZ y K.H. LEUNG, "Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. Part II-Non associative models for sands", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomechanics*, **9**, 477–98, 1985.

63. M. PASTOR y O.C. ZIENKIEWICZ, "A generalized plasticity hierarchical model for sand under monotonic and cyclic loading", en *Proc. Int. Symp. on Numerical Methods in Geomechanics* (eds G.N. Pande y W.F. Van Impe), Ghent, pp. 131–50, Jackson, England, 1986.

64. M. PASTOR y O.C. ZIENKIEWICZ, "Generalized plasticity and modelling of soil behaviour", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, **14**, 151–90, 1990.

65. Y.F. DAFALIAS y E.P. POPOV, "A model of nonlinear hardening material for complex loading", *Acta Mechanica*, **21**, 173–92, 1975.

66a. O.C. ZIENKIEWICZ, A. CHAN, M. PASTOR, D.K. PAUL y T. SHIOMI, "Statics and dynamics of soils. A rational approach to quantitative solution. Part I. Fully saturated problems", *Proc. Roy. soc. Lond.*, **A429**, 285–309, 1990.

66b. O.C. ZIENKIEWICZ, Y.M. XIE, B.A. SCHREFLER, A. LEDESMA y N. BIĈANIĈ, "Part II. Semi-saturated problems", *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A429**, 311–21, 1990.

67. G.C. NAYAK, "Plasticity and large deformation problems by the finite element method", Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1971.

68. K.J. BATHE, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.

69. R.D. KRIEG y D.N. KRIEG, "Accuracy of numerical solution methods for the elastic, perfectly plastic model", *Trans ASME, J. Pressure Vessel Tech.*, **99**, 510–15, 1977.

70. M.L. WILKINS, "Calculation of elastic-plastic flow", *Methods of Computational Physics* (eds B. Alder *et al.*), Vol. 3, Academic Press, London, 1964.

71. R.L. TAYLOR, "Analysis of non-linear problems in inelasticity", Report of Institute of Numerical Methods in Engineering, Swansea, 1989.

72. R.L. TAYLOR y J.C. SIMO, "A return mapping algorithm for plate

stress elasto-plasticity", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, **22**, ST4, 649–70, 1986.

73. J.C. SIMO y R.L. TAYLOR, "Consistent tangent operators for rate dependent elasto-plasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **48**, 101–18, 1985.

74. M. ORTIZ y J.C. SIMO, "An analysis of a new class of integration algorithms for elasto-plastic constitutive relations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **23**, 353–66, 1986.

75. R.H. GALLAGHER, J. PADLOG y P.P. BIJLAARD, "Stress analysis of heated complex shapes", *J. Am. Rocket Soc.*, **32**, 700–7, 1962.

76. J.H. ARGYRIS, "Elasto-plastic matrix displacement analysis of three-dimensional continua", *Proc. J. Roy. Aero. Soc.*, **69**, 633–5, 1965.

77. G.G. POPE, "A discrete element method for analysis of plate elasto-plastic strain problems", report T.R. 65028, RAE Farnborough, 1965.

78. J.L. SWEDLOW, M.L. WILLIAMS y W.M. YANG, "Elastic-plastic stresses in cracked plates", Calcit report SM 65-19, California Institute of Technology, 1965.

79. P.V. MARCAL y I.P. KING, "Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method", *Int. J. Mech. Sci.*, **9**, 143–55, 1967.

80. S.F. REYES y D.U. DEERE, "Elasto-plastic analysis of underground openings by the finite element method", en *Proc. 1st Int. Congr. Rock Mechanics*, Lisbon, Vol. II, pp. 477–86, 1966.

81. E.P. POPOV M. KHOJASTEH-BAKHT y S. YAGHMAI, "Bending circular plates of hardening material", *Int. J. Solids Struct.*, **3**, 975–88, 1967.

82. R.M. MCMEEKING y J.R. RICE, "Finite element formulations for problems of large elastic plastic deformation", *Int. J. Solids Struct.*, **11**, 601–16, 1975.

83. J.C. NAGTEGAAL, D.M. PARKS y J.R. RICE, "On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **4**, 153–78, 1974.

84. R.H. GALLAGHER y A.K. DHALLA, "Direct flexibility finite element elastoplastic analysis", en *First SMIRT Conf.*, Berlin, pt 6, 1971.

85. E.F. RYBICKI y L.A. SCHMIT, "An incremental complementary energy method of non-linear stress analysis", *JAIAA*, **8**, 1105–12, 1970.

86. J.A. STRICKLIN, W.E. HEISLER y W. VON RUSMAN, "Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically non-linear structural analysis", *JAIAA*, **11**, 292–9, 1973.

87. D.R.J. OWEN, G.C. NAYAK, A.P. KFOURI y J.R. GRIFFITHS,

"Stresses in a partly yielded notched bar", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **6**, 63–72, 1973.
88. K.S. DINNO y S.S. GILL, "An experimental investigation into the plastic behaviour of flush nozzles in spherical pressure vessels", *Int. J. Mech. Sci.*, **7**, 817, 1965.
89. A. MENDELSON, M.H. HIRSCHBERG y S.S. MANSON, "A general approach to the practical solution of creep problems", *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, **81**, 85–98, 1959.
90. O.C. ZIENKIEWICZ, M. WATSON y I.P. KING, "A numerical method of visco-elastic stress analysis", *Int. J. Mech. Sci.*, **10**, 807–27, 1968.
91. O.C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, 1st ed., McGraw-Hill, New York, 1967.
92. G.A. GREENBAUM y M.F. RUBINSTEIN, "Creep analysis of axi-symmetric bodies using finite elements", *Nucl. Eng. Des.*, **7**, 379–97, 1968.
93. P.V. MARCAL, comunicación privada, 1972.
94. N.A. CYR y R.D. TETER, "Finite element elastic plastic creep analysis of two-dimensional continuum with temperature dependent material properties", *Comp. Struct*, **3**, 849–63, 1973.
95. O.C. ZIENKIEWICZ, "Visco-plasticity, plasticity, creep and visco-plastic flow (problems of small, large and continuing deformation)", en *Computational Mechanics*, TICOM Lecture Notes on Mathematics 461, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
96. M.B. KANCHI, D.R.J. OWEN y O.C. ZIENKIEWICZ, "The visco-plastic approach to problems of plasticity and creep involving geometrically non-linear effects", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **12**, 169–81, 1978.
97. T.R.J. HUGHES y R.L. TAYLOR, "Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto/viscoplastic finite element analysis", *Comp. Struct.*, **8**, 169–73, 1978.
98. E.C. BINGHAM, *Fluidity and Plasticity*, cap. VIII, pp. 215–18, McGraw-Hill, New York, 1922.
99. P. PERZYNA, "Fundamental problems in viscoplasticity", *Adv. Appl. Mech.*, **9**, 243–377, 1966.
100. O.C. ZIENKIEWICZ y I.C. CORMEAU, "Visco-plasticity solution by finite element process", *Arch. Mech.*, **24**, 873–88, 1972.
101. O.C. ZIENKIEWICZ y I.C. CORMEAU, "Visco-plasticity and plasticity. An alternative for finite element solution of material non-linearities", en *Proc. Colloque Methods Calcul Sci. Tech.*, pp. 171–99, IRIA, Paris, 1973.
102. J. ZARKA, "Généralisation de la théorie du potential multiple en viscoplasticité", *J. Mech. Phys. Solids*, **20**, 179–95, 1972.
103. Q.A. NGUYEN y J. ZARKA, "Quelques méthodes de resolution numérique en elastoplasticité classique et en elasto-viscoplasticité", en *Seminaire Plasticité et viscoplasticité*, Ecole Polytechnique, Paris, 1972; también en *Sciences et Technique de l'Armement*, **47**, 407–36, 1973.
104. O.C. ZIENKIEWICZ y I.C. CORMEAU, "Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids–a unified numerical solution approach", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, 821–45, 1974.
105. I.C. CORMEAU, "Numerical stability in quasi-static elasto-visco-plasticity", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **9**, 109–28, 1975.
106. F.A. LECKIE y J.B. MARTIN, "Deformation bounds for bodies in a state of creep", *Trans. ASME, J . Appl. Mech.*, **34**, 411–17, 1967.
107. I. FINNIE y W.R. HELLER, *Creep of Engineering Materials*, McGraw-Hill, New York, 1959.
108. O.C. ZIENKIEWICZ, C. HUMPHESON y R.W. LEWIS, "Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics", *Geotechnique*, **25**, 671–89, 1975.
109. G.N. PANDE y O.C. ZIENKIEWICZ (eds), *Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads*, Wiley, Chichester, 1982.
110. C.S. DESAI y R.H. GALLAGHER (eds), *Mechanics of Engineering Materials*, Wiley, Chichester, 1984.
111. E.H. LEE, "Visco-elasticity", en *Handbook of Engineering Mechanics* (ed. W. Flügge), McGraw-Hill, New York, 1962.
112. R.L. TAYLOR, K. PISTER y G. GOUDREAU, "Thermo-mechanical analysis of visco-elastic solids", *Int. J. Num. Meh. Eng.*, **2**, 45–60, 1970.
113. O.C. ZIENKIEWICZ, "Analysis of visco-elastic behaviour of concrete structures with particular reference to thermal stresses", *Proc. Am. Soc. Civ. Int.*, **58**, 383–94, 1961.
114. T. ALFREY, *Mechanical Behaviour of High Polymers*, Interscience, New York, 1948.
115. D. MCHENRY, "A new aspect of creep in concrete and its application to design", *Proc. Am. Soc. Test. Mat.*, **43**, 1064, 1943.
116. H.H. HILTON y H.G. RUSSEL, "An extension of Alfrey's analogy to thermal stress problems in temperature dependent linear visco-elastic media", *J. Mech. Phys. Solids*, **9**, 152–64, 1961.
117. O.C. ZIENKIEWICZ, M. WATSON y Y.K. CHEUNG, "Stress analysis by the finite element method–thermal effects", en *Proc. Conf. on Prestressed Concrete Pressure Vessels*, Institute of Civil Engineers, London, 1967.
118. O.C. ZIENKIEWICZ, S. VALLIAPPAN y I.P. KING, "Stress analysis

of rock as a *no-tension* material", *Geotechnique*, **18**, 56–66, 1968.
119. S. VALLIAPPAN y P. NATH, "Tensile crack propagation in reinforced concrete beams by finite element techniques", *Int. Conf. of Shear Torsion and Bond in Reinforced Concrete*, Coimbatore, India, Enero 1969.
120. N.W. KRAHL, W. KHACHATURIAN y C.P. SEISS, "Stability of tensile cracks in concrete beams", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **93**, ST1, 235–54, 1967.
121. O. BUYUKOZTURK y P.V. MARCAL, "Strength of reinforced concrete chambers under external pressure", *2nd Nat. Congr. on Pressure Vessel and Piping*, San Francisco, California, 23–27 Junio 1975.
122. B. SAUGY, T. ZIMMERMANN y M. HUSSAIN, "Three-dimensional rupture analysis of a prestressed concrete vessel including creep effects", *Nucl. Eng. Des.*, **28**, 97–120, 1974.
123. M. UEDA, M. KAWAHARA, Y. YOSHIOKA y M. KIKUCHI, "Non-linear viscoelastic and elasto-plastic finite elements for concrete structures", en *Discrete Methods in Engineering*, CISE, 1974.
124. D.V. PHILIPS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Finite element non-linear analysis of concrete structures", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, pt 2, **61**, 59–88, 1976.
125. O.C. ZIENKIEWICZ, D.V. PHILLIPS y D.R.J. OWEN, "Finite element analisys of some concrete non-linearities. Theories and examples", en *IABSE Symp. on Concrete Structures to Triaxial Stresses*, Bergamo, 17–19 Mayo 1974.
126. M. SUIDAN y W.C. SCHNOBRICH, "Finite element analysis of reinforced concrete", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **99**, ST10, 2109–22, 1973.
127. O.C. ZIENKIEWICZ y B. BEST, "Some non-linear problems in soil and rock mechanics–finite element solution", *Conf. on Rock Mechanics*, University of Queensland, Townsville, Junio 1969.
128. R.E. GOODMAN, R.L. TAYLOR y T. BREKKE, "A model for the mechanics of jointed rock", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **94**, SM3, 637–59, 1968.
129. O.C. ZIENKIEWICZ y G.N. PANDE, "Time dependent multilaminate models for rock–a numerical study of deformation and failure of rock masses", *Num. Anal. Meth. Geomech.*, **1**, 219–47, 1977.
130. G.N. PANDE y K.G. SHARMA, "Multi-laminate model of clays–a numerical evaluation of the influence of rotation of the principal stress axes", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **7**, 397–418, 1983.
131. R. HILL, "A general theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids", *J. Mech. Phys. Solids*, **6**, 236–49, 1958.
132. J. MANDEL, "Conditions de stabilité et postulat de Drucker", *Proc. IUTAM Symp. on Rheology and Soil Mechanics*, pp. 58–68, Springer-Verlag, Berlin, 1964.

133. J.W. RUDNICKI y J.R. RICE, "Conditions for the localisation of deformations in pressure dilatant materials", *J. Mech. Phys. Solids*, **23**, 371–94, 1975.
134. J. RICE, "The localisation of plastic deformation", en *Theoretical and Applied Mechanics* (ed. W.T. Koiter), pp. 207–20, North Holland, 1977.
135. S.T. PIETRUSZCZAK y Z. MRÓZ, "Finite element analysis of strain softening materials", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 327–34, 1981.
136. S.W. SLOAN y J.R. BOOKER, "Removal of singularities in Tresca and Mohr Coulomb yield functions", *Comm. Appl. Num. Meth.*, **2**, 173–9, 1986.
137. A. NEEDLEMAN, "Material rate dependence and mesh sensitivity in localisation problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **67**, 69–85, 1988.
138. Z.P. BAZANT y F.B. LIN, "Non-local yield limit degradation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **26**, 1805–23, 1988.
139. Z.P. BAZANT y G. PIJAUDIER-CABOT, "Non linear continuous damage localisation instability and convergence", *J. Appl. Mech.*, **55**, 287–93, 1988.
140. N. BIĈANIĈ, E. PRAMONO, S. STURE y K.J. WILLEM, "On numerical prediction of concrete fracture localisations", en *Proc. NUMETA Conf.*, 385–92, Balkema, 1985.
141. J. MAZARS y Z.P. BAZANT (eds), *Craking and Damage*, Elsevier Press, Dordrecht, 1989.
142. J.C. SIMO, "Strain softening and dissipation. A unification of approaches", en *Proc. NUMETA Conf.*, Swansea, pp. 440–61, 1985.
143. Y. LEROY y M. ORTIZ, "Finite element analysis of strain localisation in frictional materials", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, **13**, 53–74, 1989.
144. M. ORTIZ, Y. LEROY y A. NEEDLEMAN, "A finite element method for localised failure analysis", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **61**, 189–214, 1987.
145. T. BELYTCHKO, J. FISH y A. BAYLISS, "The spectral overlay on finite elements for problems with high gradients", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **6**, 71–76, 1990.
146. M. PASTOR, J. PERAIRE y O.C. ZIENKIEWICZ, "Adaptive remeshing for shear band localisation problems", *Archive of Applied Mechanics*, **61**, 30–39, 1991.
147. O.C. ZIENKIEWICZ y G.C. HUANG, "A note on localisation phenomena and adaptive FE analysis in forming processes", *Comm. Appl.*

Num. Meth., **6**, 71–76, 1990.
148. E. TONTI, "Variational formulation of non-linear differential equations", *Bull. de l'Acad. Roy. Belg. (Sci.)*, **55**, 137–278, 1969.
149. M. MUSCAT, *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*, Edwards, 1964.
150. R.E. VOLKER, "Non-linear flow in porous media by finite elements", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **95**, H76, 1969.
151. H. AHMED y D.K. SUNEDA, "Non-linear flow in porous media", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **95**, H76, 1847–59 1969.
152. A.M. WINSLOW, "Numerical solution of the quasi-linear Poisson's equation in a non-uniform triangle mesh", *J. Comp. Phys.*, **1**, 149–72, 1967.
153. M.V.K. CHARI y P. SILVESTER, "Finite element analysis of magnetically saturated d.c. motors", en *IEEB Winter Meeting on Power*, New York, 1971.
154. O.C. ZIENKIEWICZ, J.F. LYNESS y D.R.J. OWEN, "Three–dimensional magnetic field determination using a scalar potential. A finite element solution", *Magn. Trans. IEEE*, **13**, 1649–56, 1977.
155. J.F. LYNESS, D.R.J. OWEN y O.C. ZIENKIEWICZ, "The finite element analysis of engineering systems governed by a non-linear quasi-harmonic equation", *Comp. Struct.*, **5**, 65–79, 1975.
156. D. GELDER, "Solution of the compressible flow equations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 35–43, 1971.
157. C.A. ANDERSON y O.C. ZIENKIEWICZ, "Spontaneous ignition: finite element solutions for steady and transient conditions", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, 398–404, Agosto 1974.

Capítulo 8

PROBLEMAS GEOMÉTRICAMENTE NO LINEALES. GRANDES DESPLAZAMIENTOS E INESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS

8.1 Introducción

En el capítulo anterior se estudiaron situaciones donde la no linealidad del problema era debida a las propiedades de los materiales, desarrollándose métodos que permiten obtener soluciones utilizando de manera iterativa los procedimientos lineales clásicos. En este capítulo seguiremos una pauta similar para estudiar las no linealidades geométricas de las estructuras.

En todos los problemas estudiados hasta ahora se ha admitido implícitamente que las deformaciones y desplazamientos en la estructura estudiada son pequeños. Físicamente hablando ello significa que la geometría de los elementos no varía durante la actuación de las fuerzas exteriores, y que las deformaciones pueden aproximarse de forma lineal y asimilarse a infinitésimos de primer orden.

En la práctica, dichas hipótesis fallan a menudo, aún cuando las deformaciones reales sean pequeñas y no se sobrepasen los límites elásticos de los materiales que ordinariamente constituyen las estructuras. Si se necesita determinar con precisión los desplazamientos, puede ser necesario en algunos casos tomar en consideración la no linealidad geométrica. Por ejemplo, las tensiones debidas a los efectos de membrana, de las que normalmente se prescinde en problemas de flexión de placas, pueden causar una disminución considerable de los desplazamientos respecto de la solución lineal, a pesar de que los desplazamientos sigan siendo muy pequeños. Recíprocamente, puede llegar a alcanzarse una carga a partir de la cual los desplazamientos aumenten más rápidamente de los que predice la solución lineal y, desde luego, puede alcanzarse un estado para el cual la carga que pueda resistir la estructura *disminuya* al aumentar la deformación. Este es el problema clásico de estabilidad de estructuras con

todas sus numerosas implicaciones prácticas. Este tipo de estudio es de gran importancia por sus muchas aplicaciones en ingeniería aeronáutica, diseño de radiotelescopios, torres de enfriamiento, puentes de vigas cajón y otras estructuras relativamente esbeltas.

Además, en muchos casos pueden presentarse *grandes desplazamientos* sin que se produzcan deformaciones importantes. Dentro de esta categoría se encuentra el problema clásico de la "curva elástica" de la que es ejemplo el muelle de reloj.

Se ha intentado en este capítulo unificar el tratamiento de los problemas de manera general. Ello se consigue observando las ecuaciones de equilibrio no lineales básicas junto con su solución. Tales consideraciones llevan también a la formulación de los problemas clásicos de estabilidad inicial. Se ilustran estos conceptos formulando los problemas de grandes flechas y estabilidad inicial para placas planas. Esto lleva, de forma natural, a la formulación general del problema de grandes desplazamientos en medios continuos. Se adopta el enfoque lagrangiano total, en el que la geometría de referencia para cálculo de deformaciones coincide con la *configuración original*. Otros enfoques alternativos, basados en la actualización de las coordenadas, se mencionan brevemente al final del capítulo.

Hay, sin embargo, un aspecto de la no linealidad geométrica que no se tratará con detalle. Este es el caso de las grandes deformaciones que pueden producirse, incluso elásticamente, en materiales como el caucho, etc. Es necesario en este caso introducir relaciones particulares entre deformaciones y tensiones,[1] y las dimensiones de este texto hacen prohibitiva su discusión completa. No obstante, los procedimientos generales de la próxima sección siguen siendo aplicables a condición de que se introduzcan leyes constitutivas apropiadas.

La no linealidad geométrica se puede encontrar con frecuencia combinada con la no linealidad de las propiedades del material del tipo estudiado en el capítulo anterior, tal como ocurre en los fenómenos plásticos con pequeñas deformaciones, etc. Esto en principio no introduce ninguna complicación adicional, y se pueden modificar fácilmente los métodos expuestos en este capítulo de manera que permitan tratar tales situaciones.[2]

8.2 Consideraciones generales

8.2.1 *El problema fundamental.* Aunque los desplazamientos (o las deformaciones) sean grandes o pequeños, las condiciones de equilibrio entre las "fuerzas" exteriores e interiores deben cumplirse. Por consiguiente, si se definen los desplazamientos de la manera habitual en función de un número finito de parámetros (nodales) $\mathbf{a}$, pueden obtenerse las ecuaciones de equilibrio necesarias mediante el principio de los trabajos virtuales, tal como

se expuso en el Capítulo 2 del Volumen 1. Sin embargo, las "tensiones" y las "deformaciones" deben definirse ahora de manera que sean conjugadas entre sí. Más tarde se discutirán algunas de esas cantidades conjugadas con relación a problemas de placas, láminas y de elasticidad general, pero en todos los casos encontraremos que puede escribirse

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}) = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV - \mathbf{f} = 0 \tag{8.1}$$

donde $\boldsymbol{\Psi}$ representa una vez más la suma de fuerzas generalizadas interiores y exteriores, y $\bar{\mathbf{B}}$ se deduce de la definición de las deformaciones

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}}\, d\mathbf{a} \tag{8.2}$$

La matriz $\bar{\mathbf{B}}$ se distingue con una barra porque, si los desplazamientos son grandes, las deformaciones son una función no lineal de los desplazamientos, y la matriz $\bar{\mathbf{B}}$ depende ahora de $\mathbf{a}$. Más tarde se verá que conviene escribir

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L(\mathbf{a}) \tag{8.3}$$

donde $\mathbf{B}_0$ es la matriz que interviene cuando no se consideran más que deformaciones infinitesimales lineales, y $\mathbf{B}_L$ es una matriz que depende de los desplazamientos. En general se encontrará que $\mathbf{B}_L$ es una *función lineal* de dichos desplazamientos.

Si las deformaciones son moderadamente pequeñas, sigue siendo válida la relación elástica general

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{8.4}$$

en la cual $\mathbf{D}$ es la matriz habitual de constantes elásticas.†

Sin embargo, se podría igualmente escribir cualquier tipo de relaciones no lineales entre tensiones y deformaciones, ya que en definitiva el proceso se reduce de nuevo a resolver un sistema de ecuaciones no lineales (8.1). *Puede parecer superfluo recordar que las integrales que aparecen en la Ec. (8.1) se calculan en realidad elemento por elemento y que para establecer el "equilibrio nodal" las contribuciones de los diversos elementos se suman según la manera habitual.*

† Es importante no perder de vista que las componentes de la tensión definidas por la relación (8.4) son las que *corresponden* con las componentes de la deformación utilizadas. En ciertos problemas donde intervienen desplazamientos desproporcionados, dichas componentes de la deformación pueden estar sometidas a cambios de dirección considerables con relación a los ejes fijos originales.

8.2.2 *Procedimientos de solución.* Es evidente que la solución de la Ec. (8.1) debe encontrarse por aproximaciones sucesivas siguiendo un método iterativo; por consiguiente, son aplicables los métodos generales descritos en el capítulo anterior (Sección 7.2).

Si, por ejemplo, se utiliza el método de Newton-Raphson, hay que encontrar, tal como vimos, una relación entre $d\mathbf{a}$ y $d\boldsymbol{\Psi}$. Efectuando la variación del primer miembro de la Ec. (8.1) con respecto a $d\mathbf{a}$, se tiene

$$d\boldsymbol{\Psi} = \int_V d\bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV + \int_V \bar{\mathbf{B}}^T\, d\boldsymbol{\sigma}\, dV = \mathbf{K}_T\, d\mathbf{a} \tag{8.5}$$

y usando las Ecs. (8.4) y (8.2) se obtiene: †

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\, d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}\, d\mathbf{a}$$

y teniendo en cuenta la relación (8.3)

$$d\bar{\mathbf{B}} = d\mathbf{B}_L$$

Por tanto

$$d\boldsymbol{\Psi} = \int_V d\mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma}\, dV + \bar{\mathbf{K}}\, d\mathbf{a} \tag{8.6}$$

donde

$$\bar{\mathbf{K}} = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}\, dV = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L \tag{8.7}$$

en la cual $\mathbf{K}_0$ representa la matriz de rigidez usual para el caso de pequeños desplazamientos; o sea

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0\, dV \tag{8.7a}$$

La matriz $\mathbf{K}_L$ es debida a los grandes desplazamientos y viene dada por

$$\mathbf{K}_L = \int_V (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0)\, dV \tag{8.7b}$$

$\mathbf{K}_L$ se conoce bajo denominaciones diversas, como *matriz de desplazamientos iniciales,*[3] *matriz de grandes desplazamientos,* etc., y contiene sólo términos lineales y cuadráticos en $\mathbf{a}$. Puede demostrarse que esta matriz

† Recordaremos una vez más que si se utilizan relaciones no lineales entre tensiones y deformaciones, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma})$ es la matriz de elasticidad tangente definida por la Ec. (7.51).

podría obtenerse de otra forma manteniendo la hipótesis de que las deformaciones son infinitesimales, pero teniendo en cuenta en el cálculo de la matriz de rigidez la variación de las coordenadas de los elementos.

El primer término de (8.6) puede escribirse de manera general (que quizás no resulte evidente hasta haber examinado algunos casos particulares), como

$$\int_V d\mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma}\, dV \;\equiv\; \mathbf{K}_\sigma\, d\mathbf{a} \tag{8.8}$$

donde $\mathbf{K}_\sigma$ es una matriz simétrica que depende del nivel de tensión. Dicha matriz se denomina *matriz de tensión inicial*[3,4] o *matriz geométrica.*[5,6] Por tanto

$$d\boldsymbol{\Psi} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_L)\, d\mathbf{a} = \mathbf{K}_T\, d\mathbf{a} \tag{8.9}$$

donde $\mathbf{K}_T$ representa la matriz de *rigidez tangente total.* Puede aplicarse nuevamente una iteración del tipo de Newton, exactamente de la misma manera que en la Sección (7.2).

Resumiendo:

1. Se calcula la solución elástica $\mathbf{a}^0$ como primera aproximación.
2. Se deduce $\boldsymbol{\Psi}^0$ de la Ec. (8.1), estando $\mathbf{B}$ convenientemente definida por (8.3) y las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ por (8.4) (u otra ley lineal o no lineal).
3. Se calcula la matriz $\mathbf{K}_T^0$.
4. La corrección se obtiene con ayuda de la relación

$$\delta\mathbf{a}^0 = -(\mathbf{K}_T^0)^{-1}\boldsymbol{\Psi}^0$$

y se repiten los pasos 2, 3 y 4 hasta que $\boldsymbol{\Psi}^i$ sea suficientemente pequeño.

Podría utilizarse de nuevo una matriz constante, lo que aumenta el número de iteraciones pero permite emplear un procedimiento de resolución más económico invirtiendo parcialmente, una vez por todas, la matriz $\mathbf{K}_T$. Este método es válido con la condición de calcular $\boldsymbol{\Psi}^i$ en cada paso usando las expresiones correctas, pero a veces la convergencia de este procedimiento es más lenta.

Puede ser rentable hacer constante la matriz de rigidez tangente después de, digamos, la segunda iteración de cada incremento de carga; este método se ha usado con bastante éxito.[7]

A pesar de que todas las resoluciones se pueden efectuar mediante un solo incremento de carga equivalente a la carga total, a veces es posible, como en todos los problemas no lineales, que la solución no sea única y existe el riesgo de que la solución que se obtenga carezca de interés físico. En

tales casos es aconsejable proceder por incrementos de carga, calculando la solución no lineal correspondiente a cada incremento, lo que presenta además la ventaja adicional de ser a veces más económico, puesto que dentro de cada incremento los efectos de la no linealidad se reducen. Efectivamente, si se toman incrementos de carga suficientemente pequeños, basta una sola iteración por incremento para obtener una solución suficientemente exacta.[5,6,8] Es importante, sin embargo, comprobar periódicamente el equilibrio total del sistema utilizando la Ec. (8.1).

Todas las técnicas descritas en el Capítulo 7, Sección 7.2, se han utilizado con éxito para analizar problemas con no linealidades geométricas. Dichas técnicas han sido estudiadas exhaustivamente por Haisler y otros.[9]

8.2.3 *Problemas de estabilidad inicial.* Es interesante observar en este punto que $\mathbf{K}_\sigma$ no contiene explícitamente los desplazamientos y es proporcional al estado de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Por consiguiente, si al comienzo de los cálculos se calcula $\boldsymbol{\sigma}$ con la ayuda de una solución lineal, se obtiene de la Ec. (8.6)

$$d\boldsymbol{\Psi} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma)\, d\mathbf{a} \tag{8.10}$$

ya que $\mathbf{K}_L = 0$ en este estado.

Multiplicando las cargas por un factor λ se puede encontrar que existe un estado de estabilidad indiferente, es decir, que

$$d\boldsymbol{\Psi} = (\mathbf{K}_0 + \lambda\mathbf{K}_\sigma)\, d\mathbf{a} \equiv 0 \tag{8.11}$$

A partir de esta ecuación se puede calcular λ resolviendo un típico problema de *valores propios* (véase el Capítulo 9 para la resolución de similares problemas de valores propios). Éste es el clásico problema de estabilidad "inicial", tal como ocurre en el pandeo de barras, placas, láminas, etc.

Muy frecuentemente, en la literatura este procedimiento se utiliza mucho más allá de sus límites de aplicabilidad. Esta "estabilidad inicial" así determinada, sólo tiene una interpretación física real cuando las deformaciones obtenidas con la solución elástica (usando $\mathbf{K}_0$) conducen a que *la matriz de grandes deformaciones* $\mathbf{K}_L$ *sea idénticamente nula.* En la práctica, esto sólo sucede en un número muy limitado de situaciones (por ejemplo, en el caso de una barra recta sometida a carga axial, o en el caso de una esfera sometida a presión uniforme, etc.). La preocupación de algunos investigadores por el tema de las "imperfecciones iniciales" se limita estrictamente a situaciones en las que puede producirse una *bifurcación real.* En el caso de los problemas reales de ingeniería, es preciso efectuar el estudio utilizando la matriz de rigidez tangente total.[8] Cuando $\mathbf{K}_T\, d\mathbf{a}$ es idénticamente nulo, se satisface la condición de equilibrio indiferente. Es

evidente que en estos casos es necesario emplear métodos de cálculo por incrementos sucesivos.

Se puede llegar por diferentes caminos a un compromiso entre el problema clásico de estabilidad y un análisis no lineal completo.[10,11] Por ejemplo: *a*) basándose en un análisis no lineal, el problema de encontrar los valores propios se puede considerar después de cada incremento de carga o, alternativamente, *b*) se puede efectuar un análisis lineal de valores propios que incluya una matriz $\mathbf{K}_L$ linealizada junto con la matriz habitual $\mathbf{K}_\sigma$.

8.2.4 *Interpretación energética de los criterios de estabilidad.* Se ha demostrado en el Capítulo 2 del Volumen 1 que el trabajo virtual efectuado durante un desplazamiento virtual $d\mathbf{a}$ es de hecho igual a la variación de la energía potencial total Π. En el equilibrio se tiene, por tanto

$$d\Pi = d\mathbf{a}^T\boldsymbol{\Psi} = 0 \tag{8.12}$$

es decir, *la energía potencial total es estacionaria* (lo que es equivalente a la Ec. (8.1)).

La segunda variación de Π es [de la Ec. (8.9)]

$$d^2\Pi = d(d\Pi) = d\mathbf{a}^T\, d\boldsymbol{\Psi} = d\mathbf{a}^T\mathbf{K}_T\, d\mathbf{a} \tag{8.13}$$

Un criterio de estabilidad es que dicha segunda variación tenga un valor positivo; recíprocamente, la inestabilidad se traduce por un valor negativo de esta segunda variación (ya que en el primer caso es preciso introducir energía en la estructura, y en el segundo, ésta contiene un exceso de energía). En otras palabras, *si* $\mathbf{K}_T$ *es definida positiva, existe un estado estable.* Este criterio es muy conocido[12] y de considerable aplicación en la investigación de la estabilidad durante grandes deformaciones.†[13–15]

8.2.5 *Fuerzas que dependen de la deformación.* Al establecer la Ec. (8.5) se ha supuesto implícitamente que las fuerzas $\mathbf{f}$ no dependían de la deformación. En algunos casos esta hipótesis no es cierta. Este es el caso, por ejemplo, de las presiones que actúan sobre estructuras con grandes deformaciones, así como también de ciertas fuerzas aerodinámicas que dependen de las deformaciones (trepidación).

Si las fuerzas varían con el desplazamiento, al considerar la relación (8.5) será preciso tener en cuenta la variación $d\mathbf{f}$ con respecto a $d\mathbf{a}$; esto obliga a introducir *una matriz de corrección de cargas.*[16–17] Los problemas de estabilidad y de grandes deformaciones bajo la influencia de estas cargas variables (que no obedecen una ley de conservación) se pueden estudiar sin dificultad, a condición de tener en cuenta correctamente los términos anteriores.

† Otro método consiste en comprobar el signo del determinante de $\mathbf{K}_T$.[15]

8.3 Problemas de placas: grandes deformaciones y estabilidad "inicial"

8.3.1 *Definiciones.* En primer lugar consideraremos, a título de ejemplo, los problemas asociados a la deformación de placas sometidas a fuerzas "en su plano" y a fuerzas "laterales", cuando los desplazamientos no son infinitesimales ni excesivamente grandes (Figura 8.1). En estos problemas el efecto de "variación de la geometría" es menos importante que el *valor relativo* entre los términos lineales y no lineales de las relaciones entre deformaciones y tensiones; en realidad, en aquellos problemas en los que se tiene en cuenta la "rigidización progresiva", los desplazamientos no lineales son siempre menores que los correspondientes lineales (ver la Figura 8.2). Se sabe que en dichas situaciones los desplazamientos laterales dan lugar a deformaciones tipo "membrana" y que, en este caso, los dos problemas de deformaciones "en el plano de la placa" y "laterales" ya no pueden tratarse por separado, sino que están *acoplados*.

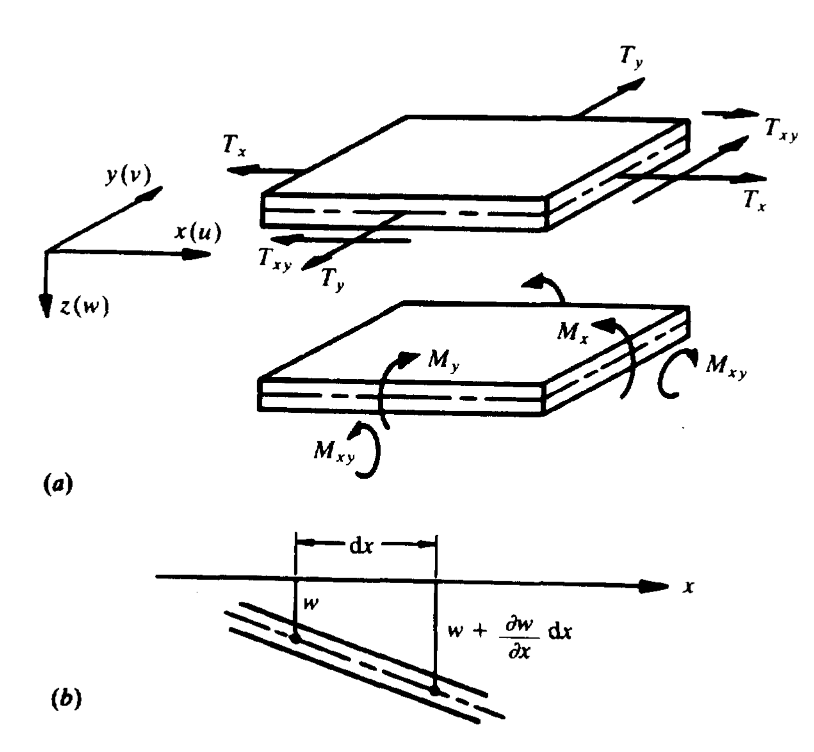


Figura 8.1 (*a*) Esfuerzos resultantes "en el plano" y de flexión para una placa plana. (*b*) Aumento de longitud de la superficie media debido al desplazamiento lateral.

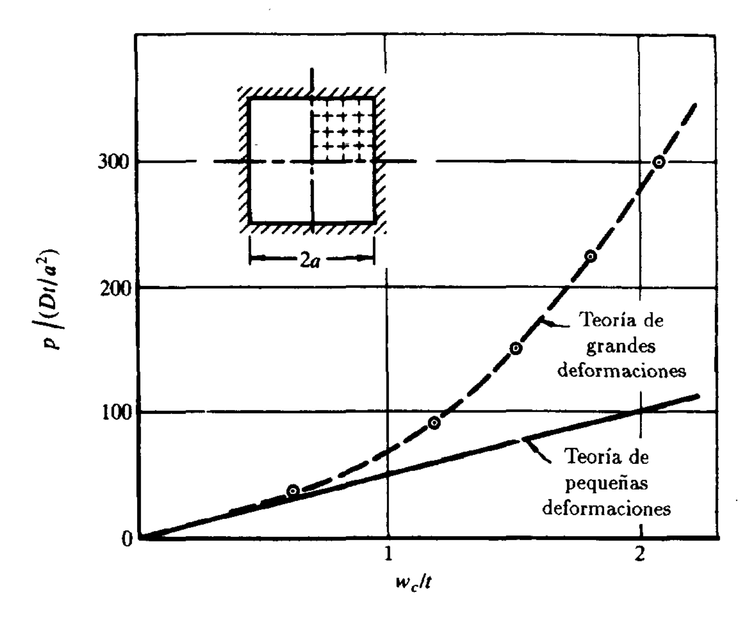


Figura 8.2 Flecha central w_c en una placa cuadrada empotrada bajo carga uniforme p.[15] $u = \nu = 0$ en el borde.

Como antes, representaremos las deformaciones de la placa en función de los desplazamientos de la superficie media; es decir, que si el plano x-y coincide con la superficie media, como en la Figura 8.1(a), se tendrá (ver Capítulos 2 y 4)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \boldsymbol{\varepsilon}^b \end{Bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^p \\ \boldsymbol{\sigma}^b \end{Bmatrix} \tag{8.14}$$

Las "tensiones" se definen por sus resultantes habituales,† por ejem-

† Las componentes "en el plano" y las de flexión se han separado entre sí por medio de los índices apropiados.

plo, $T_x = \bar{\sigma}_x t$, donde $\bar{\sigma}_x$ es la tensión de membrana media, etc. Además, si se considera el estado deformado, como se hace en la Figura 8.1(b), se aprecia que el desplazamiento w provoca un alargamiento adicional de la superficie media en las direcciones x e y, y la longitud dx se alarga para convertirse en

$$dx' = dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = dx\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\dots\right\}$$

El alargamiento en la dirección x se puede definir, por tanto, como (aproximación de segundo orden)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

Considerando de forma similar las otras componentes de la deformación,[18] se puede escribir como definición de la deformación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^p \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0^b \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}_L^p \\ \mathbf{0} \end{matrix}\right\} \tag{8.15}$$

donde el primer término no es sino la expresión lineal ya encontrada en ocasiones anteriores, y el segundo representa los términos no lineales. En esa expresión, u, v y w denotan las componentes usuales del desplazamiento de la superficie media.

Si se considera únicamente el comportamiento elástico lineal, la matriz $\mathbf{D}$ se compone de dos submatrices, una relativa a la tensión plana y la otra a la flexión (véanse Capítulos 2 y 4).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^p & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^b \end{bmatrix} \tag{8.16}$$

Finalmente, los desplazamientos se definen en función de parámetros nodales mediante las funciones de forma apropiadas.

Así, por ejemplo

$$\left\{\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}\right\} = \mathbf{N}\mathbf{a}^e \tag{8.17}$$

donde, para mayor comodidad, el conjunto de parámetros típicos relativos a un nodo se dividirá en dos partes, que respectivamente contienen los desplazamientos que condicionan la deformación en el plano de la placa y los que definen la deformación de flexión:

$$\mathbf{a}_i = \left\{\begin{matrix} \mathbf{a}_i^p \\ \mathbf{a}_i^b \end{matrix}\right\} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{a}_i^p = \left\{\begin{matrix} u_i \\ v_i \end{matrix}\right\} \tag{8.18}$$

$$\mathbf{a}_i^b = \left\{\begin{matrix} w_i \\ \dfrac{\partial w}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y_i} \end{matrix}\right\}$$

Así pues, la función de forma se puede subdividir también como

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i^p & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_i^b \end{bmatrix} \tag{8.19}$$

y además supondremos en lo que sigue que la matriz de desplazamiento global, obtenida después del ensamblaje, está dividida de la manera indicada por (8.18).

Esta manera de proceder es cómoda porque, a excepción de las deformaciones no lineales $\boldsymbol{\varepsilon}_L^p$, todas las definiciones del análisis clásico son aplicables, no siendo por tanto necesario repetirlas aquí.

8.3.2 *Cálculo de* $\bar{\mathbf{B}}$. Para seguir adelante la formulación es necesario ahora establecer las expresiones de las matrices $\bar{\mathbf{B}}$ y $\mathbf{K}_T$. En primer lugar se advierte que

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L \tag{8.20}$$

donde

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_0^b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_L^b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

expresiones en las cuales $\mathbf{B}_0^p$ y $\mathbf{B}_0^b$ son las ya definidas matrices clásicas de los elementos lineales apropiados para tensión plana y flexión, respectivamente; $\mathbf{B}_L^b$ se obtiene calculando la variación de $\boldsymbol{\varepsilon}_L^p$ con respecto a los parámetros $\mathbf{a}^b$.

Esta componente no lineal de la deformación, que figura en la Ec. (8.15), puede escribirse cómodamente de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^p = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \tag{8.21}$$

Las derivadas de w (giros) pueden relacionarse con los parámetros nodales $\mathbf{a}^b$ por

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}\mathbf{a}^b \tag{8.22}$$

en la cual se tiene

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^b}{\partial x} & \frac{\partial N_2^b}{\partial x} & \cdots \\ \frac{\partial N_1^b}{\partial y} & \frac{\partial N_2^b}{\partial y} & \cdots \end{bmatrix} \tag{8.23}$$

Así pues, $\mathbf{G}$ es una matriz definida exclusivamente en función de las coordenadas.

Calculando la variación del segundo miembro de la Ec. (8.21), se tiene†

† Las igualdades de la expresión (8.24) se justifican usando una propiedad de las matrices $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{\theta}$. Es fácil comprobar que si $\mathbf{x}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ es un vector cualquiera, entonces

$$d\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}$$

o sea

$$d\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}\ d\boldsymbol{\theta}$$

Similarmente, si

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

$$d\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_3 \\ y_3 & y_2 \end{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}$$

Esta segunda propiedad será utilizada más adelante.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_L^p = \frac{1}{2}\, d\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\ d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}\ d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}\mathbf{G}\ d\mathbf{a}^b \tag{8.24}$$

y de aquí inmediatamente, por definición

$$\mathbf{B}_L^b = \mathbf{A}\mathbf{G} \tag{8.25}$$

8.3.3 *Cálculo de* $\mathbf{K}_T$. La matriz de rigidez lineal (correspondiente a las pequeñas deformaciones) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_0^b \end{bmatrix} \tag{8.26}$$

estando cada submatriz definida como se expuso en los Capítulos 2 y 4. Utilizando la definición (8.7b) y sustituyendo en ella la expresión (8.20), pueden definirse las matrices asociadas a los grandes desplazamientos. Tras algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene

$$\mathbf{K}_L = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_0^{pT} & \mathbf{D}^p & \mathbf{B}_L^b \\ \text{Sim.} & \mathbf{B}_L^{bT} & \mathbf{D}^{b'} & \mathbf{B}_L^b \end{bmatrix} dV \tag{8.27}$$

Como punto final hay que calcular $\mathbf{K}_\sigma$ usando la identidad (8.8). Teniendo en cuenta la expresión (8.20), se llega, tras efectuar la variación, a

$$d\mathbf{B}_L^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ d\mathbf{B}_L^{bT} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{8.28}$$

sustituyendo esta expresión en (8.8) y (8.25), se obtiene

$$\mathbf{K}_\sigma \, d\mathbf{a} = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T \, d\mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} dV \tag{8.29}$$

Pero, teniendo en cuenta la propiedad demostrada en la nota al pie de la página anterior, se puede escribir

$$d\mathbf{A}^T \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} d\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} \mathbf{G} \, d\mathbf{a}^b$$

para obtener finalmente

$$\mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\sigma^b \end{bmatrix} \tag{8.30}$$

siendo

$$\mathbf{K}_\sigma^b = \int_V \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} \mathbf{G} \, dV \tag{8.31}$$

conocida *expresión simétrica de la matriz de tensiones iniciales* de la placa.

8.3.4 *Problemas de grandes flechas.* Disponemos ya de todos los elementos necesarios para resolver problemas de placas con grandes flechas.

La primera etapa consiste en calcular los desplazamientos $\mathbf{a}^0$ correspondientes a la hipótesis de pequeños desplazamientos (deformaciones no acopladas). Estos desplazamientos permiten determinar las deformaciones reales considerando la contribución no lineal definida por la expresión (8.21), junto con las contribuciones lineales adecuadas. Usando las relaciones de la elasticidad se pueden deducir las tensiones correspondientes, y la Ec. (8.1) permite calcular $\boldsymbol{\Psi}^0$. Para las iteraciones sucesivas, $\mathbf{K}_T^i$ se calcula a partir de (8.26), (8.27) y (8.30).

Como ejemplo típico de solución así obtenida,[15] en la Figura 8.2 se muestra la rigidización de una placa a causa de la aparición de tensiones de "membrana" cuando la deformación aumenta. Los bordes de la placa tienen impedido todo movimiento (lateral y en el plano). Los resultados exhiben un acuerdo excelente con los obtenidos mediante una solución analítica alternativa.

Las propiedades de los elementos se han obtenido utilizando para las deformaciones en el plano la función de forma correspondiente al rectángulo más sencillo, y para las deformaciones de flexión la función correspondiente al elemento rectangular no conforme (Sección 1.3, Capítulo 1).

En la Figura 8.3 se muestra un ejemplo de la variación de las tensiones con las cargas para una placa cuadrada con bordes empotrados y uniformemente cargada.[19] Se ha analizado un cuarto de la placa como antes, utilizando 32 elementos triangulares y el elemento "plano" del Capítulo 3 del Volumen 2 junto con una versión modificada[20] del elemento para flexión de placas no conforme del Capítulo 1. Existen en la literatura otros muchos ejemplos de grandes deformaciones de placas tratados con elementos finitos.[4,19,21–25]

8.3.5 *Inestabilidad por bifurcación.* En un reducido número de casos prácticos es posible, como en el clásico problema de Euler, que aparezca inestabilidad por cambio del modo de deformación (bifurcación). Consideremos el caso de una placa cargada únicamente en su propio plano; como no aparecen flechas laterales, w, la teoría de las pequeñas deformaciones proporciona la solución exacta. Sin embargo, incluso con desplazamientos laterales nulos, existe una matriz de tensiones $\mathbf{K}_\sigma^b$ no nula, mientras que $\mathbf{K}_L \equiv 0$. Si las tensiones que se ejercen en el plano son de compresión, esta matriz será generalmente de tal naturaleza que pueden determinarse valores propios reales de la ecuación de deformación bajo flexión:

$$(\mathbf{K}_0^b + \lambda \mathbf{K}_\sigma^b)\mathbf{a}^b = \mathbf{0} \tag{8.32}$$

en la cual λ denota el factor por el que han de multiplicarse las tensiones de membrana para obtener el equilibrio indiferente (inestabilidad).

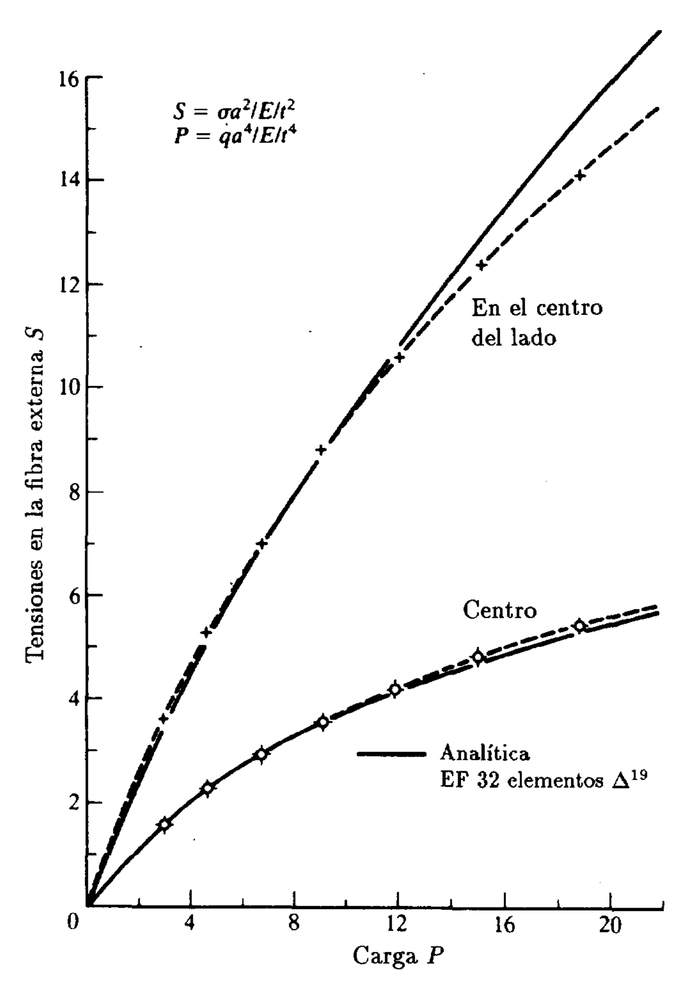


Figura 8.3 Placa cuadrada empotrada –tensiones–.

Cuando se llega a un estado de carga tal se produce un pandeo inicial en el que pueden aparecer movimientos laterales sin la menor carga lateral.

La formulación matemática del problema es sencilla; basta con escribir la ecuación de la flexión calculando $\mathbf{K}_0^b$ como en el Capítulo 1, y obtener $\mathbf{K}_\sigma^b$ de (8.31).

Los valores de la carga para los que aparece el pandeo (inestabilidad) se han determinado para un gran número de problemas de placas empleando diversos elementos.[26–31] En la Tabla 8.1 pueden verse algunos resultados comparativos para el problema sencillo de una placa cuadrada

simplemente apoyada y sometida a una compresión uniforme T_x en una sola dirección. En este caso, el coeficiente de pandeo se define como

$$C = T_x a^2/\pi^2 D$$

donde a es el lado de la placa y D la rigidez de la flexión.

TABLA 8.1

VALORES DE C PARA UNA PLACA CUADRADA SIMPLEMENTE APOYADA Y COMPRIMIDA AXIALMENTE

Elementos en un cuarto de placa	Incompatible		Compatible	
	Rectángulo[27] 12 G.D.L.	Triángulo[29] 9 G.D.L.	Rectángulo[30] 16 G.D.L.	Cuadrilátero[31] 16 G.D.L.
2 × 2		3·22		
4 × 4	3·77	3·72	4·015	4·029
8 × 8	3·93	3·90	4·001	4·002

Exacta $C = 4,00$[18]
G.D.L. = grados de libertad

Los elementos son todos del tipo descrito en el Capítulo 1, y es interesante hacer notar que todos los que satisfacen la compatibilidad de las derivadas primeras conducen siempre a una sobrestimación del coeficiente de pandeo. En este caso particular, los elementos no conformes subestiman dicho coeficiente sin que se haya podido, hasta ahora, acotar los límites de dicha estimación.

La Figura 8.4 representa un modo de pandeo para una estructura geométricamente más compleja.[29] Para este caso se utilizó de nuevo el triángulo no conforme.

Estos problemas de aparición de inestabilidad en placas son de importancia práctica limitada. Tan pronto aparecen desplazamientos laterales la placa sufre una rigidización que le permite resistir cargas adicionales. Esta rigidización puede observarse en la Figura 8.2. El estudio del comportamiento de la placa tras el pandeo puede efectuarse con ayuda del método general para grandes deformaciones descrito en las secciones anteriores.[32–34] Para evitar la dificultad que conlleva el problema de la transición brusca entre dos modos de deformación, conviene imponer una ligera perturbación (o carga lateral).

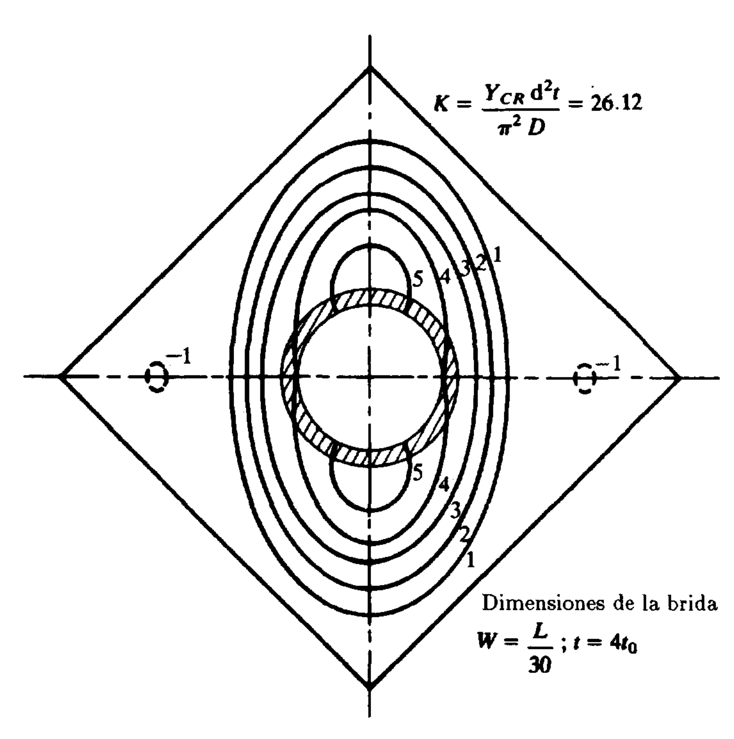


Figura 8.4 Modo de pandeo de una placa cuadrada sometida a esfuerzo cortante –bordes empotrados–; el orificio central está reforzado por una brida.[29]

8.4 Láminas

Los problemas de estabilidad son más importantes en láminas que en placas. En general, en estos problemas debe determinarse la matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T$ teniendo en cuenta los desplazamientos reales, porque cuando se somete una lámina a un estado de fuerzas exteriores cualquiera, los efectos de membrana y de flexión ya no son independientes, a excepción de algunos casos triviales. Si la matriz de *inestabilidad inicial* $\mathbf{K}_\sigma$ se calcula para las tensiones elásticas, a veces es posible obtener resultados interesantes que den información sobre el factor de estabilidad λ y, en efecto, en las publicaciones clásicas consagradas al pandeo de láminas esta estabilidad inicial es casi la única que se toma en consideración. La carga de rotura real muy bien puede ser en ocasiones *inferior* a la carga límite de estabilidad inicial. Es, pues, importante estar en posición de determinar, al menos de manera aproximada, los efectos de la deformación.

Si se supone que la lámina está constituida por elementos planos de

tipo placa, se pueden aplicar a la matriz de rigidez tangente de la placa las mismas transformaciones que se definieron en el Capítulo 3.[35,36] Si se usan elementos laminares curvos, es indispensable volver a las ecuaciones de la teoría de láminas e incluir los términos no lineales.[15,37–39] Para información sobre la formulación completa necesaria se recomienda la consulta de las referencias anteriores.

En el caso de láminas rebajadas puede ser conveniente prescindir de las transformaciones del Capítulo 3 y adoptar una formulación basada en la teoría de láminas rebajadas de Marguerre.[25,40,41]

Es muy importante insistir de nuevo en el hecho de que los cálculos de inestabilidad inicial sólo tienen sentido en ciertos casos particulares, y que con frecuencia sobrestiman el valor de las cargas de rotura. Para obtener resultados correctos es necesario recurrir al proceso no lineal completo. El aumento progresivo de "flexibilidad" de una lámina sometida a una carga muy inferior a la de pandeo, calculada según la teoría lineal, se ha representado en la Figura 8.5, tomada de la referencia 15. La Figura 8.6 muestra la ruina progresiva de un arco para una carga muy inferior a la que proporciona la teoría lineal del pandeo.[8]

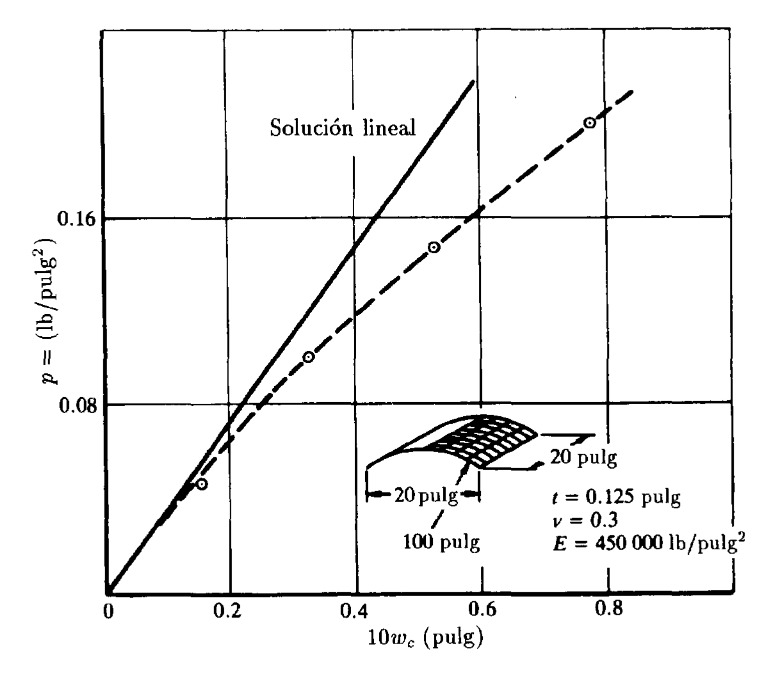


Figura 8.5 Flecha en el centro de una lámina cilíndrica. Todos los bordes empotrados.[15]

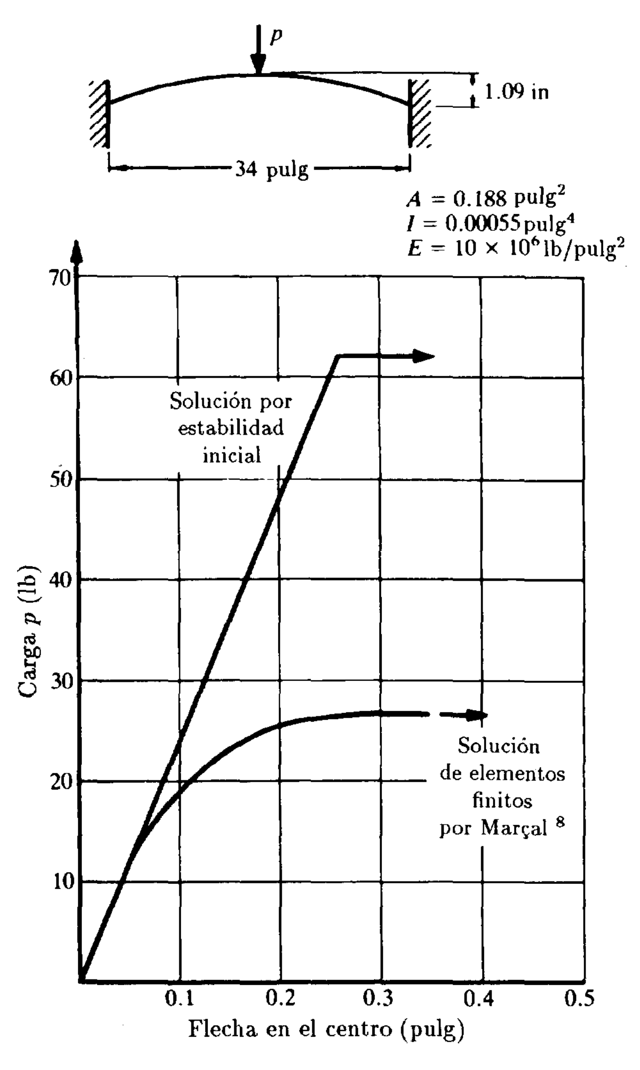


Figura 8.6 Soluciones por "estabilidad inicial" y por incrementos del problema de grandes deformaciones de un arco sometido a una carga central p.[8]

La determinación de la carga de rotura real de una lámina o de otra estructura esbelta presenta dificultades evidentes (similares a las que se encontraron en el Capítulo 7), ya que no se puede obtener una convergencia de los desplazamientos cuando la carga se acerca a la carga portante "última".

Conviene, en tales casos, continuar el estudio imponiendo incrementos

del desplazamiento y calculando las reacciones correspondientes en el caso de que la estructura esté cargada por fuerzas concentradas. Argyris[6] y otros[39,42] utilizan un método análogo a éste para seguir el comportamiento de un arco hasta rotura.

Pian y Ping Tong[43] han mostrado cómo puede generalizarse este proceso de manera sencilla en el caso de que se considere un sistema de cargas crecientes pero que mantienen sus valores relativos.

Se han descrito otros métodos relativos al problema de la carga de rotura habiéndose efectuado numerosos trabajos en este importante campo.[44–48]

8.5 Formulación general de los problemas de grandes deformaciones y grandes desplazamientos

En el caso de placas, la relación no lineal entre deformaciones y desplazamientos utilizada en la Sección 8.3 [Ec. (8.15)] fue deducida adaptando las hipótesis adecuadas a este tipo de problemas. Para las láminas pueden obtenerse de manera análoga otras relaciones, pero las posibilidades de aproximación que se presentan en todas las etapas del cálculo son muy diversas. Sin embargo, es posible utilizar una definición general de las deformaciones que sea *válida tanto si los desplazamientos o las deformaciones son grandes o pequeños.* Dicha definición fue presentada por Green y Saint Venant y se conoce como *tensor de deformación de Green.* Los desplazamientos u, v y w se refieren a un sistema fijo de coordenadas x, y y z y las deformaciones se definen por las expresiones siguientes[49]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\end{aligned} \tag{8.33}$$

las otras componentes se obtienen mediante la permutación adecuada.

Si los desplazamientos son pequeños, la aproximación lineal de primer orden que conduce a las deformaciones habituales se obtiene a partir de las expresiones anteriores, prescindiendo de los términos de segundo grado.

La interpretación geométrica de las definiciones precedentes no es obvia para el caso general, pero adviértase que proporciona una medida del alargamiento y de la distorsión angular de un elemento inicialmente ortogonal, y para pequeñas deformaciones no son más que las definiciones usuales, incluso si los desplazamientos son grandes.

Si los valores reales de las deformaciones son pequeños se demuestra

fácilmente que entonces ε_x define la variación de longitud de un segmento de longitud unidad *inicialmente orientado paralelamente al eje x*, y que γ_{xy} define la variación angular entre dos segmentos de recta *inicialmente* paralelos a los ejes x e y. Esto es cierto en las definiciones anteriores, incluso si ha habido movimientos que hayan hecho girar los ejes iniciales o los hayan desplazado de manera importante.

Vamos ahora a establecer las expresiones no lineales generales de $\bar{\mathbf{B}}$ y $\mathbf{K}_T$ en el caso general de un estado tridimensional de tensiones. Es muy sencillo extender el estudio a formulaciones más particulares, como puede ser el caso unidimensional; ello se deja a la iniciativa del lector. Una formulación general como ésta permite, por otra parte, abordar de manera cómoda los problemas de placas y láminas, pudiéndose incluir ahora ciertos términos de los que se prescindía en el problema particular de placas de la sección anterior.

8.5.1 *Obtención de la matriz* $\mathbf{B}_L$. La matriz general de deformación en el caso tridimensional puede definirse como suma de dos términos, constituidos respectivamente por las componentes de desplazamientos infinitesimales y de grandes desplazamientos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_L \tag{8.34}$$

donde

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{8.35}$$

se definió ya en el Capítulo 5 del Volumen 1. Los términos no lineales de las expresiones (8.33) pueden escribirse más cómodamente en la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}_y^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}_z^T \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}_z^T & \boldsymbol{\theta}_y^T \\ \boldsymbol{\theta}_z^T & \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}_x^T \\ \boldsymbol{\theta}_y^T & \boldsymbol{\theta}_x^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \\ \boldsymbol{\theta}_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \tag{8.36}$$

donde

$$\boldsymbol{\theta}_x^T = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad \text{etc.}$$

y $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensiones 6×9.

El lector podrá comprobar sin dificultad la validez de las definiciones anteriores y establecer de nuevo las propiedades de las matrices $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{\theta}$ definidas en la sección 8.3.2. De nuevo

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} d\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\ d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}\ d\boldsymbol{\theta} \tag{8.37}$$

y como se puede determinar $\boldsymbol{\theta}$ con la ayuda de la función de forma $\mathbf{N}$ y de los parámetros nodales $\mathbf{a}$, se puede escribir

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}\mathbf{a} \tag{8.38}$$

o

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{AG}\ d\mathbf{a}$$

y

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{AG} \tag{8.39}$$

8.5.2 *Obtención de la matriz* $\mathbf{K}_T$. Advirtiendo que

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L$$

se puede formar de inmediato la matriz de la Ec. (8.7)

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}\ dV \tag{8.40}$$

Para completar la matriz de rigidez tangente total basta con determinar la matriz de tensiones iniciales $\mathbf{K}_\sigma$. Utilizando de nuevo la identidad (8.8), se tiene

$$\mathbf{K}_\sigma \, d\mathbf{a} = \int_V d\mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_V \mathbf{G}^T \, d\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV \tag{8.41}$$

Podemos volver a comprobar que se puede escribir

$$d\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{I}_3 & \tau_{xy} \mathbf{I}_3 & \tau_{xz} \mathbf{I}_3 \\ & \sigma_y \mathbf{I}_3 & \tau_{yz} \mathbf{I}_3 \\ \text{sim.} & & \sigma_z \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{MG} \, d\mathbf{a} \tag{8.42}$$

donde $\mathbf{I}_3$ es una matriz unidad de dimensiones 3×3.

Sustituyendo (8.42) en (8.41), se obtiene[42]

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{MG} \, dV \tag{8.43}$$

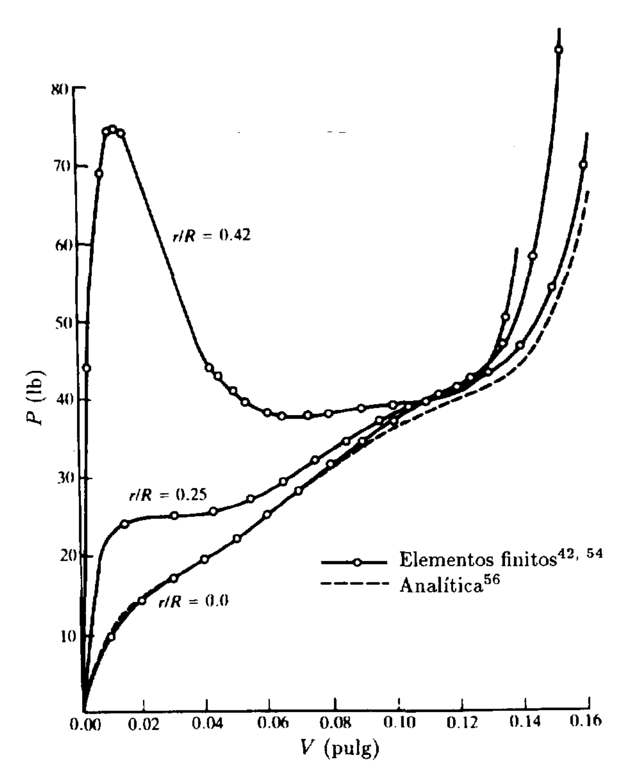
en la cual $\mathbf{M}$ es una matriz de dimensiones 9×9 donde figuran las seis componentes de la tensión dispuestas de la manera indicada en (8.42). Se manifiesta de nuevo que la matriz $\mathbf{K}_\sigma$ es *simétrica.*

Hemos omitido nuevamente supraíndices que identifican elementos, aunque en realidad todas las matrices anteriores se obtendrían elemento a elemento y se ensamblarían de la manera habitual.

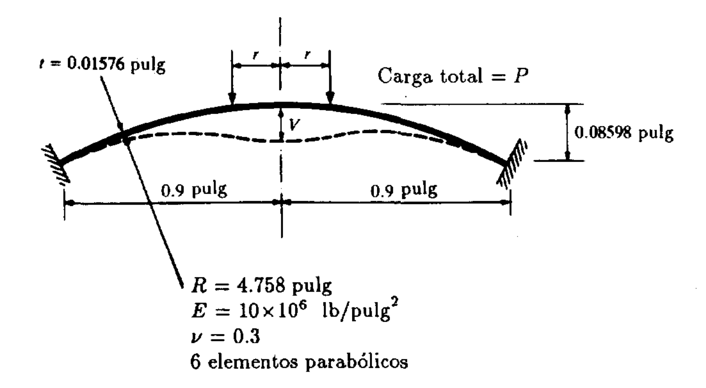
Si se quieren efectuar aproximaciones correctas, estas expresiones generales constituyen un buen punto de partida para el estudio de placas y láminas. En el caso de láminas de gran espesor, estudiado en el Capítulo 4, estas expresiones son esenciales.

Además, estas expresiones son válidas para el estudio de grandes deformaciones si se encuentra una relación tensión-deformación adecuada. Para ello, sin embargo, es más corriente definir una función de energía de deformación en función de las componentes de la deformación, y deducir las fuerzas generalizadas mediante minimización directa de aquélla. Oden[50–53] da algunos ejemplos de este análisis de grandes deformaciones a propósito de un estudio de grandes deformaciones para membranas de caucho y medios continuos.

En las Figuras 8.7 y 8.8 se muestra un ejemplo de aplicación de la formulación anterior al caso de una lámina de revolución sometida a una carga puntual central y a cargas lineales distribuidas sobre circunferencias;[42,54,55] se han usado en este ejemplo elementos isoparamétricos parabólicos y lineales. Otro ejemplo típico de solución obtenida mediante esta formulación bidimensional se puede apreciar en las Figuras 8.8 y 8.9 para un arco empotrado y articulado de gran altura;[54,56] en este caso, el método lagrangiano descrito predijo flechas extremadamente grandes.



(*a*) Curvas de carga-desplazamiento para varias cargas anulares



(*b*) Definición de la geometría y deformada

Figura 8.7 Cubierta esférica.

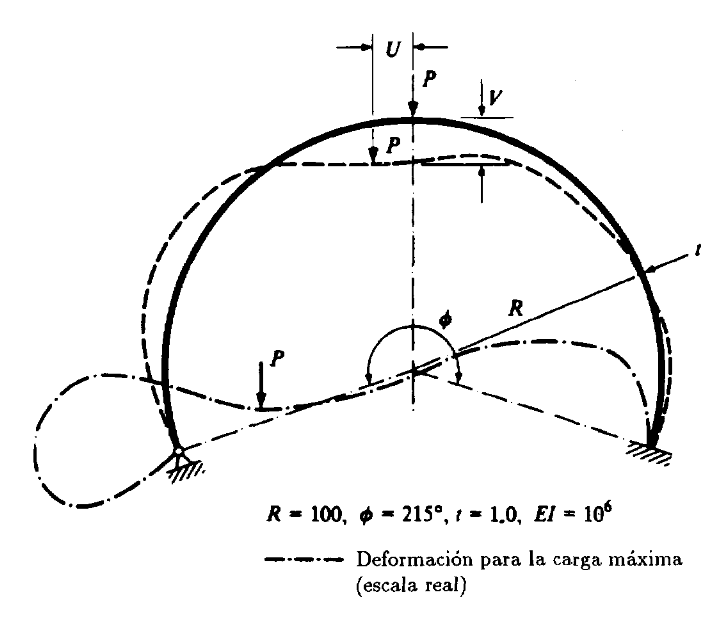


Figura 8.8 Arco empotrado y articulado –deformación bajo carga–.

Es importante tener en cuenta que el empleo de elementos isoparamétricos junto con la formulación general anterior conduce a representaciones de $\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L$ y $\mathbf{K}_\sigma$ particularmente concisas. Más aún, dichas formulaciones hacen más económico el cálculo de $\mathbf{K}_\sigma$.[7,42,55]

8.6 Observaciones finales

Se ha intentado presentar en este capítulo un método de estudio común a todos los problemas de grandes deformaciones. Se han presentado diversos métodos de resolución del sistema de ecuaciones no lineales que constituyen la base de estos problemas; el lector podrá preguntarse, con razón, cuál es preferible. Si no se desea más que la simple solución de un problema no lineal de grandes deformaciones, el método Newton parece ser el que más rápidamente converge en la mayoría de los casos. En ciertos casos, sin embargo, los métodos de una matriz constante son más económicos.

Si se desea estudiar la evolución completa de la deformación en función de la carga aplicada, es muy práctico proceder por pequeños incrementos de carga, y considerar el problema como de elasticidad lineal para cada uno de tales incrementos, calculando la matriz de rigidez tangente al

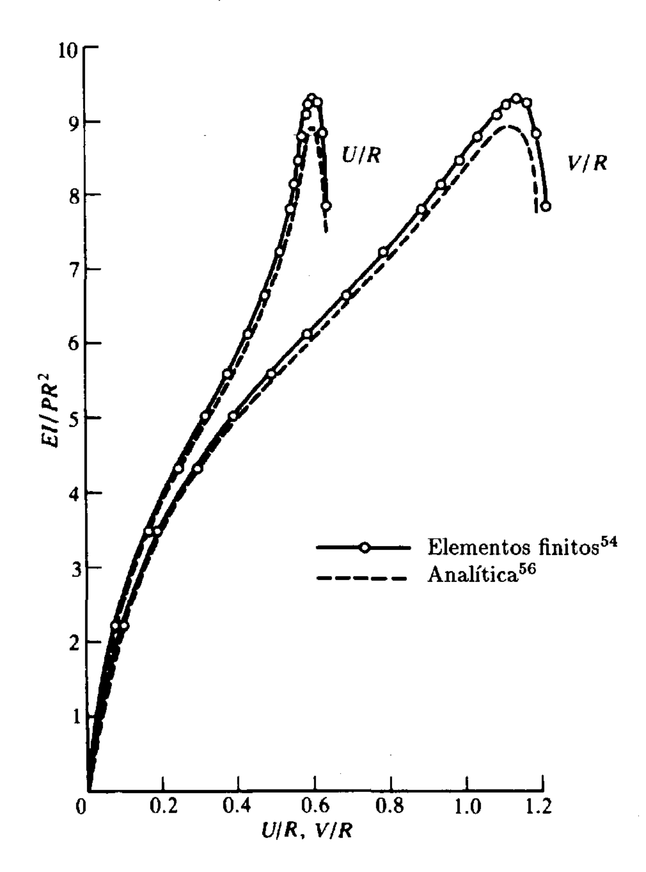


Figura 8.9 Arco empotrado y articulado: curvas de carga-desplazamiento (componentes horizontal y vertical).

comienzo de cada incremento.[3,5] Estos métodos pueden acumular errores y recomendamos efectuar cada cierto número de incrementos una solución completa mediante el método de Newton.

El estudio de problemas geométricamente no lineales puede extenderse fácilmente a situaciones dinámicas;[57] en el Capítulo 11 (Sección 11.10) veremos algunos ejemplos de ello.

La combinación de la no linealidad del material con la no linealidad geométrica es particularmente sencilla si se puede formar una matriz de elasticidad incremental. Marçal[3] ha resuelto un gran número de problemas de este tipo donde las grandes deformaciones intervienen conjuntamente con la plasticidad. Es interesante resaltar que las resoluciones de problemas de materiales y de geometrías no lineales son similares y pueden desarrollarse programas de ordenador capaces de tratar indistintamente

ambos tipos de no linealidad.

Finalmente, es preciso hacer notar dos puntos. El primero se refiere a la aparentemente larga obtención de la matriz de rigidez inicial en el caso de las placas, que en publicaciones anteriores[27,29] se ha obtenido de una manera más directa. Ello se debe a que hemos intentado aquí desarrollar una formulación completamente general, lo que esperamos haber conseguido. El segundo punto se refiere a las operaciones algo complicadas que parecen necesarias para conservar, en la sección dedicada a grandes deformaciones estudiadas desde un punto de vista general, la formulación matricial utilizada a lo largo de todo el libro. La notación tensorial hubiera podido utilizarse de manera sistemática en todo el texto con las consiguientes simplificaciones. A pesar de todo, pensamos que no tiene objeto lamentar haber escogido una notación más directa y comprensible.

Una alternativa a los procedimientos lagrangianos descritos en este capítulo es el uso de la configuración real (actualizada) del elemento según formas eulerianas. Ello resulta ventajoso en los casos de grandes deformaciones y McMeeking y Rice[58] ofrecen una descripción clara del procedimiento.

En tales casos es conveniente volver a las componentes de tensión más obvias, las tensiones de Cauchy, que definen las tensiones en función del área actual del material y de las coordenadas globales. De nuevo es una cuestión sencilla escribir relaciones constitutivas incrementales, incluso de tipo altamente no lineal, plástico, y ecuaciones de equilibrio en forma discreta [véase Ec. (8.1)], o escritas precisamente como en elasticidad infinitesimal en función de incrementos infinitesimales de deformación. Sin embargo, es importante en tales formulaciones escribir el incremento de tensión debido únicamente a la rotación (incremento de tensión de Jauman-Zaremba). Con esta cautela, todos los cálculos siguen el esquema descrito en el capítulo anterior para cada incremento de pequeños desplazamientos. La falta de espacio nos impide extendernos más sobre esta cuestión.

Las referencias 59 a 62 dan al lector más información en este complejo tema e introducen algunas de las tendencias actuales.

Referencias

1. C. TRUESDELL (ed.), *Continuum Mechanics IV: Problems of Non-linear Elasticity*, Vol. 8, Gordon and Beach, London, 1965.
2. K.J. BATHE y H. OZDEMIR, "Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis", *Comp. Struct.*, **6**, 81–92, 1976.
3. P.V. MARÇAL, *Finite element analysis of combined problems of material and geometric behaviour*, Techn. Report 1, ONR, Brown University, 1969; también *Proc. Am. Soc. Mech. Eng. Conf. on Computational Approaches in Applied Mechanics*, paper 133, Junio 1969.

4. M.J. TURNER, E.H. DILL, H.C. MARTIN y R.J. MELOSH, "Large deflection of structures subjected to heating and external loads", *J. Aero. Sci.*, **27**, 97–106, 1960.
5. J.H. ARGYRIS, S. KELSEY y H. KAMEL, *Matrix Methods of Structural Analysis*, AGARD-ograph 72, Pergamon Press, Oxford, 1963.
6. J.H. ARGYRIS, "Continua and discontinua", *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, Octubre 1965.
7. G.C. NAYAK, *Plasticity and large deformation problems by finite element method*, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1971.
8. P.V. MARÇAL, *Effect of initial displacement on problem of large deflection and stability*, Tech. Report ARPA E54, Brown Univ., 1967.
9. W.E. HAISLER, J.A. STRICKLIN y F.J. STEBBINS, "Development and evaluation of solution procedures for geometrically non-linear analysis", *J.A.I.A.A.*, **10**, pp. 264–72, 1972.
10. G.A. DUPUIS, D.D. PFAFFINGER y P.V. MARÇAL, "Effective use of incremental stiffness matrices in non-linear geometric analysis", IUTAM *Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures*, Liége, Agosto 1970.
11. R.H. GALLAGHER y S.T. MAU, *A method of limit point calculation in finite element structural analysis*, report NASA CR 12115, Septiembre 1972.
12. H.L. LANGHAAR, *Energy Methods in Applied Mechanics*, Wiley, New York, 1962.
13. K. MARGUERRE, "Über die Anwendung der energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme", *Hohrb*, D.V.L., 252–62, 1938.
14. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, "The second variation test with algebraic and differential contrasts", *Advanced Problems and Methods for Space Flight Optimisation*, Pergamon Press, Oxford, 1969.
15. C.A. BREBBIA y J. CONNOR, "Geometrically non-linear finite element analysis", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **95**, EM2, 463–83, 1969.
16. H.D. HIBBIT, P.V. MARÇAL y J.R. RICE, "A finite element formulation for problems of large strain and large displacement", *Int. J. Solids Struct.*, **6**, 1069–86, 1970.
17. J.T. ODEN, Discussion on "Finite element analysis of non-linear structures", por R.H. Mallet y P.V. Marçal, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **95**, ST6, pp. 1376–81, 1969.
18. S.P. TIMOSHENKO y J.M. GERE, *Theory of Elastic Stability*, 2ª ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
19. R.D. WOOD, *The application of finite element methods to geometrically non-linear analysis*, Ph. D. Thesis, Univ.of Wales, Swansea,

1973.
20. A. RAZZAQUE, "Program for triangular bending elements with derivative smoothing", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **6**, 333–5, 1973.
21. L.A. SCHMIT, F.K. BOGNER y R.L. FOX, "Finite deflection structural analysis using plate and cylindrical shell discrete elements", *JAIAA*, **5**, 1525–7, 1968.
22. T. KAWAI y N. YOSHIMURA, "Analysis of large deflection of plates by finite element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 123–33, 1969.
23. R.H. MALLET y P.V. MARÇAL, "Finite element analysis of non-linear structures", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **94**, ST9, 2081–105, 1968.
24. D.W. MURRAY y E.L. WILSON, "Finite element large deflection analysis of plates", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **94**, EM1, 143–65, 1968.
25. P.G. BERGAN y R.W. CLOUGH, "Large deflection analysis of plates and shallow shells using the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **5**, 543–56, 1973.
26. H.C. MARTIN, "On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems", *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, Octubre 1965.
27. K.K. KAPUR y B.J. HARTZ, "Stability of thin plates using the finite element method", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **92**, EM2, 177–95, 1966.
28. R.H. GALLAGHER y J. PADLOG, "Discrete element approach to structural instability analysis", *J.A.I.A.A.*, **1**, 1537–9, 1963.
29. R.G. ANDERSON, B. M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Vibration and stability of plates using finite elements", *Int. J. Solids Struct.*, **4**, 1031–55, 1968.
30. W.G. CARSON y R.E. NEWTON, "Plate buckling analysis using a fully compatible finite element", *J.A.I.A.A.*, **8**, 527–9, 1969.
31. Y.K. CHANG y A.P. KABAILA, "A conforming quadrilateral element for analysis of stiffened plates", UNICIV report R-121, University of New South Wales, 1973.
32. D.W. MURRAY y E.L. WILSON, "Finite element post buckling analysis of thin elastic plates", *Proc. 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1968.
33. K.C. ROCKEY y D.K. BAGCHI, "Buckling of plate girder webs under partial edge loadings", *Int. J. Mech. Sci.*, **12**, 61–76, 1970.
34. T.M. ROBERTS y D.G. ASHWELL, "Post-buckling analysis of slightly curved plates by the finite element method", report 2, Dept. of Civil and Struct. Engineering, Univ. of Wales, Cardiff, 1969.
35. R.G. ANDERSON, "A finite element eigenvalue solution system", Ph.D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1968.
36. R.H. GALLAGHER, R.A. GELLATLY, R.H. MALLET y J. PADLOG, "A discrete element procedure for thin shell instability analysis", *J.A.I.A.A.*, **5**, 138–45, 1967.

37. R.H. GALLAGHER y H.T.Y. YANG, "Elastic instability predictions for doubly curved shells", *Proc. 2nd Conf.on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1968.
38. J.L. BATOZ, A. CHATTOPADHYAY y G. DHATT, "Finite element large deflection analysis of shallow shells", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 35–8, 1976.
39. T. MATSUI y O. MATSUOKA, "A new finite element scheme for instability analysis of thin shells", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 145–70, 1976.
40. T.Y. YANG, "A finite element procedure for the large deflection analysis of plates with initial imperfections", *J.A.I.A.A.*, **9** (No. 8), 1468–73, 1971.
41. T.M. ROBERTS y D.G. ASHWELL, "The use of finite element mid-increment stiffness matrices in the post-buckling analysis of imperfect structures", *Int. J. Solids Struct.*, **7**, 805–23, 1971.
42. O.C. ZIENKIEWICZ y G.C. NAYAK, "A general approach to problems of plasticity and large deformation using isoparametric elements", *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1971.
43. T.H.H. PIAN y PING TONG, "Variational formulation of finite displacement analysis", *Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures*, Liége, 1970.
44. H.C. MARTIN, "Finite elements and the analysis of geometrically non-linear problems", *Recent Advances in Matrix Methods and Structural Analysis and Design*, Univ. of Alabama Press, 1971.
45. A.C. WALKER, "A non-linear finite element analysis of shallow circular arches", *Int. J. Solids Struct.*, **5**, 97–107, 1969.
46. J.M.T. THOMPSON y A.C. WALKER, "A non-linear perturbation analysis of discrete structural systems", *Int. J. Solids Struct.*, **4**, 757–67, 1968.
47. J.S. PRZEMIENIECKI, "Stability analysis of complex structures using discrete element techniques", *Symp. on Struct. Stability and Optimisation*, Loughborough University, Marzo 1967.
48. J. CONNOR y N. MORIN, "Perturbation techniques in the analysis of geometrically non-linear shells", *Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures*, Liége, 1970.
49. Y.C. FUNG, *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.
50. J.T. ODEN, "Finite plane strain of incompressible elastic solids by the

finite element method", *Aeronautical Quarterly*, **19**, 254-64, 1967.
51. J.T. ODEN y T. SATO, "Finite deformation of elastic membranes by the finite element method", *Int. J. Solids Struct.*, **3**, 471–88, 1967.
52. J.T. ODEN, "Numerical formulation of non-linear elasticity problems", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **93**, ST3, 235–55, 1967.
53. J.T. ODEN, "Finite element applications in non-linear structural analysis", *Proc. ASCE Symp. on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering*, Vanderbilt University, 1969.
54. R.D. WOOD y O.C. ZIENKIEWICZ, "Geometrically non-linear finite element analysis of beams-frames-circles and axisymmetric shells", *Comp. Struct.*, **7**, 725–35, 1977.
55. J.F. MESCALL, "Large deflections of spherical shells under concentrated loads", *J. Appl. Mech.*, **32**, 936–8, 1965.
56. D.A. DA DEPPO y R. SCHMIDT, "Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load", *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, 894–6, 1975.
57. J.A. STRICKLIN, "Non-linear dynamic analysis of shells of revolution", *Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures*, Liége, 1970.
58. R.M. Mc MEEKING y J.R. RICE, "Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation", *Int. J. Solids Struct.*, **11**, 601–16, 1975.
59. M. KLEIBER, *Incremental Finite Element Modelling in Non-linear Solid Mechanics*, Ellis-Horwood, London, 1990.
60. K.J. BATHE, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.
61. L.H. MALVERN, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
62. H. KARDESTUNCER y D.H. NORRIE (eds), *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1987.

Capítulo 9

EL TIEMPO COMO VARIABLE. SEMIDISCRETIZACIÓN DE PROBLEMAS DE CAMPO Y DINÁMICOS Y MÉTODOS ANALÍTICOS

9.1 Introducción

En todos los problemas que en este libro hemos considerado hasta ahora se han supuesto condiciones que en general no varían con el tiempo. La idealización implícita en el método de los elementos finitos es ampliable sin dificultades a situaciones en las que intervenga el tiempo.

La gama de problemas prácticos en los que es preciso considerar la intervención del tiempo como variable es muy amplia. Como ejemplos representativos podemos mencionar la conducción del calor en régimen transitorio, la propagación de ondas en fluidos y el comportamiento dinámico de las estructuras. Aunque sea habitual considerar estos distintos problemas por separado clasificándolos a veces en "parabólicos" o "hiperbólicos" de acuerdo con la estructura matemática de las ecuaciones que los rigen,[1] nosotros los agruparemos en una sola categoría para demostrar que pueden tratarse todos con la misma formulación.

En la primera parte de este capítulo estableceremos, mediante la simple extensión de los procedimientos utilizados hasta el presente, las ecuaciones diferenciales matriciales de comportamiento correspondientes a los problemas de este tipo, entre los que se incluyen un gran número de problemas de la Física. En esta primera parte, la discretización por elementos finitos se referirá únicamente a las dimensiones espaciales, a lo que seguirá un proceso de semidiscretización (véase Capítulo 9, del Volumen 1). En el resto del capítulo se estudiarán varios procedimientos analíticos para resolver el sistema ordinario de ecuaciones diferenciales lineales resultante. Estos métodos constituyen el arsenal básico para analizar problemas de regímenes transitorios y estacionarios.

El Capítulo 10 se dedicará a la propia discretización en el dominio del tiempo.

9.2 Formulación directa de los problemas dependientes del tiempo con subdivisión del espacio en elementos finitos

9.2.1 *Ecuación "cuasi-armónica" con derivadas respecto del tiempo.* En muchos problemas de Física la ecuación cuasi-armónica toma una forma en la que intervienen las derivadas de la función incógnita ϕ respecto del tiempo. En un caso tridimensional se tendría una ecuación típica como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\left(\bar{Q}-\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)=0 \tag{9.1}$$

En la expresión anterior todos los parámetros que intervienen pueden ser, en el caso más general, funciones del tiempo dadas, o de ϕ en problemas no lineales; es decir

$$k_x = k_x(\mathbf{x},\phi,t) \qquad \bar{Q}=\bar{Q}(\mathbf{x},\phi,t),\ \text{etc.} \tag{9.2}$$

Si se considera la configuración en un instante dado, las derivadas de ϕ respecto del tiempo y todos los parámetros pueden tratarse como *funciones fijas en las coordenadas del espacio.* Por consiguiente, en ese instante el problema es absolutamente idéntico a los estudiados en el Capítulo 10 del Volumen 1 a condición de considerar la última expresión entre paréntesis de la Ec. (9.1) como el término de fuente Q.

La discretización de este tipo de problemas mediante elementos finitos *espaciales* ya ha sido estudiada con detalle; ya sabemos que haciendo

$$\begin{gathered}\phi=\sum N_i a_i=\mathbf{Na}\\ \mathbf{N}=\mathbf{N}(x,y,z) \qquad \mathbf{a}=\mathbf{a}(t)\end{gathered} \tag{9.3}$$

para cada elemento, se obtiene tras el ensamblaje un sistema de ecuaciones de la forma general†

$$\mathbf{Ka}+\bar{\mathbf{f}}=\mathbf{0} \tag{9.4}$$

Las contribuciones de cada elemento a las matrices anteriores están definidas en el Capítulo 10 del Volumen 1, que no es necesario repetir aquí a excepción de la que representa el término de "carga" debido a Q. Este viene dado por

$$\bar{\mathbf{f}}^e=-\int_{\Omega^e}Q\mathbf{N}^T\,d\Omega \tag{9.5}$$

Sustituyendo ahora Q por el último término entre paréntesis de la Ec. (9.1) se tiene

$$\bar{\mathbf{f}}^e=-\int_{\Omega^e}\mathbf{N}^T\left(\bar{Q}-\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)d\Omega \tag{9.6}$$

Sin embargo, en virtud de las expresiones (9.3) se conoce la aproximación de ϕ en función de los parámetros nodales $\mathbf{a}$. Sustituyendo dicha aproximación en las Ecs. (9.4) resulta

$$\bar{\mathbf{f}}^e=-\int_\Omega\mathbf{N}^T\bar{Q}\,d\Omega+\left(\int_\Omega\mathbf{N}^T\mu\mathbf{N}\,d\Omega\right)\frac{d}{dt}\mathbf{a}+\left(\int_\Omega\mathbf{N}^T\rho\mathbf{N}\,d\Omega\right)\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{a} \tag{9.7}$$

y tras desarrollar los diversos términos de (9.4) y ensamblar el sistema, se obtiene la *ecuación diferencial matricial* siguiente

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}+\mathbf{Ka}+\mathbf{f}=\mathbf{0} \tag{9.8}$$

$$\dot{\mathbf{a}}\equiv\frac{d}{dt}\mathbf{a} \qquad \ddot{\mathbf{a}}=\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{a} \tag{9.9}$$

donde todas las matrices se obtienen ensamblando las submatrices elementales según el procedimiento clásico; las submatrices $\mathbf{K}^e$ y $\mathbf{f}^e$ siguen estando definidas por las relaciones (10.17) en el Capítulo 10 del Volumen 1,† y

$$C_{ij}^e=\int_{\Omega^e}N_i\mu N_j\,d\Omega \tag{9.10}$$

$$M_{ij}^e=\int_{\Omega^e}N_i\rho N_j\,d\Omega \tag{9.11}$$

Como puede apreciarse en las relaciones anteriores volvemos a encontrar matrices simétricas.

† La matriz $\mathbf{H}$ del Capítulo 10 del Volumen 1 se ha reemplazado por $\mathbf{K}$ para facilitar la comparación con otras ecuaciones dinámicas.

† En la Ec. (9.8) se entiende, como de costumbre, que el término relativo a las cargas $\bar{\mathbf{f}}$ incluye también ciertos valores de ϕ impuestos (y, por consiguiente, de $\mathbf{a}$) en los contornos. Un punto que muchos olvidan es que esto implica también la imposición de los valores de $\dot{\mathbf{a}}$ y $\ddot{\mathbf{a}}$ en dichos contornos, lo que contribuye a los términos de carga apropiados. Solamente cuando los valores de $\mathbf{a}$ impuestos sean cero, o cuando las matrices $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{M}$ sean diagonales, se podrá despreciar dicha contribución.

Las condiciones de contorno impuestas para un instante dado se tratan de la forma usual.

Existe tal variedad de problemas de Física regidos por ecuaciones como la (9.1) que es prácticamente imposible incluirlos todos en esta obra. Sin embargo, citaremos algunos de los casos más característicos.

Ecuación (9.1) *con* $\rho = 0$. Es la clásica *ecuación de transmisión del calor por conducción* en régimen transitorio[1,2] que varios investigadores ya han estudiado por el método de los elementos finitos.[3–6] Esta misma ecuación es aplicable a otros problemas de Física —entre los que se encuentra la *consolidación de suelos*,[7] asociada a *fenómenos de filtración en régimen transitorio*—.[8]

Ecuación (9.1) *con* $\mu = 0$. Es la célebre *ecuación de ondas de Helmholz* que rige una gran variedad de problemas de Física. Las ondas electromagnéticas,[9] las ondas superficiales en los fluidos[10] y las ondas de compresión[11] no son más que algunos de los fenómenos estudiados con ayuda del método de los elementos finitos.

Ecuación (9.1) *con* $\mu \neq \rho \neq 0$. Esta ecuación de ondas amortiguadas tiene un campo de aplicación aún más general y presenta una importancia especial en mecánica (ondulatoria) de fluidos.

Advertirá el lector que lo hecho aquí no es sino una simple aplicación del procedimiento de discretización parcial descrito en la Sección 9.7 del Capítulo 9 del Volumen 1. Es conveniente, sin embargo, efectuar las operaciones de la forma sugerida, puesto que así se dispondrá inmediatamente de todas las matrices y expresiones obtenidas al estudiar los problemas de régimen estacionario.

9.2.2 *Comportamiento dinámico de las estructuras elásticas con amortiguamiento lineal.*† Aunque en la sección anterior nos hemos ocupado únicamente de lo que aparentemente era un problema puramente matemático, podemos aplicar directamente un razonamiento idéntico para estudiar la amplia categoría de problemas relativos al comportamiento dinámico de las estructuras elásticas siguiendo estrictamente las líneas generales del Capítulo 2 del Volumen 1.

Cuando los desplazamientos de un cuerpo elástico varían en función del tiempo, entran en juego dos tipos de fuerzas adicionales. Las primeras son las fuerzas de inercia, que para una aceleración definida por $\ddot{\mathbf{u}}$ se pueden reemplazar por sus equivalentes estáticas

$$-\rho\ddot{\mathbf{u}}$$

† Por simplicidad sólo consideraremos efectos de inercia y de amortiguamiento *repartidos*, de los cuales son un caso límite las masas y las fuerzas de amortiguamiento concentradas.

de acuerdo con el conocido principio de d'Alembert ($\mathbf{u}$ representa el desplazamiento generalizado). Las componentes de esta fuerza se definen en las mismas direcciones que las del desplazamiento $\mathbf{u}$; en general, se expresan por unidad de volumen. De esta forma, el coeficiente ρ es simplemente la densidad.

La segunda fuerza es la producida por las resistencias (rozamientos) opuestas al movimiento. Estas últimas pueden ser debidas a movimientos microscópicos, a la resistencia del aire, etc., estando en general relacionadas no linealmente con la velocidad $\dot{\mathbf{u}}$.

Sin embargo, para simplificar los cálculos siguientes sólo consideraremos las resistencias lineales de tipo viscoso, que en un problema estático equivalente dan lugar a fuerzas por unidad de volumen de intensidad

$$-\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{u}}$$

En la expresión anterior, $\boldsymbol{\mu}$ es una propiedad que se supone puede ser evaluada numéricamente.

El problema estático equivalente, en cada instante considerado, se puede discretizar exactamente de la misma manera indicada en el Capítulo 2 del Volumen 1, reemplazando las fuerzas másicas de volumen $\mathbf{b}$ por su equivalente

$$\bar{\mathbf{b}} - \rho\ddot{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{u}}$$

Las fuerzas (nodales) aplicadas a un elemento y definidas por las expresiones (2.13) del Capítulo 2 del Volumen 1 se hacen ahora (excluyendo la contribución de las tensiones y las deformaciones iniciales)

$$\bar{\mathbf{f}}^e = -\int_{V^e} \mathbf{N}^T\mathbf{b}\, dV = -\int_{V^e} \mathbf{N}^T\bar{\mathbf{b}}\, dV + \int_{V^e} \mathbf{N}^T\rho\ddot{\mathbf{u}}\, dV + \int_{V^e} \mathbf{N}^T\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{u}}\, dV \tag{9.12}$$

donde la primera fuerza es precisamente la debida a las cargas repartidas exteriores, no siendo por tanto necesarias mayores consideraciones acerca del particular.

Sustituyendo la Ec. (9.12) en las ecuaciones generales de equilibrio se obtiene finalmente, tras el ensamblaje, la ecuación diferencial matricial siguiente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{9.13}$$

en la cual $\mathbf{K}$ y $\mathbf{f}$ son las matrices globales de rigidez y de fuerzas, respectivamente, obtenidas como de costumbre por adición de los coeficientes de rigidez de los elementos, y por adición de las fuerzas nodales debidas

a cargas exteriores, tensiones iniciales, etc.; este ensamblaje se efectúa siguiendo las reglas habituales. Las nuevas matrices $\mathbf{C}$ y $\mathbf{M}$ se ensamblan en la forma usual a partir de las submatrices elementales dadas por

$$C^e_{ij} = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{N}\, dV \tag{9.14}$$

y

$$\mathbf{M}^e_{ij} = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N}\, dV \tag{9.15}$$

La matriz $\mathbf{M}^e$ se conoce con el nombre de *matriz de masa de un elemento* y la matriz ensamblada $\mathbf{M}$ como la matriz de masa del sistema.

Es interesante mencionar que en los primeros intentos de tratamiento de los problemas dinámicos de esta naturaleza, la masa de cada elemento solía concentrarse arbitrariamente en los nodos, lo que siempre daba por resultado una matriz $\mathbf{M}^e$ diagonal, aún cuando en realidad no existiera masa concentrada alguna. Archer[12] e independientemente Leckie y Lindberg[13] demostraron simultáneamente en 1963 el hecho de que esta concentración de masas en los nodos era en realidad innecesaria y aparentemente inconsistente. La presentación general de los resultados resumidos en la Ec. (9.15) se debe a Zienkiewicz y Cheung.[14] Se ha escogido el nombre de "matriz de masa consistente" para designar a la matriz de masa distribuida de un elemento, expresión que nos parece innecesaria puesto que es la única matriz que es consecuencia lógica y natural del proceso de discretización.

Por analogía, las matrices $\mathbf{C}^e$ y $\mathbf{C}$ podrían llamarse *matrices de amortiguamiento consistentes.*

Para muchos métodos de cálculo la matriz concentrada de masa es, sin embargo, más conveniente y económica. Actualmente hay quien utiliza casi exclusivamente estas matrices y los resultados obtenidos son a menudo precisos. Mientras que si se emplean elementos sencillos es fácil ingeniar un procedimiento de repartir la masa basándose en razonamientos físicamente evidentes, ello no ocurre así para elementos de órdenes elevados; más tarde volveremos a hablar de los procedimientos para obtener dicha "concentración" de masas en los nodos.

La determinación de la matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}$ es difícil en la práctica, ya que se desconoce la matriz de viscosidad $\boldsymbol{\mu}$. A menudo se hace la hipótesis de que la matriz de amortiguamiento sea una combinación lineal de las matrices de rigidez y de masa, es decir

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \tag{9.16}$$

donde α y β se determinan experimentalmente.[15]

Esta forma de expresar el amortiguamiento se conoce como "amortiguamiento de Rayleigh" y ofrece algunas ventajas matemáticas que veremos más adelante. En ocasiones se define $\mathbf{C}$ de manera más explícita

y no es necesario emplear estas formas aproximadas para definir el amortiguamiento.

Quizás sea útil señalar que a veces, para describir las fuerzas de inercia, puede ser necesario utilizar funciones de forma diferentes a las empleadas para definir el desplazamiento $\mathbf{u}$. Por ejemplo, en placas y vigas (Capítulo 1) el estado de deformación está completamente determinado una vez que w, desplazamiento lateral, sea conocido, ya que se ha hecho uso de las hipótesis adicionales habituales de la flexión de placas. Sin embargo, cuando se consideran las fuerzas de inercia, puede ser conveniente no sólo incluir la simple fuerza de inercia lateral definida por

$$-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(en la cual ρ es ahora el peso de la placa por unidad de superficie), sino también considerar *pares de inercia a la rotación* del tipo

$$\frac{\rho t^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right), \text{ etc.}$$

Así pues, ahora simplemente es necesario definir un desplazamiento más general $\bar{\mathbf{u}}$

$$\bar{\mathbf{u}} = \left\{ \begin{matrix} w \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{matrix} \right\} = \bar{N}\mathbf{a}^e$$

donde $\bar{\mathbf{N}}$ se deduce inmediatamente de la definición de $\mathbf{N}$ empleada para definir la componente w. Relaciones como la (9.15) son aún válidas con la condición de sustituir $\mathbf{N}$ por $\bar{\mathbf{N}}$ y ρ por la matriz

$$\begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\rho t^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\rho t^2}{12} \end{bmatrix}$$

Estos casos particulares se presentan, sin embargo, muy raramente.

9.2.3 *Matrices de "masa" o de "amortiguamiento" de algunos elementos particulares.* No es posible presentar la forma explícita de todas las matrices de masa de los diversos elementos estudiados en capítulos anteriores. Aquí sólo nos ocuparemos de algunos ejemplos seleccionados.

Tensión y deformación planas. Usando los elementos triangulares estudiados en el Capítulo 3 del Volumen 1, la matriz $\mathbf{N}$ está definida por

$$\mathbf{N}^e = \mathbf{I}[N_i,\ N_j,\ N_k]$$

en la que

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La Ec. (3.8) del Volumen 1 nos proporciona

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta, \text{ etc.},$$

donde Δ es la superficie del triángulo.

Si t es el espesor del elemento y se supone que es constante en todo el mismo, se obtiene, para la matriz de masa de (9.15),

$$\mathbf{M}^e = \rho t \int\int \mathbf{N}^T \mathbf{N}\ dx\ dy$$

o

$$\mathbf{M}^e_{rs} = \rho t \mathbf{I} \int\int N_r N_s\ dx\ dy \tag{9.17}$$

Sustituyendo las relaciones (3.8) del Volumen 1 se demuestra fácilmente que

$$\int\int N_r N_s\ dx\ dy \begin{cases} \frac{1}{12}\Delta & \text{si} \quad r \neq s \\ \frac{1}{6}\Delta & \text{si} \quad r = s \end{cases} \tag{9.18}$$

Así pues, tomando la masa del elemento como

$$\rho t \Delta = W$$

la matriz de masa se convierte en

$$\mathbf{M}^e = \frac{W}{3} \left|\begin{array}{cc:cc:cc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \hdashline \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \hdashline \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right| \tag{9.19}$$

Si se hubiera repartido la masa entre los tres nodos en partes iguales, la matriz de masa del elemento considerado tendría por expresión

$$\mathbf{M}^e = \frac{W}{3} \left|\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \tag{9.20}$$

Es evidente que ambas matrices difieren considerablemente; no obstante, su aplicación produce resultados casi idénticos.

Flexión de placas. Los problemas de vibración de placas revisten una considerable importancia técnica. Muchos problemas de índole práctica, como oscilaciones de tableros de puentes, vibraciones de álabes de turbinas, etc., conducen a ecuaciones cuya resolución analítica es impracticable.

La importancia del empleo de matrices de masa consistentes en lugar de matrices de masas concentradas ha sido claramente ilustrada en numerosas referencias.[15−22]

Si se considera, por ejemplo, el elemento de placa rectangular de la Sección 1.3, la función de desplazamientos está definida por la expresión (1.29), como

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1} \tag{9.21}$$

manteniendo la notación del Capítulo 1.

Obsérvese que $\mathbf{C}$ no depende de las coordenadas y que $\mathbf{P}$ está determinado por

$$\mathbf{P} = [1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ x^3,\ x^2y,\ xy^2,\ y^3,\ x^3y,\ xy^3]$$

Por consiguiente, según la expresión (9.15), la expresión de la matriz de masa de un elemento de placa de espesor constante t se convierte en

$$\mathbf{M}^e = \rho t \mathbf{C}^{-1^T} \left(\int\int \mathbf{P}^T\mathbf{P}\ dx\ dy\right) \mathbf{C}^{-1} \tag{9.22}$$

Nuevamente vemos que sólo es preciso calcular la integral comprendida entre los paréntesis, lo que no presenta dificultad, y así, efectuando el producto, se puede obtener la matriz completa. Dawe[17] ha dado, sin embargo, una expresión explícita que se reproduce en la Tabla 9.1.

TABLA 9.1
MATRIZ DE MASA DE UN ELEMENTO DE PLACA RECTANGULAR
$\mathbf{M}^e = \mathbf{LML}$

$\mathbf{M}^e = \lambda$

3454											
−461	80										
−461	−63	80									
1226	−274	199	3454								
274	−60	42	461	80							
199	−42	40	461	63	80						
1226	−199	274	394	116	116	3454					
−199	40	−42	−116	−30	−28	−461	80				
−274	42	−60	−116	−28	−30	−461	63	80			
394	−116	116	1226	199	274	1226	−274	−199	3454		
116	−30	28	199	40	42	274	−60	−42	461	80	
−116	28	−30	−274	−42	−60	−199	42	40	−461	−63	80

L se define en la Tabla 1.1 y $\lambda = \dfrac{\rho tab}{6300}$

Se pueden obtener matrices de masa similares para los elementos triangulares estudiados en las Secciones 1.5 y siguientes. Para estos elementos se recomienda usar los métodos de integración numérica, aunque se puede encontrar la forma explícita de las integrales en las referencias 20 y 21.

Láminas. Si se conocen las matrices de masa relativas a los movimientos en "el plano del elemento" y a los movimientos de "flexión", es factible encontrar las matrices de masa referidas a un sistema global de coordenadas. Las reglas de transformación son evidentemente idénticas a las relativas a las fuerzas. El cálculo de las matrices de masa de cada elemento en coordenadas globales, así como el ensamblaje final de las matrices de masa relativas a un nodo, se efectúan mediante operaciones análogas a las realizadas para las matrices de rigidez (véase Capítulo 1 del Volumen 1).

Así pues, los problemas de vibración de láminas no presentan, en principio, dificultades particulares.

Lo mismo podría decirse de una gran variedad de matrices que aparecen en el campo de la dinámica de estructuras. Su integración numérica permite evaluar las matrices de masa (o amortiguamiento) de manera simple y directa mediante los procedimientos que se describen en el Capítulo 7 del Volumen 1.

9.2.4 *"Concentración" o diagonalización de matrices de masa.* Como ya hemos mencionado, el empleo de matrices de masa concentradas (o diagonales) presenta muchas ventajas de tipo numérico. En ocasiones, el proceso de concentración es físicamente obvio (por ejemplo, para el triángulo lineal), pero en otras no lo es, y se precisa un procedimiento "racional" para llevarlo a cabo. Para matrices del tipo de la Ec. (9.15) se han desarrollado varias aproximaciones alternativas, que se han discutido con detalle en el Apéndice 8 del Volumen 1. En todas ellas el requisito esencial es la conservación de la masa, esto es

$$\sum_i \tilde{M}_{ii} = \int_\Omega \rho \, d\Omega \qquad (9.23)$$

donde $\tilde{M}_{ii}$ es la diagonal de la matriz de masa concentrada $\tilde{\mathbf{M}}$.

Existen tres procedimientos principales (ver Figura 9.1):

I. El método de la suma por filas, en el cual

$$\tilde{M}_{ii} = \sum_j M_{ij}$$

II. El escalado diagonal, en el cual

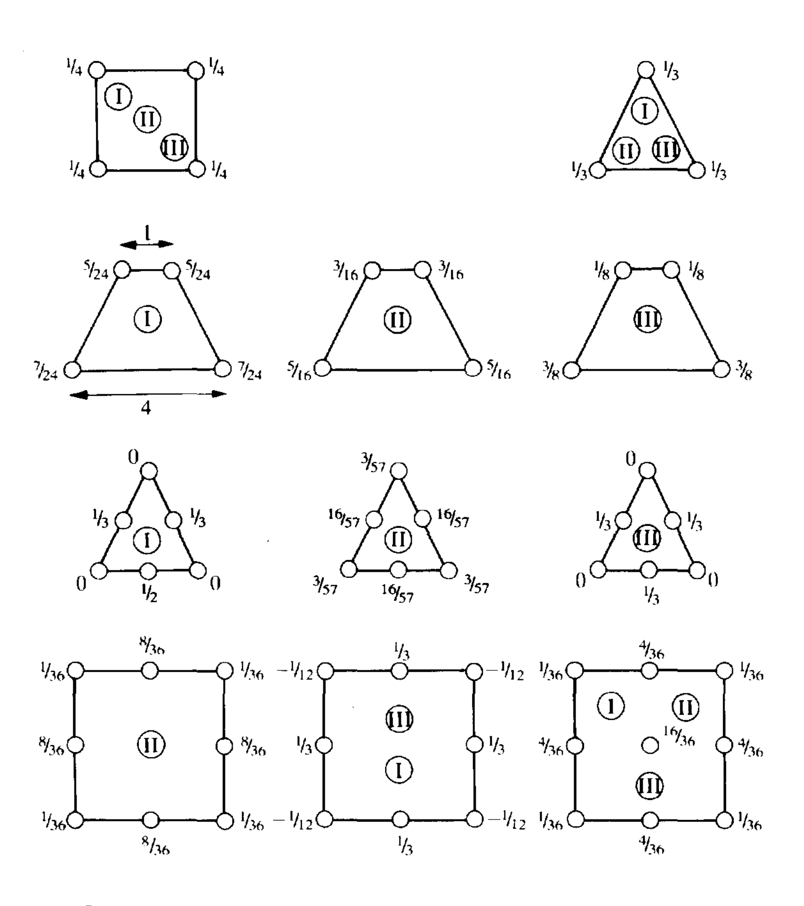
$$\tilde{M}_{ii} = a M_{ii}$$

con a de tal forma que se satisfaga la Ec. (9.23),[23,24] y

III. La evaluación de $\tilde{\mathbf{M}}$ utilizando una cuadratura basada solamente en los puntos nodales y, por tanto, dando automáticamente una matriz diagonal para funciones de forma de elementos finitos estándar,[25,26] en las que $N_i = 0$ para $x = x_j$, $j \neq i$.

Debe notarse que la Ec. (9.23) no se cumple para funciones de forma jerárquicas, para las que no existe un procedimiento satisfactorio de diagonalización.

El procedimiento de cuadratura (integración numérica) es el matemáticamente más atractivo, pero conduce frecuentemente a masas negativas (o nulas). Tal pérdida de positividad es indeseable, e invalida las ventajas de la condensación. En la Figura 9.1 se muestra el efecto de varios procedimientos de condensación en elementos triangulares y cuadriláteros de tipo lineal y cuadrático. Resulta claro que la elección óptima no es, en modo alguno, única.



Ⓘ Procedimiento de suma por filas

Ⓘⅈ Procedimiento de diagonal escalada

Ⓘⅈⅈ Cuadradura nodal

Figura 9.1 Diagonalización de masa para algunos elementos bidimensionales.

En general, recomendamos el uso de matrices condensadas sólo como un artificio numérico de conveniencia, que generalmente se paga con cierta pérdida de precisión. Haremos uso de ellas en algunos problemas de mecánica de fluidos (Capítulos 12 a 15) solamente como un paso iterativo intermedio para llegar a la solución consistente. Sin embargo, se ha demostrado a veces que la condensación puede *mejorar* la precisión de algunos problemas por compensación de errores. Se puede mostrar que

en problemas transitorios el proceso de condensación introduce disipación adicional en forma de *matriz diagonal*, y esto puede ayudar a eliminar las oscilaciones numéricas.

Para demostrar la naturaleza de las matrices de masa condensada y consistente es conveniente considerar un típico problema uni-dimensional gobernado por la ecuación

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = 0$$

La semidiscretización produce una típica ecuación nodal i de la forma

$$(M_{ij} + H_{ij})\dot{a}_j + K_{ij}a_j = 0$$

donde

$$M_{ij} = \int_\Omega N_i N_j \, dx$$
$$H_{ij} = \int_\Omega \frac{dN_i}{dx}\mu\frac{dN_j}{dx}\, dx$$
$$K_{ij} = \int_\Omega \frac{dN_i}{dx}k\frac{dN_j}{dx}\, dx$$

y se observa que H y K tienen idéntica estructura. Con elementos lineales de tamaño h la ecuación aproximada para un típico nodo i (y nodos adyacentes $i-1$ e $i+1$) se puede escribir como sigue (tal como el lector puede fácilmente verificar):

$$M_{ij}\dot{a}_j \equiv h\left(\frac{\dot{a}_{i-1}}{6} + \frac{2\dot{a}_i}{3} + \frac{\dot{a}_{i+1}}{6}\right)$$
$$H_{ij}\dot{a}_j \equiv \frac{\mu}{h}(-\dot{a}_{i-1} + 2\dot{a}_i - \dot{a}_{i+1})$$
$$K_{ij}a_j = \frac{k}{h}(-a_{i-1} + 2a_i - a_{i+1})$$

Si se usa una aproximación condensada para $\mathbf{M}$, esto es $\tilde{\mathbf{M}}$, se tiene sencillamente (sumando coeficientes)

$$\tilde{M}_{ij}\dot{a}_j = h\dot{a}_i$$

La diferencia entre las dos expresiones es

$$\tilde{M}_{ij}\dot{a}_j - M_{ij}\dot{a}_j \equiv \frac{h}{6}(-\dot{a}_{i-1} + 2\dot{a}_i - \dot{a}_{i+1})$$

y es claramente idéntico a lo que se habría obtenido incrementando μ en $h^2/6$. Puesto que en el ejemplo anterior μ puede ser considerada como una disipación viscosa, se observa que el efecto de usar una matriz condensada es el de añadir una cantidad extra de viscosidad y puede resultar en soluciones más suaves (aunque probablemente menos precisas).

VALORES PROPIOS Y MÉTODOS ANALÍTICOS

9.3 Clasificación general

Se ha visto que muchos problemas que dependen del tiempo pueden, con ayuda de la semidiscretización, reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma característica dada por la Ec. (9.13):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{9.24}$$

Todas las matrices de este sistema son generalmente simétricas (aunque en el Capítulo 12 veremos algunos casos en que no lo son). Este sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden puede frecuentemente convertirse en uno de primero si $\mathbf{M} = 0$, como, por ejemplo, en problemas de conducción del calor en régimen transitorio. Discutiremos ahora varios métodos de solución de dichos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En general, las ecuaciones pueden ser no lineales (así ocurre cuando, por ejemplo, las matrices de rigidez son función de propiedades no lineales del material, o si aparecen grandes deformaciones), pero para empezar nos limitaremos sólo a los casos lineales.

En principio, los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales pueden resolverse siempre por métodos analíticos sin necesidad de introducir aproximaciones adicionales; el resto del capítulo estará dedicado a estudiar dichos procedimientos. Pese a que sea posible encontrar la solución, el proceso puede ser tan complicado que haga preciso el empleo de un nuevo recurso que facilite la aproximación; ello se estudiará en el próximo capítulo. Sin embargo, las soluciones analíticas proporcionan una mejor idea del comportamiento del sistema, cuyo conocimiento es siempre muy interesante para el investigador.

Parte de la materia de este capítulo no es más que una extensión de los conocidos procedimientos clásicos empleados en la solución de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes, ya conocidos por la mayoría de los estudiantes de dinámica o matemáticas. En lo que resta del capítulo trataremos sucesivamente de

a) la determinación de la respuesta a la vibración libre ($\mathbf{f} = 0$).
b) la determinación de la respuesta a una excitación periódica [$\mathbf{f}(t)$, función periódica].
c) determinación de la respuesta a una excitación transitoria [$\mathbf{f}(t)$, función cualquiera].

En los dos primeros tipos de problemas, las condiciones iniciales del sistema no son importantes y es fácil encontrar una solución general. El último es el más importante y representa un problema al que dedicaremos atención considerable.

9.4 Respuesta libre. Valores propios de los problemas de segundo orden y vibraciones dinámicas

9.4.1 *Vibración dinámica libre y valores propios reales.* Si no se considera ni el amortiguamiento ni los términos debidos a las fuerzas, el problema dinámico expresado por la Ec. (9.47) se reduce a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{9.25}$$

Escribiendo una solución general de dicha ecuación como

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}\, e^{i\omega t}$$

(cuya parte real representa simplemente una respuesta armónica, ya que $e^{i\omega t} \equiv \cos\omega t + \mathbf{i}\ \mathrm{sen}\ \boldsymbol{\omega t}$) se tiene que al sustituir, el valor de ω puede determinarse de

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \tag{9.26}$$

Este es un problema típico de *valores propios o característicos* y para que existan soluciones distintas a la trivial, el determinante de la ecuación anterior debe ser igual a cero:

$$|-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}| = \mathbf{0} \tag{9.27}$$

Dicho determinante dará en general n valores de ω^2 (o ω_j, $j = 1 - n$) cuando las dimensiones de las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{M}$ sean $n \times n$. Se puede demostrar que si las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{M}$ son definidas positivas —que es el caso corriente en los problemas de estructuras—, todas las raíces de la Ec. (9.27) son números reales positivos (para la demostración, consultar la referencia 1). Dichas raíces se conocen como frecuencias naturales del sistema.

A pesar de que la solución de la Ec. (9.27) no puede determinar los valores reales de $\mathbf{a}$, se pueden encontrar n vectores $\mathbf{a}_j$ que indiquen la influencia de los distintos términos. Dichos vectores se conocen con el nombre de *modos naturales del sistema,* y generalmente se normalizan de manera que

$$\bar{\mathbf{a}}_j^T\mathbf{M}\bar{\mathbf{a}}_j = 1 \tag{9.28}$$

En este punto vale la pena advertir la propiedad de *ortogonalidad modal,* es decir, que

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_j^T\mathbf{M}\bar{\mathbf{a}}_i &\equiv \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{a}}_j^T\mathbf{K}\bar{\mathbf{a}}_i &\equiv \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \quad (i \neq j) \tag{9.29}$$

La demostración de esto es sencilla. Puesto que la Ec. (9.26) es válida para cualquier modo, se puede escribir

$$\omega_i^2 \mathbf{M}\bar{\mathbf{a}}_i = \mathbf{K}\bar{\mathbf{a}}_i$$

$$\omega_j^2 \mathbf{M}\bar{\mathbf{a}}_j = \mathbf{K}\bar{\mathbf{a}}_j$$

multiplicando la primera ecuación por $\bar{\mathbf{a}}_j^T$ y la segunda por $\bar{\mathbf{a}}_i^T$ se obtiene, tras efectuar la sustracción (haciendo uso de la simetría de la matriz **M**, esto es, $\bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{M}\bar{\mathbf{a}}_j \equiv \bar{\mathbf{a}}_j^T \mathbf{M}\bar{\mathbf{a}}_i$)

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{M}\bar{\mathbf{a}}_j = 0$$

y si $\omega_i \neq \omega_j$ queda demostrada la condición de ortogonalidad de la matriz **M**. Siguiendo este mismo razonamiento se deduce inmediatamente la ortogonalidad de la matriz **K**.

9.4.2 *Cálculo de los valores propios.* Para encontrar los valores propios reales es poco práctico escribir el polinomio desarrollando el determinante de la Ec. (9.27) y conviene emplear otros procedimientos. Dejamos la discusión de éstos para los libros especializados; asimismo, hoy en día existen muchos programas estándar de ordenador que pueden usarse como subrutinas para el cálculo de dichos valores propios.

Continuamente aparecen métodos nuevos y extremadamente eficientes que pasan a engrosar el gran número de los ya existentes. La descripción de todos ellos cae fuera del alcance de este libro, pero en caso de que al lector le interese, puede encontrar excelentes tratados sobre el tema en las referencias 27-34.

En muchos procedimientos, el punto de partida es el problema de los *valores propios especiales,* que se expresa como

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{9.30}$$

donde **H** es una matriz simétrica, definida positiva. La Ec. (9.26) se puede escribir como

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\bar{\mathbf{a}} = \lambda \bar{\mathbf{a}} \tag{9.31}$$

tras invertir **K** y haciendo $\lambda = 1/\omega^2$, pero generalmente se pierde la simetría.

Sin embargo, si se escribe en forma triangular

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \qquad \text{y} \qquad \mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

donde **L** es una matriz cuyos términos situados por encima de la diagonal principal son nulos, se tiene, tras multiplicar (9.31) por $\mathbf{L}^T$

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\bar{\mathbf{a}} = \lambda \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{a}}$$

Llamando

$$\mathbf{L}^T \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{x} \tag{9.32}$$

se obtiene finalmente

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{9.33}$$

en la cual

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{L}^{T-1} \tag{9.34}$$

que es similar a la Ec. (9.30), puesto que **H** es ahora simétrica.

Una vez calculado λ (bien todos sus valores o solamente unos pocos seleccionados que correspondan a los períodos fundamentales), se obtienen los modos de **x**, y por la Ec. (9.32) los modos de $\bar{\mathbf{a}}$.

Si la matriz **M** es diagonal —como ocurre cuando las masas se han "concentrado"— el procedimiento para calcular los valores propios se simplifica; ésta es una de las primeras ventajas de dicha diagonalización que ya mencionamos en la Sección 9.2.4.

9.4.3 *Vibración libre con singularidad de la matriz* **K**. En problemas de estática hemos introducido siempre un número adecuado de condiciones *en los apoyos* de manera que se pudiera invertir **K** o, lo que es equivalente, resolver las ecuaciones de la estática de manera única. Si dichas condiciones "en los apoyos" no están de hecho definidas, como bien pudiera ser el caso de un cohete que se desplaza en el espacio, fijando un número arbitrario de grados de libertad se puede obtener una solución estática sin afectar las tensiones. En problemas de dinámica no es posible efectuar tal fijación y frecuentemente nos encontramos con un problema de oscilación libre para el que la matriz **K** es singular y, por tanto, carece de inversa.

Para que puedan seguirse aplicando los métodos generales descritos en la sección anterior, se puede hacer uso de un artificio muy sencillo. La Ec. (9.26) se modifica para dar

$$[(\mathbf{K} + \alpha\mathbf{M}) - (\omega^2 + \alpha)\mathbf{M}]\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \tag{9.35}$$

en la cual α es una constante arbitraria del mismo orden que la frecuencia ω^2 buscada.

Se puede invertir la nueva matriz $(\mathbf{K} + \alpha\mathbf{M})$ y usar el mismo procedimiento general anterior para encontrar $(\omega^2 + \alpha)$.

Esta sencilla pero efectiva manera de sortear las serias dificultades que originaría la singularidad de la matriz **K** fue sugerida por primera vez por Cox[35] y Jennings.[36] En las referencias 37 y 38 se dan otros métodos para tratar el problema anterior.

9.4.4. *Reducción del sistema de valores propios.* Cualquiera que sea la técnica seguida para determinar los valores y modos propios del sistema, el esfuerzo que hay que efectuar en el cálculo para matrices de tamaño $n \times n$ es mucho mayor que el necesario para encontrar la solución del problema equivalente. Además, mientras el número de valores propios del sistema real es infinito, en la práctica estamos generalmente interesados solamente en un número relativamente pequeño de las frecuencias más bajas, y es posible simplificar el cálculo reduciendo el tamaño del problema.

Para reducir las dificultades se supone que se puede expresar la incógnita $\mathbf{a}$ en función de m ($\ll n$) vectores $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_m$ y sus correspondientes factores de participación x_i. Así se escribe

$$\mathbf{a} = \mathbf{t}_1 x_1 + \mathbf{t}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{t}_m x_m = \mathbf{T}\mathbf{x} \tag{9.36}$$

Sustituyendo lo anterior en la Ec.(9.26) y premultiplicando por $\mathbf{T}^T$ se tiene un problema reducido con sólo m vectores propios:

$$(-\omega^2 \mathbf{M}^* + \mathbf{K}^*)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{9.37}$$

donde

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T} \qquad \mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T}$$

Si se tiene la fortuna de escoger vectores propios del problema original como vectores de prueba, entonces el sistema resultaría diagonal y todos los valores propios se podrían calcular de forma trivial. Naturalmente, esto es difícil de conseguir pero es posible encontrar por razonamientos físicos vectores $\mathbf{t}$ cercanos a los modos principales del movimiento.

En los primeros desarrollos de este "económico" procedimiento el vector $\mathbf{x}$ era simplemente una selección de grados de libertad *principales* del vector total $\mathbf{a}$, determinándose los restantes $\mathbf{a}_s$ (*esclavos*) resolviendo las deformaciones de la estructura descargada. Así, se puede escribir

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sx} \\ \mathbf{K}_{sx}^T & \mathbf{K}_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_s \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_s \end{Bmatrix} \tag{9.38}$$

De la ecuación de los nodos descargados se tiene

$$\mathbf{a}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sx}\mathbf{x} \tag{9.39}$$

y

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sx} \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

definiéndose de esta forma la matriz de transformación. Este procedimiento puede ser muy eficiente en algunos problemas, siempre que los grados

de libertad principales se escojan adecuadamente, tal como demostraron Irons,[39,40] Guyan[41] y otros.[42,43] De hecho, en la última de estas referencias se sugiere que se retengan como principales los modos con la relación más baja

$$\frac{K_{ii}}{M_{ii}}$$

Sin embargo, el procedimiento es algo arbitrario y puede llevar en ocasiones a resultados muy pobres.

Una alternativa al proceso anterior es idear m cargas estáticas, $\mathbf{f}_i$, cuyas estructuras deformadas aproximen los posibles modos de vibración. Estas deformadas o vectores de Ritz[44,45] dan los vectores $\mathbf{t}_i$ de la Ec. (9.26), y esto permite una selección eficiente de la matriz de transformación. El procedimiento dista mucho de ser automático y presenta dificultades cuando es necesario retener un gran número de valores propios. Sin embargo, se puede usar directamente una solución iterativa de valores propios para determinar las cargas, $\mathbf{f}_i$, proceso conocido como iteración en subespacio.[46,47] Nos referiremos de nuevo a esto en el capítulo que trata de la programación (Capítulo 16).

9.4.5 *Ejemplos.* Hay una gran variedad de problemas para los cuales existen soluciones prácticas; mostraremos sólo unos pocos ejemplos.

Vibración de placas. La Figura 9.2 ilustra la vibración de una placa en voladizo resuelta sólo con cuatro elementos triangulares. Los resultados se comparan con los laboriosos cálculos efectuados por Barton.[44] Se aprecia que los resultados obtenidos con el sencillo elemento triangular no conforme son en este caso mejores que los que se obtienen con la solución más elaborada y que la precisión de las frecuencias y los modos es muy notable.

En la Figura 9.3 se presenta un problema similar, donde se examinan los efectos del *método económico para calcular los valores propios.* Se puede ver que la variación de los valores de las cuatro primeras frecuencias es casi inapreciable cuando los grados de libertad se reducen por etapas sucesivas de 90 a 6.

Existen tantas publicaciones sobre ejemplos de análisis de vibraciones de placas que no es posible dar aquí una lista completa de referencias.[45,46]

Vibración de láminas. Este mismo proceso se puede aplicar evidentemente a medios elásticos continuos bi o tridimensionales; las vibraciones de láminas son un ejemplo típico que presenta gran interés. Se ha representado en la Figura 9.4 la solución del problema de la vibración del álabe de una turbina;[47,48] al contrario de los sencillos ejemplos anteriores, se han utilizado aquí los elaborados elementos para láminas gruesas descritos en el Capítulo 5.

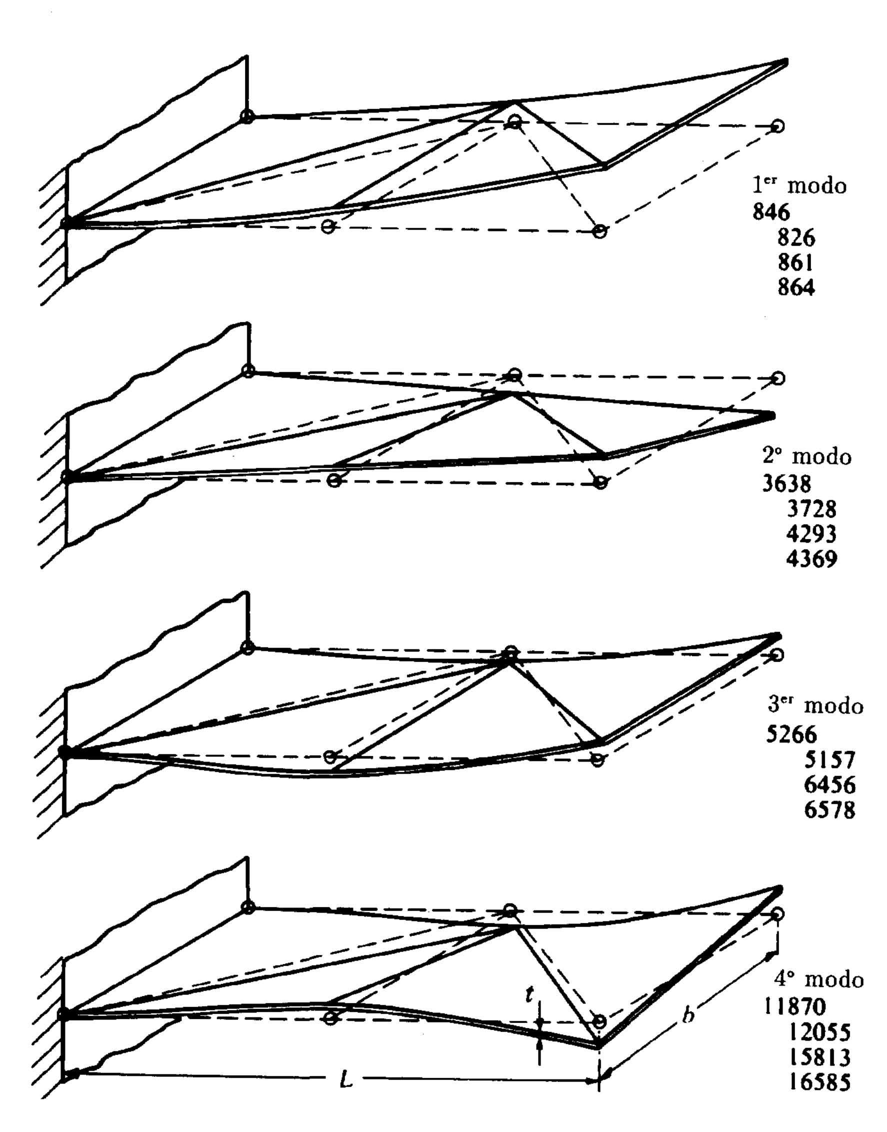


Figura 9.2 Vibración de una placa en voladizo dividida en cuatro elementos triangulares. Formas modales. Datos: $E = 30 \times 10^6$ lb/pulg.^{2}; $t = 0,1$ pulg.; $L = 2$ pulg.; $b = 1$ pulg.; $\nu = 0,3$; densidad $\rho = 0,283$ lb/pulg.^{2} Los números relacionados muestran las frecuencias en ciclos/s.(Hz) para (1) Solución exacta;[44] (2) Triángulo 'no conforme' (Sec. 1.5); (3) Triángulo 'conforme' [Sec. 1.10, Ec. (1.52)]; (4) Triángulo conforme. Función correctora.

Placa sin eliminación

Número de grados de libertad = 90

Modo	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3.469
2	8.535
3	21.450
4	27.059

Eliminados los nodos sin círculo

Número de desplazamientos "principales" = 54

Modo	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3.470
2	8.540
3	21.559
4	27.215

Eliminados todos los grados de libertad, excepto los desplazamientos laterales en los nodos con círculo

NMD = 18

Modo	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3.470
2	8.543
3	21.645
4	27.296

Eliminados todos los grados de libertad, excepto los desplazamientos laterales en los nodos con círculo

NMD = 6

Modo	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3.473
2	8.604
3	22.690
4	29.490

Figura 9.3 Empleo de la eliminación de valores propios en la vibración de una placa cuadrada en voladizo (a: tamaño de la placa; t: espesor).

En las referencias 49-52 se pueden encontrar otros ejemplos de estudios dinámicos de láminas. La referencia 20 presenta igualmente una aplicación donde se han utilizado elementos isoparamétricos completamente tridimensionales.

La ecuación de las "ondas". Problemas de electromagnetismo y de fluidos. Está claro que se puede llegar a la ecuación fundamental de la dinámica (9.8) a partir de un gran número de problemas que nada tengan que ver con las estructuras. Los problemas de valores propios se presentan de nuevo haciendo intervenir matrices de "rigidez" y de "masa", teniendo en este caso un significado físico distinto.

Una forma particular de las ecuaciones generales que hemos estudiado

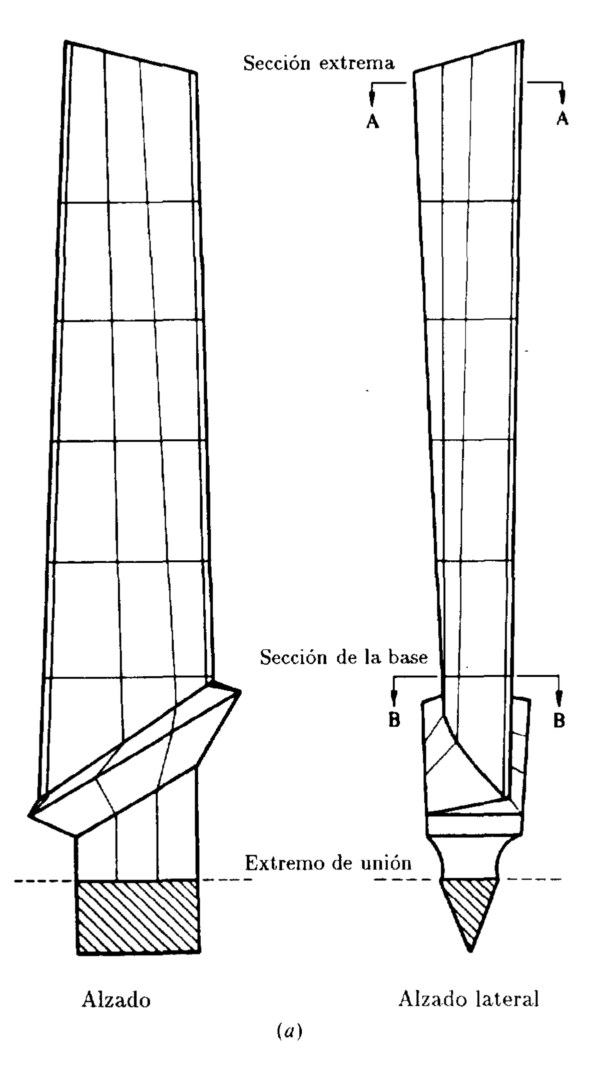


Figura 9.4 Vibración de un álabe de turbina tratado como lámina gruesa. (*a*) subdivisión en elementos (tipo parabólico), (*b*) formas modales y comparación de las frecuencias con valores experimentales.

presenta gran interés y es la conocida ecuación de las ondas, o de Helmholz, que en su forma bidimensional se escribe como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{\bar{c}^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \tag{9.40}$$

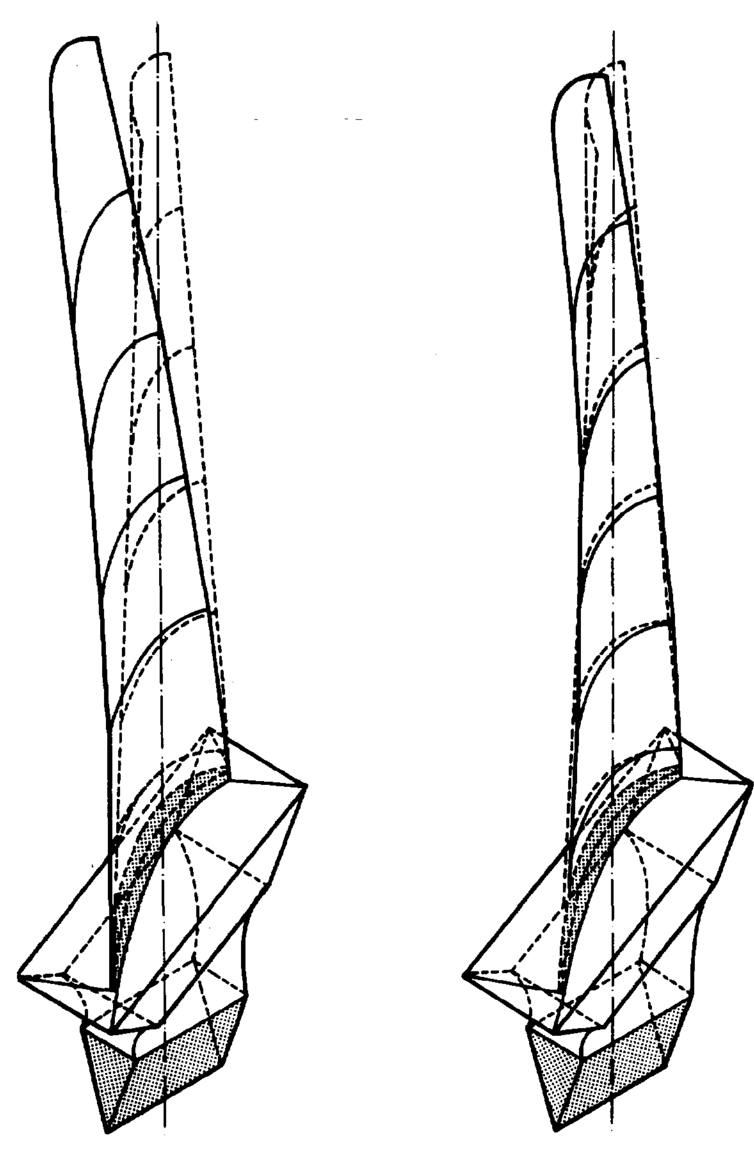


Figura 9.4 (*b*) (*continuación*).

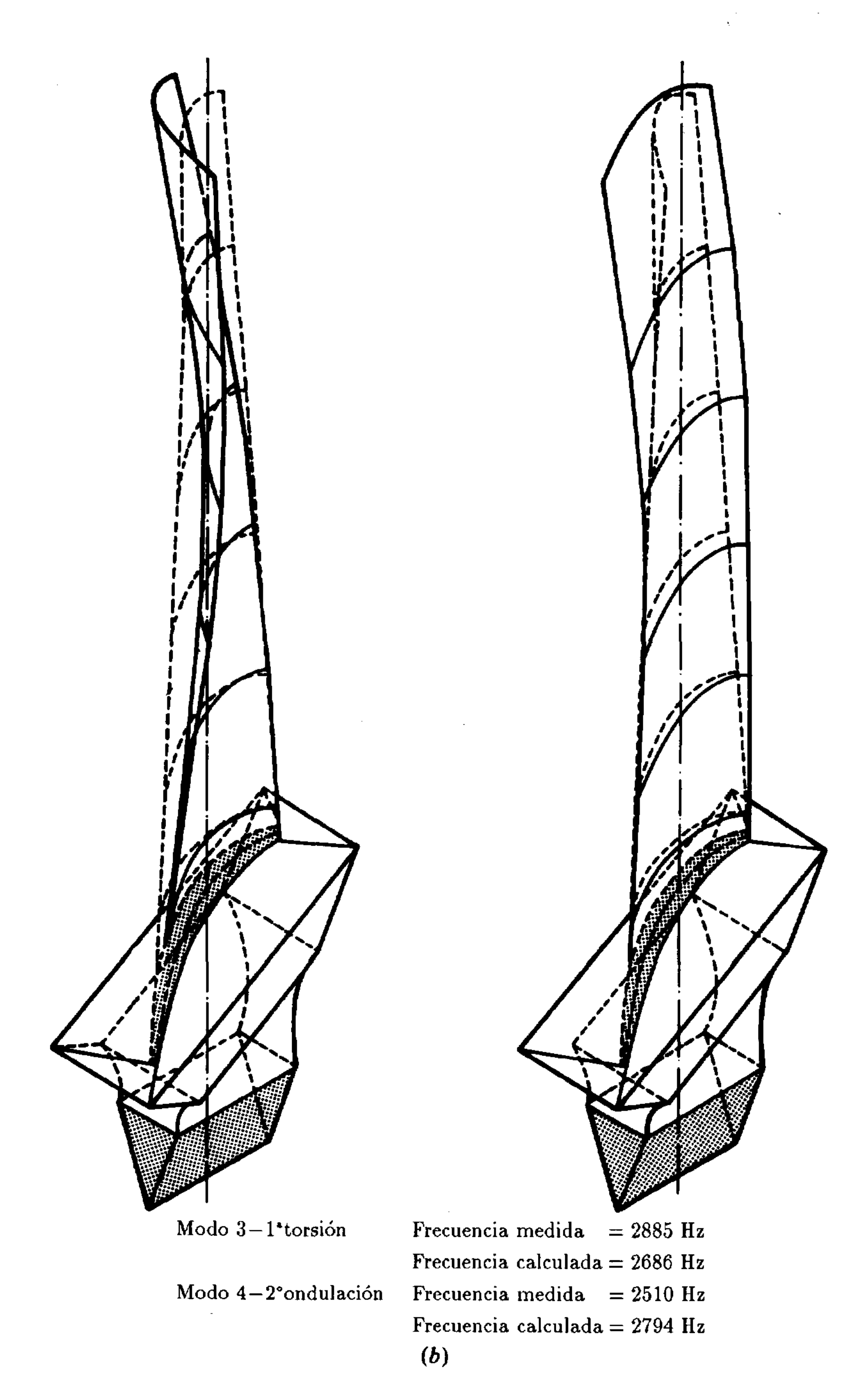


Figura 9.4 (*b*) (*continuación*).

Si las condiciones de contorno no obligan a una respuesta forzada, se vuelve a encontrar un problema de valores propios que en muchos campos de la Física tiene gran importancia.

La primera aplicación se refiere a los campos *electromagnéticos*.[53] La Figura 9.5 representa la forma modal de un campo en el caso de un problema de *guías de ondas*. Para resolver este problema se han utilizado los elementos triangulares más sencillos. En la referencia 69 se encuentran ejemplos de oscilaciones tridimensionales más complicadas.

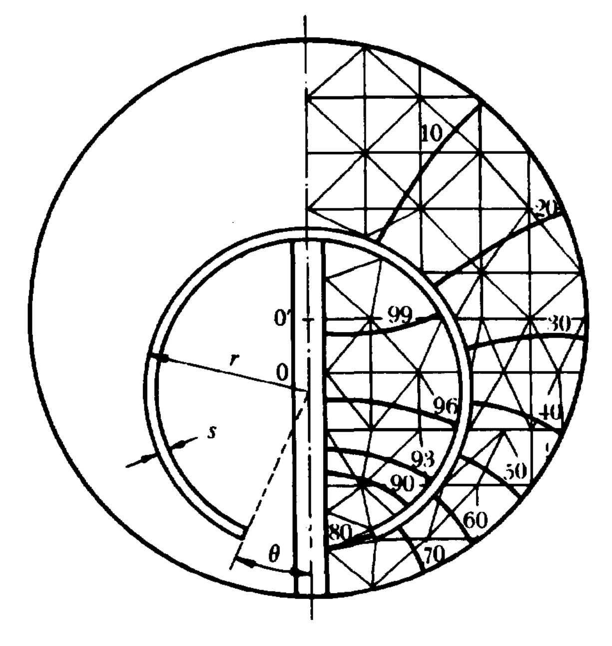


Figura 9.5 Plataforma "lunar" para guía de ondas;[53] modo de vibración para un campo electromagnético. Diámetro exterior $= d$, $00' = 1,3d$; $r = 0,29d$; $S = 0,055d$; $\theta = 22^{\circ}$.

Se puede aproximar bastante bien el comportamiento de las ondas superficiales en una masa de agua mediante una ecuación análoga

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{9.41}$$

donde h es la profundidad media del agua, ψ la elevación de la superficie por encima de la cota media y g la aceleración de la gravedad.

Así se pueden deducir con facilidad las frecuencias propias de masas de agua contenidas en puertos de profundidad variable.[10] La Figura 9.6 muestra la forma modal para un puerto particular.

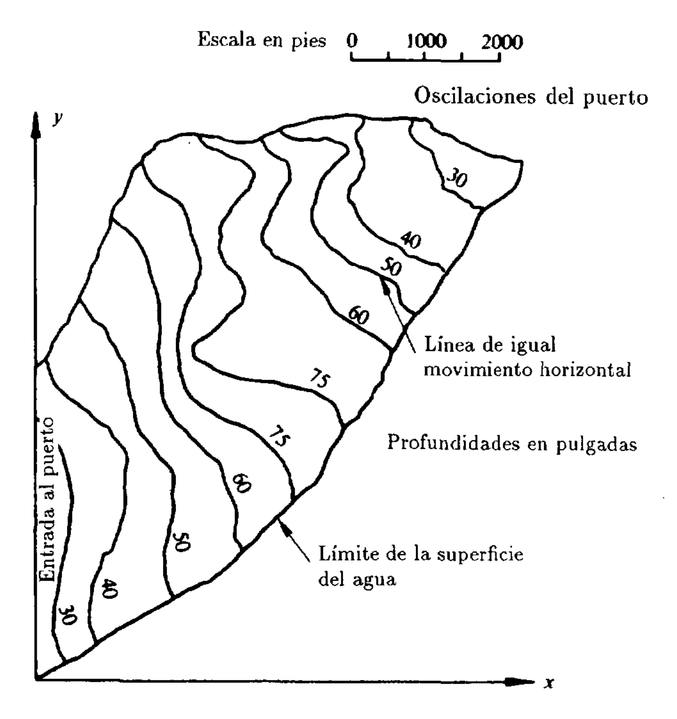


Figura 9.6 Vibraciones en un puerto natural: líneas de amplitud de las velocidades.[10]

9.5 Respuesta libre. Valores propios para problemas de primer orden y conducción del calor, etc.

Si en la Ec. (9.24) $\mathbf{M} = 0$, se obtiene una forma típica de la transmisión del calor por conducción en régimen transitorio (ver Ec (9.1)). Para obtener la respuesta libre hay que resolver la ecuación homogénea

$$\mathbf{C}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{9.42}$$

De nuevo podemos emplear una expresión exponencial:

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}e^{\omega t}$$

Tras sustituir, se tiene

$$(-\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \tag{9.43}$$

que vuelve a darnos un problema de valores propios idénticos al de la Ec. (9.26). Como $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ normalmente son definidas positivas, ω será positivo y real. Por tanto, la solución representa simplemente una exponencial decreciente y en realidad el régimen no es estacionario. La combinación de dichos términos exponenciales, sin embargo, puede ser útil para encontrar la solución de problemas en régimen transitorio de valores iniciales, pero en sí tiene poco valor.

9.6 Valores propios dinámicos amortiguados

Considerando la totalidad de la Ec. (9.24) para las condiciones de respuesta libre, se puede escribir

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{9.44}$$

y sustituyendo

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}e^{\alpha t} \tag{9.45}$$

se obtiene la ecuación característica

$$(\alpha^2\mathbf{M} + \alpha\mathbf{C} + \mathbf{K})\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \tag{9.46}$$

donde α y $\bar{\mathbf{a}}$ serán en general números complejos. La parte real de la solución representa una vibración de amplitud decreciente.

La expresión (9.45) representa un problema de valores propios más complicado que el encontrado en la sección anterior. Afortunadamente, pocas veces es necesaria una solución explícita del mismo. El concepto de valor propio tal como se expresa en la Ec. (9.46) es muy importante en análisis modal, como veremos más adelante.

9.7 Respuesta periódica forzada

Si en la Ec. (9.24) la excitación es periódica o, lo que es más general, si se puede expresar como

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}e^{\alpha t} \tag{9.47}$$

donde α es un número complejo, es decir

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \tag{9.48}$$

podrá escribirse nuevamente una solución general de la forma

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}e^{\alpha t} \tag{9.49}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (9.24), se obtiene

$$(\alpha^2\mathbf{M}+\alpha\mathbf{C}+\mathbf{K})\bar{\mathbf{a}} \;\equiv\; \mathbf{D}\bar{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{f}} \tag{9.50}$$

que ya no es un problema de valores propios, pero que puede resolverse invirtiendo la matriz $\mathbf{D}$; es decir, formalmente

$$\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{f}} \tag{9.51}$$

La solución tiene así precisamente la misma forma que en problemas de estática pero ahora, sin embargo, ha de calcularse en función de cantidades complejas. Existen programas que operan con números complejos, pero es posible efectuar los cálculos directamente advirtiendo que

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} &= e^{\alpha_1 t}(\cos\alpha_2 t + i \text{ sen } \alpha_2 t)\\ \bar{\mathbf{f}} &= \bar{\mathbf{f}}_1 + i\bar{\mathbf{f}}_2\\ \bar{\mathbf{a}} &= \bar{\mathbf{a}}_1 + i\bar{\mathbf{a}}_2 \end{aligned} \tag{9.52}$$

en la cual α_1, α_2, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\bar{\mathbf{a}}_1$ y $\bar{\mathbf{a}}_2$ son cantidades reales. Introduciendo las expresiones anteriores en la Ec. (9.50) e igualando las partes real e imaginaria se obtiene un sistema de ecuaciones que puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1^2-\alpha_2^2)\mathbf{M}+\alpha_1\mathbf{C}+\mathbf{K}, & -2\alpha_1\alpha_2\mathbf{M}-\alpha_2\mathbf{C}\\ 2\alpha_1\alpha_2\mathbf{M}+\alpha_2\mathbf{C}, & (\alpha_1^2-\alpha_2^2)\mathbf{M}+\alpha_1\mathbf{C}+\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1\\ \bar{\mathbf{a}}_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_1\\ \bar{\mathbf{f}}_2 \end{Bmatrix} \tag{9.53}$$

Las Ecs. (9.53) constituyen un sistema en el cual todas las cantidades son reales y del que puede obtenerse directamente la respuesta a cualquier excitación periódica. El sistema de ecuaciones ya no es definido positivo, aunque sigue siendo simétrico.

En problemas en los que la excitación es periódica, la solución, una vez transcurrido un cierto intervalo de tiempo, no depende de las condiciones iniciales y una vez "calculada" representa la respuesta estabilizada final. Esto es válido para problemas en los que se analiza la respuesta dinámica de estructuras, así como para los típicos problemas de transmisión del calor por conducción en los que basta con hacer $\mathbf{M} = 0$.

9.8 Métodos analíticos para obtener la respuesta transitoria

9.8.1 *Generalidades.* En las secciones anteriores hemos buscado solamente la solución general de problemas en régimen estacionario sin tener en cuenta las condiciones iniciales del sistema o excitaciones que no fueran

periódicas. Es fundamental obtener la respuesta de sistemas tomando en consideración estas características; no tenemos más que considerar, por ejemplo, la necesidad de conocer el comportamiento de estructuras sometidas a la acción de un terremoto, o el estudio de la transmisión del calor por conducción en régimen transitorio. La solución de dichos casos generales requiere, bien una discretización en el tiempo completa, que estudiaremos en el capítulo siguiente, o el empleo de procedimientos analíticos especiales. Para ello existen dos posibilidades:

a) el método de la respuesta en frecuencias.
b) el método del análisis modal.

Vamos a describirlos brevemente.

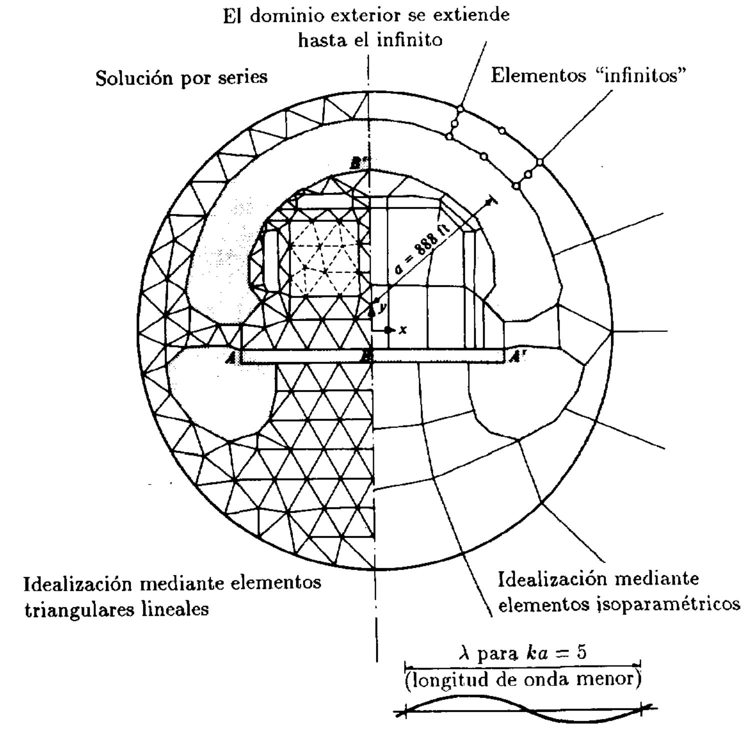
9.8.2 *Método de la respuesta en frecuencias.* En la Sección 9.7 se ha mostrado que la respuesta del sistema sometido a una excitación periódica general, o en particular a una función de excitación periódica

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}e^{i\omega t} \tag{9.54}$$

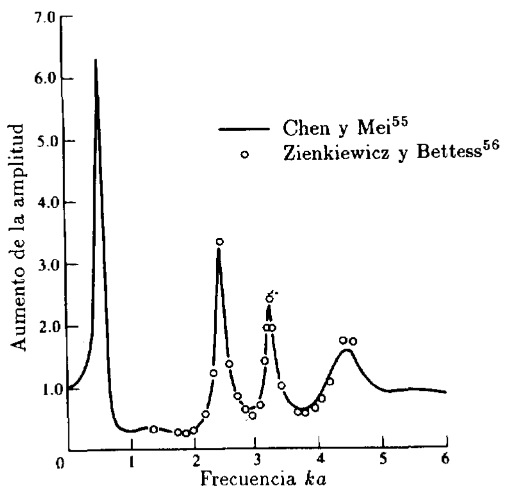
puede obtenerse resolviendo un simple sistema de ecuaciones. Como cualquier función de excitación puede representarse aproximadamente por series de Fourier o, en el límite, exactamente por una integral de Fourier, se puede obtener la respuesta a dicha excitación mediante combinación de la respuesta de la cantidad en que estemos interesados, por ejemplo, el desplazamiento de un punto, para todas las frecuencias desde cero hasta infinito. De hecho, sólo es necesario considerar un número limitado de dichas frecuencias de excitación y los resultados pueden superponerse eficientemente haciendo uso de las transformaciones de Fourier.[54] No se discutirán los detalles matemáticos de dichos métodos que pueden encontrarse en los libros clásicos de dinámica.[15]

La técnica de la respuesta en frecuencias se adapta fácilmente a problemas en los cuales la matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}$ está definida de manera arbitraria. No ocurre así con los métodos más extensamente usados de análisis modal que se describirán en la sección siguiente.

A título de ejemplo se muestra en la Figura 9.7 la respuesta en frecuencias de un puerto artificial [véase Ec. (9.41)] a una excitación oscilatoria de diferentes frecuencias y con amortiguamiento debido a la radiación de las olas que se reflejan, lo que impone una forma muy particular de matriz de amortiguamiento. Detalles sobre este tema pueden encontrarse en numerosas referencias[55,56] (ver, también, Capítulo 15). Frecuentemente se usan técnicas similares para analizar la respuesta de las cimentaciones de estructuras donde se produzca una radiación energética.[57]



(a) Detalles de la geometría e idealización en EF
Frecuencia de la ola $w = k\sqrt{gh} = ka$, h = profundidad del agua



(b) Aumento de la amplitud de la profundidad media en el puerto para varias frecuencias

Figura 9.7 Respuesta en frecuencias de un puerto artificial ante olas periódicas.

9.8.3 *Análisis por descomposición modal.* Este procedimiento es probablemente el más importante y empleado en la práctica. Además, proporciona una visión más clara del comportamiento del sistema completo, que tiene gran importancia cuando se siguen procedimientos exclusivamente numéricos; así pues, se describirá con detalle con relación al problema general expresado en la Ec. (9.24), o sea

$$\mathbf{M\ddot{a}} + \mathbf{C\dot{a}} + \mathbf{Ka} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{9.55}$$

donde $\mathbf{f}$ es una función del tiempo arbitraria.

Sabemos que la solución general del sistema para la respuesta libre es de la forma

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}e^{\alpha t} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathbf{a}}_i e^{\alpha_i t} \tag{9.56}$$

donde α_i son los valores propios y $\bar{\mathbf{a}}_i$ los vectores (modos) propios (Sección 9.7). Para la respuesta forzada se supondrá que la solución puede escribirse como combinación lineal de modos propios mediante

$$\mathbf{a} = \sum \bar{\mathbf{a}}_i y_i = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots]\mathbf{y} \tag{9.57}$$

donde la contribución de cada modo se expresa por un escalar $y_i(t)$ función del tiempo. Esto demuestra de manera clara la proporción en que interviene cada modo. Dicha descomposición en un vector arbitrario no presenta ninguna restricción, ya que todos los modos son vectores linealmente independientes (excepto para frecuencias repetidas).

Sustituyendo la expresión (9.57) en la Ec. (9.55) y multiplicando la ecuación resultante por $\bar{\mathbf{a}}_i^T (i = 1 - n)$, el resultado será simplemente un sistema de ecuaciones escalares independientes

$$m_i\ddot{y}_i + c_i\dot{y}_i + k_i y_i + f_i = 0 \tag{9.58}$$

donde

$$\begin{aligned} m_i &= \bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{a}}_i = 1 \text{ (si los modos están normalizados)} \\ c_i &= \bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{a}}_i \\ k_i &= \bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{a}}_i \\ f_i &= \bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{f} \end{aligned} \tag{9.59}$$

ya que para los vectores propios $\bar{\mathbf{a}}_i$ se cumple que

$$\bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{a}}_j = \bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{a}}_j = \bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{a}}_j = 0 \tag{9.60}$$

cuando

$$i \neq j$$

(Este resultado se demostró en la Sección 9.4 para valores propios reales, pero es generalmente válido para valores y vectores propios complejos, como puede comprobar el lector.)

Cada ecuación escalar (9.58) puede resolverse independientemente siguiendo procedimientos elementales y obtener el vector de la respuesta total mediante superposición empleando la expresión (9.57). En el caso general, como se ha demostrado en la Sección 9.6, los valores y vectores propios son complejos y su obtención no es sencilla.[37] El procedimiento más corriente es emplear valores propios reales que correspondan a la solución de la ecuación (9.25)

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \tag{9.61}$$

Repitiendo el proceso descrito entre las expresiones (9.57) a (9.60), se obtiene un sistema de ecuaciones desacopladas con variables reales $\mathbf{y}$ a condición de que

$$\bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{C} \mathbf{a}_j = 0 \tag{9.62}$$

lo que generalmente no se cumple, ya que los vectores propios sólo garantizan en este caso la ortogonalidad de $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$, y no la de la matriz de amortiguamiento. Sin embargo, si la matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}$ es de la forma (9.16), es decir, una combinación lineal de $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ es evidente que se dará dicha ortogonalidad. A menos que el amortiguamiento tenga una expresión definida que precise un tratamiento especial, se supone que se satisface la ortogonalidad y la Ec. (9.58) se toma como válida en función de dichos vectores propios.

De la Ec. (9.61) se tiene

$$\omega_i^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{a}}_i = \mathbf{K} \bar{\mathbf{a}}_i \tag{9.63}$$

y multiplicando previamente por $\bar{\mathbf{a}}_i^T$ se obtiene

$$\omega_i^2 m_i = k_i \tag{9.64}$$

Escribiendo

$$c_i = 2\omega_i c_i' \tag{9.65}$$

(donde c_i' representa el cociente entre el amortiguamiento y su valor crítico) y suponiendo que los modos se hayan normalizado de manera que $m_i = 1$

(véase Ec. (9.28)), se podrá volver a escribir la Ec. (9.58) bajo una forma general de segundo orden:

$$\ddot{y}_i + 2\omega_i c_i' \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i + f_i = 0 \tag{9.66}$$

La solución general puede obtenerse escribiendo

$$y_i = \int_0^t f_i e^{-c_i' \omega_i (t-\tau)} \operatorname{sen} \omega_i (t-\tau)\, d\tau \tag{9.67}$$

Esta integración puede efectuarse numéricamente y obtener la respuesta. En principio, mediante superposición se puede obtener la solución transitoria completa. En la práctica, generalmente sólo se efectúa un único cálculo para cada modo para determinar las respuestas máximas, procediendo después a superponer adecuadamente los resultados. Estos procedimientos se encuentran perfectamente detallados en los libros clásicos, y se usan como métodos generales para estudiar el comportamiento de estructuras sometidas a efectos sísmicos.[15,27]

Para un sistema de ecuaciones de primer orden como el que rige la transmisión del calor por conducción

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

se pueden emplear procedimientos exactamente análogos. Usando los valores propios reales calculados en la Sección 9.5 se procede a la descomposición del sistema en ecuaciones escalares, para obtener finalmente un sistema de ecuaciones desacopladas

$$c_i \dot{y}_i + k_i y_i + f_i = 0 \tag{9.68}$$

del que se puede calcular analíticamente la solución.[58] Dejamos los detalles de dicha solución como ejercicio para el lector.

9.8.4 *Amortiguamiento y participación de los modos.* El tipo de cálculo implicado en la descomposición modal necesita aparentemente determinar todos los modos y valores propios, tarea de gran magnitud. De hecho, sólo es preciso tomar en consideración un número de modos limitado, ya que la respuesta a las frecuencias más altas está críticamente amortiguada y carece de importancia.

Para demostrar la veracidad de esto es necesario considerar la forma de las matrices de amortiguamiento. En la Sección 9.2 [Ec. (9.16)] se indicó que la matriz de amortiguamiento se toma generalmente como

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \tag{9.69}$$

Una expresión de este tipo es realmente necesaria para su empleo en la descomposición modal, aunque pueden emplearse otras muchas.[59,60] Vemos de la definición de c_i', el amortiguamiento crítico [ver Ec. (9.61)], que éste puede ahora escribirse como

$$c_i' = \frac{1}{2\omega_i}\bar{\mathbf{a}}_i^T(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K})\bar{\mathbf{a}}_i = \frac{1}{2\omega_i}(\alpha + \beta\omega_i^2) \qquad (9.70)$$

Así, si la importancia del coeficiente β es grande, como ocurre en la mayoría de los problemas de amortiguamiento de estructuras, c_i' aumenta con ω_i y para frecuencias altas nos encontramos con una situación de sobreamortiguamiento. Y ello es una suerte ya que, en general, existe un número infinito de frecuencias altas que no pueden modelarse mediante ninguna discretización por elementos finitos.

En el próximo capítulo veremos que en el método de cálculo paso a paso, el problema está generalmente controlado por las frecuencias altas, y este efecto necesita ser depurado para que los resultados representen la realidad.

9.10 Simetría y repetibilidad

Al finalizar este capítulo será útil resaltar que en el cálculo de problemas dinámicos hemos encontrado de nuevo todos los principios generales de ensamblaje, etc., aplicados en problemas de estática. Sin embargo, es preciso corregir algunos de los aspectos de simetría y repetibilidad utilizados previamente (véase Capítulo 8 del Volumen 1). Obviamente, es posible para una estructura simétrica vibrar, por ejemplo, de manera no simétrica, y similarmente una estructura en la que se repiten ciertas partes, contiene modos irrepetibles por sí mismos. No obstante, incluso en tales casos, pueden hacerse simplificaciones considerables y en las referencias 61-63 se ofrecen detalles del tema.

Referencias

1. S. CRANDALL, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1956.
2. H.S. CARSLAW y J.C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, 2ª ed., Clarendon Press, Oxford, 1959.
3. W. VISSER, "A finite element method for the determination of non-stationary temperature distribution and thermal deformation", en *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965.
4. O.C. ZIENKIEWICZ y Y.K. CHEUNG, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, 1ª ed., McGraw-Hill, New York, 1967.

5. E.L. WILSON y R.E. NICKELL, "Application of finite element method to heat conduction analysis", *Nucl. Eng. Des.*, **4**, 1–11, 1966.
6. O.C.ZIENKIEWICZ y C.J. PAREKH, "Transient field problems-two and three dimensional analysis by isoparametric finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2**, 61–71, 1970.
7. K. TERZHAGI y R.B. PECK, *Soil Mechanics in Enginering Practice*, Wiley, New York, 1948.
8. D.K. TODD, *Ground Water Hydrology*, Wiley, New York, 1959.
9. P.L. ARLETT, A.K. BAHRANI y O.C. ZIENKIEWICZ, "Application of finite elements to the solution of Helmholz's equation", *Proc. IEE*, **115**, 1962–6, 1968.
10. C. TAYLOR, B.S. PATIL y O.C. ZIENKIEWICZ, "Harbour oscillation: a numerical treatment for undamped natural modes", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **43**, 141–56, 1969.
11. O.C. ZIENKIEWICZ y R.E. NEWTON, "Coupled vibrations in a structure submerged in a compressible fluid", *Int. Symp. on Finite Element Techniques*, Stuttgart, 1968.
12. J.S. ARCHER, "Consistent mass matrix for distributed systems", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **89**, ST4, 161, 1963.
13. F.A. LECKIE y G.M. LINDBERG, "The effect of lumped parameters on beam frequencies", *Aero Quart.*, **14**, 234, 1963.
14. O.C. ZIENKIEWICZ y Y.K. CHEUNG, "The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **28**, 471–88, 1964.
15. R.W. CLOUGH y J. PENZIEN, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1975.
16. O.C. ZIENKIEWICZ, B.M. IRONS y B. NATH, "Natural frequencies of complex free or submerged structures by the finite element method", en *Symp. on Vibration in Civil Engineering, London, Abril 1965*, Butterworth, 1966.
17. D.J. DAWE, "A finite element approach to plate vibration problems", *J. Mech. Eng. Sci.*, **7**, 28, 1965.
18. R.J. GUYAN, "Distributed mass matrix for plate elements in bending", *J.A.I.A.A.*, **3**, 567, 1965.
19. G.P. BAZELEY, Y.K. CHEUNG, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Triangular elements in plate bending-conforming and non-conforming solutions", en *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965.
20. R.G. ANDERSON, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Vibration and stability of plates using finite elements", *Int. J. Solids Struct.*, **4**, 1031–55, 1968.

21. R.G. ANDERSON, "The application of the non-conforming triangular plate bending element to plate vibration problems", M.Sc. thesis, Univ. of Wales. Swansea, 1966.
22. R.W. CLOUGH, "Analysis of structure vibrations and response", *Recent Advances in Matrix Method of Structure Analysis and Design* (eds R.H. Gallagher, Y. Yamada y J.T. Oden), pp. 25–45, 1^er^ US-Japan Seminar, Alabama Press, 1971.
23. S.W. KEY y Z.E. BEISINGER, "The transient dynamic analysis of thin shells in the finite element method", *Proc. 3rd Conf. on Matrix Methods and Structural Mechanics*, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1971.
24. E. HINTON, A. ROCK y O.C. ZIENKIEWICZ, "A note on mass lumping and related process in the finite element method", *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dynam.*, **4**, 245–9, 1976.
25. P. TONG, T.H.H. PIAN y L.L. BOCIOVELLI, "Mode shapes and frequencies by the finite element method using consistent and lump matrices", *J. Comp. Struct.*, **1**, 623–38, 1971.
26. I. FRIED y D.S. MALKUS, "Finite element mass matrix lumping by numerical integration with the convergence rate loss", *Int. J. Solids Struct.*, **11**, 461–5, 1975.
27. K.J. BATHE y E.L. WILSON, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.
28. J.H. WILKINSON, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.
29. I. FRIED, "Gradient methods for finite element eigen problems", *J.A.I.A.A.*, 739–41, 1969.
30. O. RENFIELD, "Higher vibration modes by matrix iteration", *J.A.I.A.A.*, **9**, 505–741, 1971.
31. K.J. BATHE y E.L. WILSON, "Large eigenvalue problems in dynamic analysis", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **98**, EM6, 1471–85, 1972.
32. K.J. BATHE y E.L. WILSON, "Solution methods for eigenvalue problems in structural dynamics", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **6**, 213–26, 1973.
33. A JENNINGS, "Mass condensation and similarity iterations for vibration problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **6**, 543–52, 1973.
34. K.K. GUPTA, "Solution of eigenvalue problems by Sturm sequence method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **4**, 379–404, 1972.
35. H.L. COX, "Vibration of missiles", *Aircraft Eng.*, **33**, 2–7 y 48–55, 1961.
36. A. JENNINGS, "Natural vibration of a free structure", *Aircraft Eng.*, **34**, 8, 1962.
37. W.C. HURTY y M.F. RUBINSTEIN, *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

38. A. CRAIG y M.C.C. BAMPTON, "On the iterative solution of semi definite eigenvalue problems", *Aero. J.*, **75**, 287–90, 1971.
39. B.M. IRONS, "Eigenvalue economisers in vibration problems", *J. Roy. Aero. Soc.*, **67**, 526, 1963.
40. B.M. IRONS, "Structural eigenvalue problems: elimination of unwanted variables", *J.A.I.A.A.*, **3**, 961, 1965.
41. R.J. GUYAN, "Reduction of stiffness and mass matrices", *J.A.I.A.A.*, **3**, 380, 1965.
42. J.N. RAMSDEN y J.R. STOKER, "Mass condensation; a semi-automatic method for reducing the size of vibration problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 333–49, 1969.
43. R.D. HENSHELL y J.H. ONG, "Automatic masters for eigenvalue economisation", *Int. J. Earthquake Struct. Dynamic*, **3**, 375–83, 1975.
44. M.V. BARTON, "Vibration of rectangular and skew cantilever plates", *J. Appl. Mech.*, **18**, 129–34, 1951.
45. G.B. WARBURTON, "Recent advances in structural dynamics", *Symp. on Dynamic Analysis of Structures*, NEL, East Kilbride, Scotland, Octubre 1975.
46. J.C. MacBAIN, "Vibratory behaviour of twisted cantilever plates", *J. Aircraft*, **12**, 357–9, 1975.
47. S. AHMAD, R.G. ANDERSON y O.C. ZIENKIEWICZ, "Vibration of thick, curved, shells with particular reference to turbine blades", *J. Strain Analysis*, **5**, 200–6, 1970.
48. M.A.J. BOSSAK y O.C. ZIENKIEWICZ, "Free vibration of initially stressed solids with particular reference to centrifugal force effects in rotating machinery", *J. Strain Analysis*, **8**, 245–52, 1973.
49. J.S. ARCHER y C.P. RUBIN, "Improved linear axi-symmetric shell-fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis", *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965.
50. J.H. ARGYRIS, "Continua and discontinua", *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1965.
51. S. KLEIN y R.J. SYLVESTER, "The linear elastic dynamic analysis of shells of revolution by the matrix displacement method", *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1965.
52. R. DUNGAR, R.T. SEVERN y P.R. TAYLOR, "Vibration of plate and shell structures using triangular finite elements", *J. Strain Analysis*, **2**, 73–83, 1967.
53. R.L. ARLETT, A.K. BAHRANI y O.C. ZIENKIEWICZ, "Applica-

tion of finite elements to the solution of Helmholtz's equation", *Proc. IEE*, **115**, 1762–64, 1968.
54. E.O. BRIGHAM, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.
55. H.S. CHEN y C.C. MEI, "Hybrid-element method for water waves", *Proc. Modelling Techniques Conf. (Modelling 1975)*, Vol. 1, pp. 63–81, San Francisco, 1975.
56. O.C. ZIENKIEWICZ y P. BETTESS, "Infinite elements in the study of fluid structure interaction problems", *2nd Int. Symp. on Computing Methods in Applied Science and Engineering*, Versailles, France, Diciembre 1975.
57. J. PENZIEN, "Frequency domain analysis including radiation damping and water load coupling", *Numerical Methods in Offshore Engineering*, (eds O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis y K.G. Stagg), Wiley, 1977.
58. R.H. GALLAGHER y R.H. MALLET, *Efficient Solution Process for Finite Element Analysis of Transient Heat Conduction*, Bell Aero Systems, Buffalo, N.Y., 1969.
59. E.L. WILSON y J. PENZIEN, "Evaluation of orthogonal damping matrices", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **4**, 5–10, 1972.
60. H.T. THOMSON, T. COLKINS y P. CARAVANI, "A numerical study of damping", *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dynam.*, **3**, 97–103, 1974.
61. F.W. WILLIAMS, "Natural frequencies of repetitive structures", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **24**, 285–310, 1971.
62. D.A. EVENSEN, "Vibration analysis of multi-symmetric structures", *J.A.I.A.A.*, **14**, 446–53, 1976.
63. D.L. THOMAS, "Standing waves in rotationally periodic structures", *J. Sound Vibr.*, **37**, 288–90, 1974.

Capítulo 10

EL TIEMPO COMO VARIABLE. APROXIMACIÓN DISCRETA EN EL TIEMPO

10.1 Introducción

Hemos visto en el capítulo precedente que la semidiscretización de problemas dinámicos, o de campo en régimen transitorio, conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{10.1}$$

en los casos de problemas dinámicos, o

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \qquad \text{donde} \qquad \frac{d}{dt}a \equiv \dot{a}, \qquad \text{etc.} \tag{10.2}$$

en los problemas de transmisión del calor y similares.

En muchas situaciones prácticas existen no linealidades, alterando típicamente las ecuaciones anteriores para hacer

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{a}) \qquad \mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{a}) \qquad \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{P}(\mathbf{a}) \tag{10.3}$$

Las soluciones analíticas discutidas previamente, aunque proporcionan mucha percepción del comportamiento general (y son indispensables para establecer algunas propiedades tales como las frecuencias naturales del sistema), no son en general económicas para la solución de problemas transitorios en casos lineales y no son aplicables cuando existen no linealidades. En este capítulo nos referiremos por lo tanto a procesos de discretización aplicables directamente al dominio del tiempo.

Para tal discretización, el método de los elementos finitos, incluyendo en su definición la aproximación por diferencias finitas, es sin duda ampliamente aplicable y proporciona mayores posibilidades, aunque mucha de la literatura clásica sobre el tema utiliza sólo las mencionadas diferencias finitas.[1–6] Demostraremos aquí como el método de los elementos

finitos proporciona una útil generalización que unifica muchos algoritmos existentes y proporciona una gama de algoritmos nuevos.

Como el dominio del tiempo es infinito, inevitablemente lo restringiremos a un incremento de tiempo finito Δt y relacionaremos las condiciones iniciales en t_n (y antes) con aquéllas en el tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, obteniendo lo que se llama *relaciones de recurrencia*. En todo este capítulo un punto de comienzo serán las ecuaciones semidiscretas (10.1) o (10.2), aunque, naturalmente, la discretización del dominio tiempo-espacio podría ser considerada simultáneamente. Esto, sin embargo, no ofrece en general ventaja alguna, ya que debido a la regularidad del dominio temporal no se precisan elementos irregulares tiempo-espacio. De hecho, si se utilizan funciones de forma tipo producto, el proceso sería naturalmente idéntico al obtenido usando primero una semidiscretización en el espacio seguida por la discretización en el tiempo. Una excepción a esto se da en los problemas dominantemente convectivos, donde discretizaciones simultáneas pueden ser deseables, tal como mostraremos en el Capítulo 12.

Los primeros conceptos sobre elementos tiempo-espacio fueron introducidos en 1969-70[7-10] y el desarrollo de procesos que utilizan semidiscretización se presenta cronológicamente en las referencias [11] a [20]. Los elementos en el continuo tiempo-espacio para ecuaciones de tipo convección se describen en las referencias [21] y [22].

La presentación de este capítulo está dividida en tres partes. En la primera se deduce un conjunto de relaciones recurrentes *de un único paso* para los problemas lineales, de primer y segundo orden, de las Ecs. (10.2) y (10.1). Tales esquemas tienen una aplicabilidad muy general y son preferibles a los *esquemas multipaso* que se describen en la segunda parte, ya que el paso de tiempo puede ser variado de forma adaptable. En la parte final se tratará de las generalizaciones necesarias para *problemas no lineales*.

Cuando se discutan problemas de estabilidad nos referiremos a menudo al concepto de ecuaciones modalmente desacopladas introducidas en el capítulo precedente. Recordemos aquí que los sistemas de ecuaciones (10.1) y (10.2) se pueden escribir como un conjunto de ecuaciones escalares:

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i + f_i = 0 \tag{10.4}$$

o

$$c_i \dot{y}_i + k_i y_i + f_i = 0 \tag{10.5}$$

en los respectivos factores de participación de valores propios. Se demostrará que los requisitos de estabilidad son dependientes de los valores propios asociados con cada una de las ecuaciones, ω_i. Afortunadamente, resulta, sin embargo, que nunca es necesario obtener los autovalores o autovectores del sistema gracias a un poderoso teorema establecido por vez

primera por Irons y Treharne.[23]

El teorema establece simplemente que los autovalores del sistema pueden ser acotados por los valores propios de los elementos individuales ω^e. De esta forma

$$(\omega_j)^2_{min} \geq (\omega^e)^2_{min}$$

y

$$(\omega_j)^2_{max} \leq (\omega^e)^2_{max} \tag{10.6}$$

Los límites de estabilidad pueden, por tanto, (como se mostrará más tarde) relacionarse con las Ecs. (10.4) o (10.5) escritas para un elemento aislado.

ALGORITMOS DE PASO ÚNICO

10.2 Algoritmos sencillos paso a paso para la ecuación de primer orden

10.2.1 *Método de residuos ponderados (o de elementos finitos).* Consideremos la Ec. (10.2) que puede representar una aproximación semidiscreta a un problema físico particular, o de hecho ser en sí misma un sistema discreto. El objetivo es obtener una aproximación para $\mathbf{a}_{n+1}$ dados el valor de $\mathbf{a}_n$ y el vector de fuerzas $\mathbf{f}_t$ actuando en el intervalo de tiempo Δt.

De la forma usada en todas las aproximaciones de elementos finitos, suponemos que $\mathbf{a}$ varía en el intervalo de forma polinómica y tomamos aquí la serie de más bajo orden (lineal), tal como se muestra en la Figura 10.1, y escribimos

$$\mathbf{a} \approx \hat{\mathbf{a}}(\tau) = \mathbf{a}_n + \frac{\tau}{\Delta t}(\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n) \tag{10.7}$$

con

$$\tau = t - t_n$$

Esto puede, naturalmente, traducirse a la forma estándar de elementos finitos, resultando

$$\hat{\mathbf{a}}(\tau) = \sum \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) \mathbf{a}_n + \left(\frac{\tau}{\Delta t}\right) \mathbf{a}_{n+1} \tag{10.8}$$

en la cual el parámetro desconocido es $\mathbf{a}_{n+1}$.

La ecuación que proporciona este parámetro desconocido se obtiene haciendo una aproximación de residuos ponderados a la Ec. (10.2), esto es

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{W}(\mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{a}}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{f})\, d\tau = \mathbf{0} \tag{10.9}$$

Introduciendo Θ como un parámetro de ponderación dado por

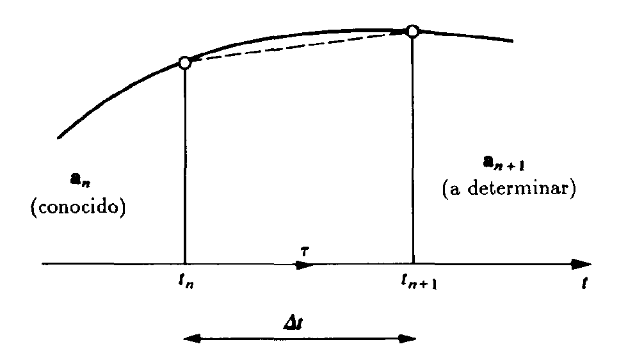


Figura 10.1 Aproximación de $\mathbf{a}$ en el dominio del tiempo.

$$\Theta = \frac{1}{\Delta t} \frac{\int_0^{\Delta t} W \tau \, d\tau}{\int_0^{\Delta t} W \, d\tau} \tag{10.10}$$

podemos escribir inmediatamente

$$\frac{\mathbf{C}(\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n)}{\Delta t} + \mathbf{K}[\mathbf{a}_n + \Theta(\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n)] + \bar{\mathbf{f}} = 0 \tag{10.11}$$

donde $\bar{\mathbf{f}}$ representa un valor promedio de $\mathbf{f}$ dado por

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{f} W \, d\tau}{\int_0^{\Delta t} W \, d\tau} \tag{10.12}$$

o

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{f}}_n + \Theta(\bar{\mathbf{f}}_{n+1} - \bar{\mathbf{f}}_n) \tag{10.13}$$

si se supone una variación de $\mathbf{f}$ lineal.

La Ec. (10.11) es, de hecho, casi idéntica a la aproximación por diferencias finitas de la ecuación de gobierno (10.2) en el tiempo $t_n + \Theta\Delta t$, y en este ejemplo se obtiene poca ventaja al introducir la aproximación de elementos finitos. Sin embargo, el promediado del término de fuerzas es importante, como se muestra en la Figura 10.2, donde se usa una W constante (esto es, $\Theta = \frac{1}{2}$) y una aproximación por diferencias finitas presenta dificultades.

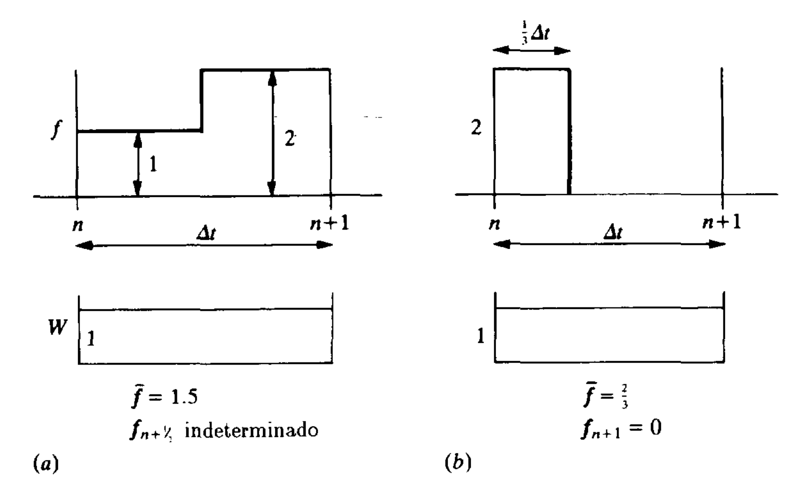


Figura 10.2 "Promediado" del término de fuerzas en la aproximación de elementos finitos en el tiempo.

La Figura 10.3 muestra cómo diferentes funciones de peso pueden proporcionar valores alternativos del parámetro Θ.

La solución de la Ec. (10.11) da

$$\mathbf{a}_{n+1} = (\mathbf{C} + \Delta t \Theta \mathbf{K})^{-1}[(\mathbf{C} - \Delta t(1 - \Theta)\mathbf{K})\mathbf{a}_n - \bar{\mathbf{f}}] \tag{10.14}$$

y es evidente que en general para cada paso del cálculo debe resolverse un sistema de ecuaciones completo (aunque naturalmente basta una única semi-inversión en problemas lineales). Los métodos que requieren tal inversión se conocen como *implícitos*. Sin embargo, cuando $\Theta = 0$ y $\mathbf{C}$ se aproxima por su equivalente diagonal (también llamada concentrada o aglutinada) $\mathbf{C}_L$, la solución, conocida como *explícita*, es extraordinariamente barata.

10.2.2 *Colocación mediante serie de Taylor.* Se obtiene una alternativa frecuentemente utilizada al algoritmo presentado en las páginas precedentes al aproximar separadamente $\mathbf{a}_{n+1}$ y $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ mediante una serie truncada de Taylor. Podemos escribir, suponiendo que $\mathbf{a}_n$ y $\dot{\mathbf{a}}_n$ son conocidas:

$$\mathbf{a}_{n+1} \approx \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t \beta(\dot{\mathbf{a}}_{n+1} - \dot{\mathbf{a}}_n) \tag{10.15}$$

y usar colocación para satisfacer la ecuación de gobierno en t_{n+1}, o

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{10.16}$$

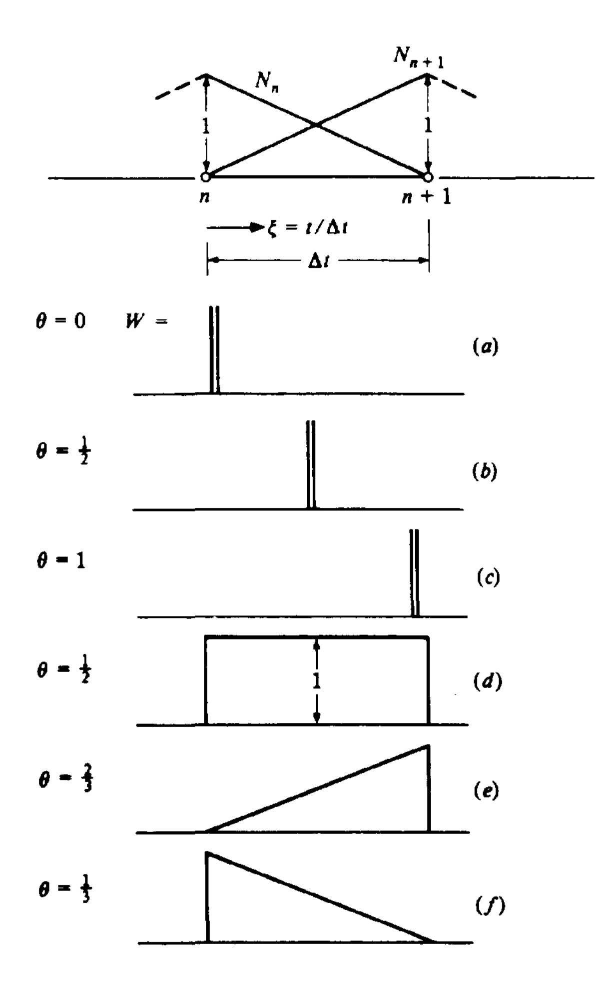


Figura 10.3 Funciones de forma y funciones de peso para fórmulas de recurrencia de dos puntos.

En lo anterior, β es un parámetro, $0 \leq \beta \leq 1$, de tal forma que el último término de la Ec. (10.15) represente una aproximación apropiada en diferencias al desarrollo truncado.

La sustitución de la Ec. (10.15) en la Ec. (10.16) proporciona una relación de recurrencia para $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$:

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = (\mathbf{C} + \Delta t\beta\mathbf{K})^{-1}[-\mathbf{K}(\mathbf{a}_n + \Delta t(1-\beta)\dot{\mathbf{a}}_n) - \mathbf{f}_{n+1}] \qquad (10.17)$$

donde $\mathbf{a}_{n+1}$ se calcula ahora mediante sustitución de la Ec. (10.17) en la Ec. (10.15).

Notemos que:

a) El esquema no puede arrancar por sí mismo ya que se requiere la satisfacción de la Ec. (10.2) en $t = 0$;
b) El cálculo requiere, si se identifican los parámetros $\beta = \Theta$, un problema de resolución de ecuaciones idéntico al del esquema de elementos finitos de la Ec. (10.14) y, finalmente, tal como veremos más tarde, las consideraciones de estabilidad son idénticas.

Este procedimiento se presenta aquí ya que tiene ciertas ventajas en cálculos no lineales que se mostrarán más adelante.

10.2.3 *Otros procedimientos de paso único.* Existen otras posibilidades alternativas al proceso de residuos ponderados para deducir aproximaciones de elementos finitos, como se discutió en el Capítulo 9 del Volumen 1. Por ejemplo, se pueden establecer y usar principios variacionales en el tiempo para tal fin. De hecho, esto es lo que se hizo en los primeros planteamientos por aproximación de elementos finitos utilizando los principios variacionales de Hamilton o Gurtin.[8,9,24–27] Sin embargo, como era de esperar, los algoritmos finales resultan ser idénticos. Una variante de los procedimientos anteriores es el uso de la aproximación por mínimos cuadrados para la minimización de la ecuación de residuos.[12,13] Esto se obtiene mediante la sustitución de la aproximación (10.7) en la Ec. (10.2).

El lector puede verificar que el algoritmo de recurrencia es

$$\left(\frac{\mathbf{C}^T\mathbf{C}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{K}^T\mathbf{C} + \mathbf{C}^T\mathbf{K}}{2} + \frac{\mathbf{K}^T\mathbf{K}\Delta t}{3}\right)\mathbf{a}_{n+1}$$
$$+\left(\frac{-\mathbf{C}^T\mathbf{C}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{K}^T\mathbf{C} - \mathbf{C}^T\mathbf{K}}{2} + \frac{\mathbf{K}^T\mathbf{K}\Delta t}{6}\right)\mathbf{a}_n$$
$$+\mathbf{K}^T\frac{1}{\Delta t^2}\int_0^1 \mathbf{f}\tau\, d\tau + \mathbf{C}^T\frac{1}{\Delta t^2}\int_0^1 \mathbf{f}\, d\tau = \mathbf{0} \qquad (10.18)$$

que requiere una solución de ecuaciones más compleja y que siempre es "implícita". Por esta razón el algoritmo es fundamentalmente de interés puramente teórico, aunque como era de esperar su precisión es buena, tal como se muestra en la Figura 10.4, en la cual se usa una Ec. (10.2) con un único grado de libertad y con

$$\mathbf{K} = \mathbf{C} = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{f} = 0 \qquad \text{con} \quad a_0 = 1$$

Aquí se comparan varios de los algoritmos previamente discutidos. Se ve en este ejemplo que el algoritmo con $\Theta = \frac{1}{2}$ se comporta tan bien como el

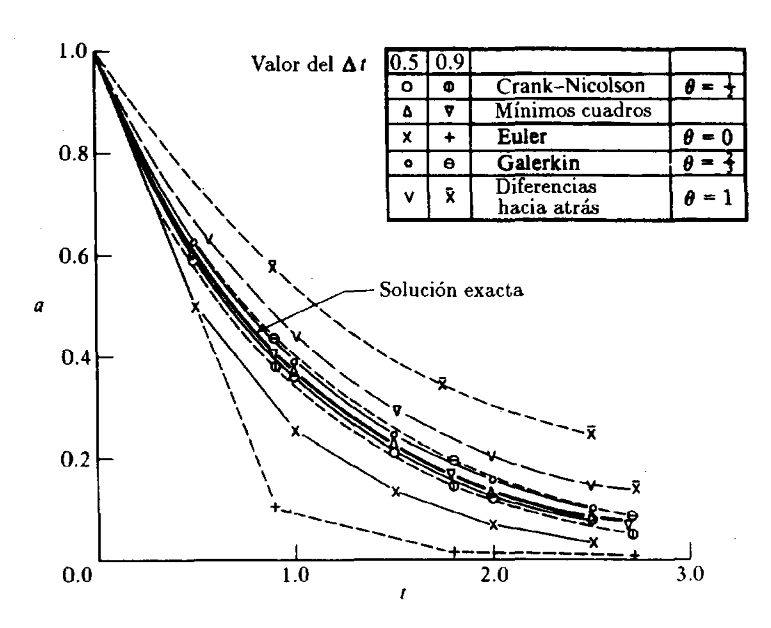


Figura 10.4 Comparación de varios esquemas de avance en el tiempo en un problema de valor inicial de primer orden.

de mínimos cuadrados. Por esta razón es popular y es conocido como el esquema de Crank-Nicolson en honor de sus creadores.[28]

10.2.4 *Consistencia y error de aproximación.* Para asegurar la convergencia de cualquier aproximación de elementos finitos es necesario y suficiente que ésta sea *consistente y estable.* Se han discutido estas dos condiciones en el Volumen 1 y se han introducido los requisitos apropiados para problemas de contorno. En la aproximación temporal aparecen condiciones similares aunque el problema de estabilidad es más delicado.

Claramente, la función $\mathbf{a}$ en sí misma y sus derivadas que aparecen en la ecuación tienen que ser aproximadas con un error de truncamiento de $O(\Delta t)^{\alpha}$, donde se necesita $\alpha \geq 1$ para conseguir consistencia. Para la ecuación de primer orden (10.2) es, por tanto, necesario usar una aproximación polinómica de orden $p \geq 1$, que es capaz de aproximar $\dot{\mathbf{a}}$ hasta $O(\Delta t)$.

El *error de truncamiento en la aproximación local* de $\mathbf{a}$ con tal aproximación es $O(\Delta t)^2$ y todos los algoritmos que hemos presentado aquí utilizando la aproximación con $p = 1$ de la Ec. (10.7) tendrán al menos esa *precisión local.*[29] Como para un tiempo dado, $t = n\Delta t$, el error total puede ser magnificado n veces, la precisión final en un tiempo dado para

los esquemas aquí discutidos es, en general, de orden $O(\Delta t)$.

Veremos más adelante que los argumentos utilizados aquí llevan a $p \geq 2$ para la ecuación de segundo orden (10.1) y que generalmente puede conseguirse un aumento de precisión utilizando polinomios de aproximación de mayor orden.

Naturalmente sería posible aplicar el incremento de polinomio a la función de aproximación (10.7) añadiendo grados de libertad de mayor orden. Por ejemplo, podríamos escribir en lugar de la aproximación original una serie cuadrática:

$$\mathbf{a} \approx \hat{\mathbf{a}}(\tau) = \mathbf{a}_n + \frac{\tau}{\Delta t}(\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n) + \frac{\tau}{\Delta t}\left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right)\tilde{\mathbf{a}} \qquad (10.19)$$

donde $\tilde{\mathbf{a}}$ es una variable interna jerárquica. Obviamente, ahora tanto $\mathbf{a}_{n+1}$ como $\tilde{\mathbf{a}}$ tendrán que ser obtenidas simultáneamente, aumentando el tamaño del problema. Las necesarias ecuaciones algebraicas se obtienen ahora utilizando dos conjuntos de funciones de ponderación, W y $\tilde{W}$.

Es interesante considerar la primera de éstas, obtenida utilizando solamente la ponderación W en la forma de la Ec. (10.9). El lector puede fácilmente verificar que ahora se tiene que añadir a la Ec. (10.11) un término en función de $\tilde{\mathbf{a}}$ que es

$$\left[\frac{\mathbf{C}(1-2\Theta)}{\Delta t} + \mathbf{K}(\Theta - \tilde{\Theta})\right]\tilde{\mathbf{a}} \qquad (10.20)$$

donde

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{\Delta t^2}\frac{\int_0^{\Delta t} W\tau^2\, d\tau}{\int_0^{\Delta t} W\, d\tau}$$

Es claro que la elección de $\Theta = \tilde{\Theta} = \frac{1}{2}$ elimina el término cuadrático y recupera de nuevo el esquema anterior, probando de esta manera que los valores así obtenidos tienen un error de truncamiento local de $O(\Delta t)^3$. Esto explica por qué el esquema de Crank-Nicolson tiene alta precisión.

En general, la suma de variables internas de alto orden hace que los esquemas de recurrencia sean demasiado caros y veremos más adelante como se puede conseguir un incremento de precisión de forma más económica.

10.2.5 *Estabilidad.* Si consideramos cualquiera de los algoritmos de recurrencia deducidos hasta ahora, notamos que para la forma homogénea (esto es, con $\mathbf{f} \equiv 0$) todos pueden ser escritos en la forma

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{a}_n \qquad (10.21)$$

donde **A** se conoce como la *matriz de amplificación*.

La forma de esta matriz para el primer algoritmo deducido es, por ejemplo, evidente en la Ec. (10.14)

$$\mathbf{A} = (\mathbf{C} + \Delta t \Theta \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{C} - \Delta t(1-\Theta)\mathbf{K}) \tag{10.22}$$

Cualesquiera de los errores presentes en la solución serán naturalmente amplificados por este factor.

La solución general de cualquier esquema de recurrencia puede escribirse de la forma

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mu \mathbf{a}_n \tag{10.23}$$

y sustituyendo en la Ec. (10.21) se observa que μ viene dado por los valores propios de la matriz **A** ya que

$$(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I})\mathbf{a}_n = 0 \tag{10.24}$$

Claramente, si cualquier valor propio μ es tal que

$$|\mu| > 1 \tag{10.25}$$

todos los errores inicialmente pequeños aumentarán sin límite y la solución será inestable. En el caso de valores propios complejos se modifica la recurrencia de tal forma que el requisito sea que el módulo de μ satisfaga la Ec. (10.25).

Dado que la determinación de los valores propios del sistema es muy costosa es útil considerar solamente una ecuación escalar de la forma (10.5) (representando, por ejemplo, el comportamiento de un elemento). Así, para el caso del algoritmo discutido en la Ec. (10.22) tenemos un escalar A, esto es

$$A = \frac{c - \Delta t(1-\Theta)k}{c + \Delta t \Theta k} = \frac{1 - (\omega \Delta t)(1-\Theta)}{1 + \omega \Delta t \Theta} = \mu \quad \text{donde} \quad \omega = \frac{k}{c} \tag{10.26}$$

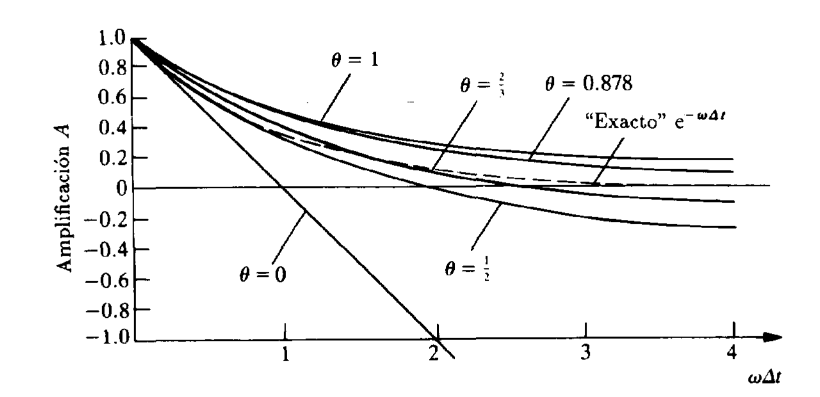
y μ es evaluado a partir de la Ec. (10.24) simplemente como $\mu = A$ para permitir $\mathbf{a}_n$ no triviales. (Esto es naturalmente equivalente a hacer nulo el determinante de $[\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}]$ en un caso más general).

En la Figura 10.5 se muestra como μ (o A) varía con $\omega \Delta t$ para varios valores de Θ. Se observa inmediatamente que:

a) para $\Theta \geq \dfrac{1}{2}$:

$$|\mu| \leq 1 \tag{10.27a}$$

y tales algoritmos son *incondicionalmente estables*;



$\theta = 1$ El método totalmente implícito, que decrece demasiado lentamente (diferencias hacia atrás).
$\theta = \frac{1}{2}$ Crank–Nicolson o regla trapezoidal, que da un orden más alto de precisión pero puede producir oscilaciones ($\omega \Delta t > 2$).
$\theta = \frac{2}{3}$ Un valor de compromiso.
$\theta = 0.878$ Algoritmo de Liniger, donde se escoge θ para minimizar el error en el dominio
$\theta = 0$ El económico esquema de Euler, explícito.

Figura 10.5 La amplificación A para varias versiones del algoritmo Θ.

b) para $\Theta < \dfrac{1}{2}$ se precisa para que haya estabilidad que

$$\omega \Delta t \leq \frac{2}{1 - 2\Theta} \tag{10.27b}$$

Por lo tanto, tales algoritmos son solamente *condicionalmente estables*.

Naturalmente, es típica la forma explícita con $\Theta = 0$.

Para establecer el valor crítico de Δt por debajo del cual el esquema es estable con $\Theta < \frac{1}{2}$ se necesita la determinación de los máximos valores de μ de un elemento típico. Por ejemplo, en el caso del problema de transmisión térmica en el que tenemos los coeficientes c_{ii} y k_{ii} definidos por las expresiones

$$c_{ii} = \int_{\Omega^i} \tilde{c} N_i^2 \, d\Omega \qquad \text{y} \qquad k_{ii} = \int_{\Omega^i} \nabla N_i \tilde{k} \nabla N_i \, d\Omega \tag{10.28}$$

podemos presuponer comportamiento uniaxial con un único grado de libertad y escribir para un elemento lineal

$$N = \frac{h-x}{h}$$
$$c = \int_0^h \tilde{c} N^2 \, dx = \frac{\tilde{c} h}{3}$$
$$k = \int_0^h \tilde{k} \left(\frac{dN}{dx}\right)^2 dx = \frac{\tilde{k}}{h}$$

Ahora

$$\omega = \frac{k}{c} = \frac{3\tilde{k}}{h^2 \tilde{c}}$$

Esto conduce a

$$\Delta t \leq \frac{2}{1 - 2\Theta} \frac{h^2 \tilde{c}}{3\tilde{k}} = \Delta t_{crit} \tag{10.29}$$

que naturalmente significa que el tamaño de elemento más pequeño, h_{min}, determina la estabilidad global. Notemos de lo anterior que:

a) en problemas de primer orden el paso de tiempo crítico es proporcional a h^2 y, por tanto, decrece rápidamente con el tamaño del elemento, haciendo los cálculos explícitos difíciles, y

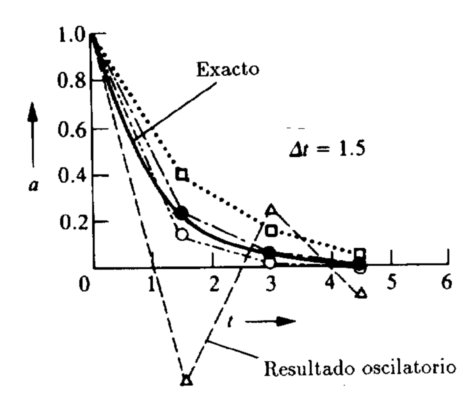
b) si se supone masa concentrada y por lo tanto $c = \tilde{c}h/2$ el paso de tiempo crítico es mayor.

En la Figura 10.6 se muestra el comportamiento del esquema descrito en la Sección 10.2.1 para varios valores de Θ y Δt en el ejemplo que ya se ha ilustrado en la Figura 10.4, pero utilizando ahora valores mayores para Δt. Notemos como el esquema condicionalmente estable con $\Theta = 0$ y un límite de estabilidad $\Delta t = 2$ muestra oscilaciones a medida que nos acercamos a este límite ($\Delta t = 1.5$) y diverge cuando el límite se sobrepasa.

Los cálculos de estabilidad que se han presentado para el algoritmo de la Sección 10.2.1 pueden naturalmente repetirse para los otros algoritmos que se han discutido.

Si se usan idénticos procedimientos, por ejemplo, para el algoritmo de la Sección 10.2.2, se encuentra que las condiciones de estabilidad basadas en la determinación de la matriz de amplificación $(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})$ son idénticas que las anteriores siempre que se tome $\Theta = \beta$. Los algoritmos que dan determinantes idénticos se llamarán, en lo que sigue, *similares*.

En general, es posible que diferentes matrices de amplificación $\mathbf{A}$ tengan determinantes idénticos de $(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})$ y por tanto idénticas condiciones de estabilidad pero sean diferentes en lo restante. Si además las matrices de amplificación son iguales los esquemas se conocen como *idénticos*. En



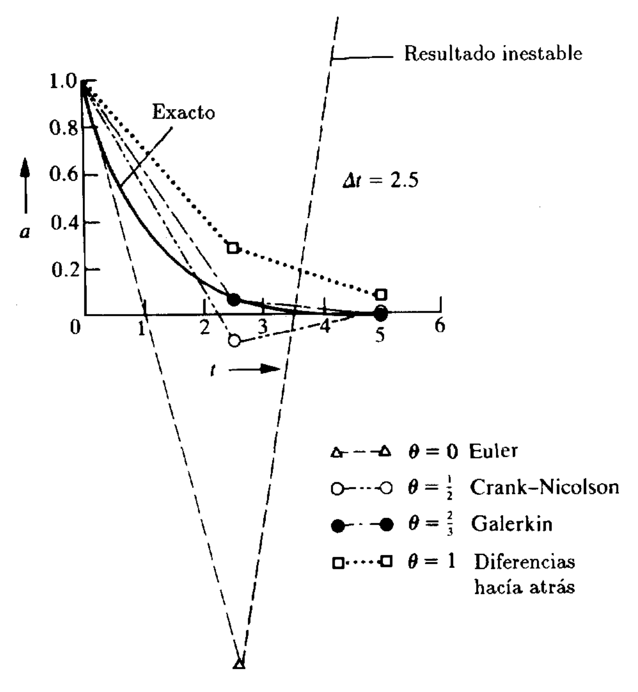


Figura 10.6 Comportamiento de algunos algoritmos Θ en el problema de la Figura 10.4 para pasos de tiempo más grandes. Nótese la oscilación e inestabilidad.

el caso presente se puede demostrar que de hecho existe tal identidad a pesar de las diferentes deducciones.

10.2.6 *Algunas observaciones adicionales. Condiciones iniciales y ejemplos.* La cuestión de elegir un valor óptimo de Θ no es siempre obvia a partir de las consideraciones teóricas de precisión. En particular, con $\Theta = \frac{1}{2}$ aparecen a veces oscilaciones,[13] como se observa en la Figura 10.6 ($\Delta t = 2.5$), y por esta razón hay quien prefiere usar[30] $\Theta = \frac{2}{3}$, que es considerablemente "más suave" (y que, de paso, corresponde a una aproximación estándar de Galerkin). En la Tabla 10.1 se muestran los resultados de un problema unidimensional de elementos finitos en el que una barra a temperatura inicial uniforme es sometida de forma súbita a temperaturas cero aplicadas en sus extremos. Se han usado 10 elementos lineales en la dimensión espacial con $L = 1$. Los errores oscilatorios que aparecen con $\Theta = \frac{1}{2}$ se reducen mucho para $\Theta = \frac{2}{3}$. El paso de tiempo utilizado es mucho mayor que el correspondiente al período del menor valor propio, pero la principal causa de la oscilación es la súbita discontinuidad del cambio de temperatura.

Por razones similares Liniger[31] dedujo Θ para minimizar el error en todo el dominio temporal y da $\Theta = 0.878$ para el sencillo caso unidimensional. Se observa en la Figura 10.5 lo bien que el factor de amplificación ajusta la solución exacta con estos valores. De nuevo este valor alisa las oscilaciones. Sin embargo, la mayoría de las oscilaciones se introducen simplemente por utilizar una condición inicial físicamente no realista.

Al menos en parte, las oscilaciones que ocurren, por ejemplo, con $\Theta = \frac{1}{2}$ y $\Delta t = 2.5$ (véase la Figura 10.6) en el ejemplo previo se deben al salto brusco en el término de fuerzas introducido al principio del cálculo. Este salto es evidente si consideramos este sencillo problema en el contexto de todo el dominio temporal. Podemos tomar el problema suponiendo

$$f(t) = -1 \qquad \text{para} \qquad t < 0$$

y dando la solución $u = 1$ con un cambio súbito en $t = 0$, que conduce a

$$f(t) = 0 \qquad \text{para} \qquad t \geq 0$$

Como se muestra en la Figura 10.7 esto representa una discontinuidad de la función de carga en $t = 0$. Aunque el algoritmo permite discontinuidades de carga, éstas conducen a discontinuidades bruscas de u y por tanto no son deseables. Si en lugar de esta discontinuidad se supone que f varía linealmente en el primer paso de tiempo Δt $(-\Delta t/2 < t < \Delta t/2)$ entonces se obtienen resultados suaves con una representación física mejorada de la solución real, incluso para pasos de tiempo tan largos como $\Delta t = 2.5$, tal como se muestra en la Figura 10.7.

Un uso similar del alisado se ilustra para un sistema de varios grados de libertad (representación de transmisión del calor en una pared) que

TABLA 10.1

PORCENTAJE DE ERROR PARA LOS ESQUEMAS DE ELEMENTOS FINITOS EN EL TIEMPO ($\Theta = \frac{2}{3}$) *Y CRANK-NICOLSON* ($\Theta = \frac{1}{2}$)*;* $\Delta t = 0.01$

t	$x = 0.1$		$x = 0.2$		$x = 0.3$		$x = 0.4$		$x = 0.5$	
	$\Theta = \frac{2}{3}$	$\Theta = \frac{1}{2}$	$\Theta = \frac{2}{3}$	$\Theta = \frac{1}{2}$	$\Theta = \frac{2}{3}$	$\Theta = \frac{1}{2}$	$\Theta = \frac{2}{3}$	$\Theta = \frac{1}{2}$	$\Theta = \frac{2}{3}$	$\Theta = \frac{1}{2}$
0.01	10.8	28.2	1.6	3.2	0.5	0.7	0.6	0.1	0.5	0.2
0.02	0.5	3.5	2.1	9.5	0.1	0.0	0.5	0.7	0.7	0.4
0.03	1.3	9.9	0.5	0.7	0.8	3.1	0.5	0.2	0.5	0.6
0.05	0.5	4.5	0.4	0.2	0.5	2.3	0.4	0.8	0.5	1.0
0.10	0.1	1.4	0.1	2.0	0.1	1.5	0.1	1.9	0.1	1.6
0.15	0.3	2.2	0.3	2.1	0.3	2.2	0.3	2.1	0.3	2.2
0.20	0.6	2.6	0.6	2.6	0.6	2.6	0.6	2.6	0.6	2.6
0.30	1.4	3.5	1.4	3.5	1.4	3.5	1.4	3.5	1.4	3.5

se resuelve utilizando elementos finitos bidimensionales[32] (Figura 10.8). Aquí el problema corresponde a la aplicación instántanea de temperatura prescrita ($T = 1$) en los lados de la pared con temperatura inicial nula. De nuevo las oscilaciones espúreas se eliminan para $\Theta = \frac{1}{2}$ y se obtienen resultados mejorados para los otros valores de $\Theta(\frac{2}{3}, 0878)$ si se reemplaza el cambio en escalón por un cambio continuo. Tal alisado es siempre recomendable y una representación continua del término de fuerzas es importante.

Concluimos esta sección mostrando un típico ejemplo de distribución de temperaturas en un ejemplo industrial en el que se han usado elementos de alto orden (Figura 10.9). Aquí la Ec. (10.2) corresponde a la forma discretizada de la ecuación de transmisión del calor [véase Sección 9.2].

10.3 Algoritmos generales de paso único para ecuaciones de primer y segundo orden

10.3.1 *Introducción.* Presentaremos en esta sección dos algoritmos generales de paso único aplicables a la Ec. (10.1):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{10.1}$$

Estos algoritmos serán generalmente aplicables al problema de primer orden de la Ec. (10.2) simplemente poniendo $\mathbf{M} = 0$.

Usaremos un polinomio de grado arbitrario p para aproximar la función incógnita $\mathbf{a}$ y debemos advertir inmediatamente que para ecuaciones de segundo orden se necesita por razones de consistencia $p \geq 2$ ya

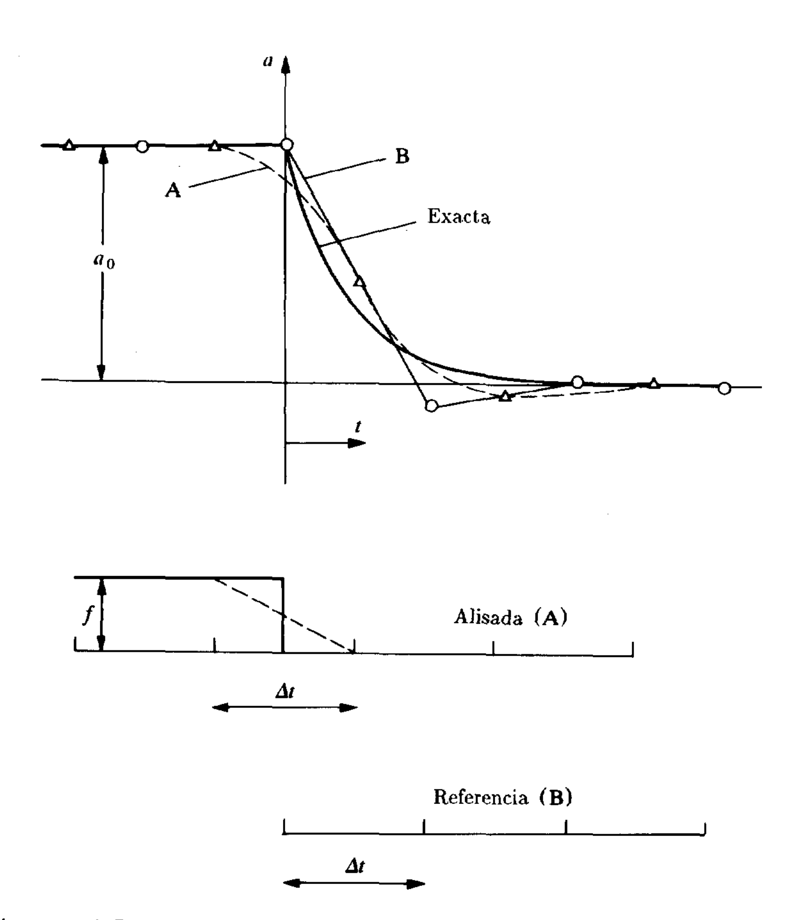


Figura 10.7 Importancia de "alisar" el término de fuerzas para eliminar las oscilaciones en la solución. $\Delta t = 2.5$.

que deben aproximarse la derivadas de segundo orden.

El primer algoritmo SSpj (de paso único (single step) con aproximación de grado p, para ecuaciones de orden $j = 1, 2$) se deducirá mediante el uso del proceso de residuos ponderados y encontraremos que el algoritmo de la Sección 10.2.1 no es sino un caso especial. El segundo algoritmo GNpj se deducirá siguiendo el procedimiento de aproximación mediante serie truncada de Taylor de una manera similar a la descrita en la Sección 10.2.2.

En lo que sigue *supondremos* que al principio del intervalo, o sea, en $t = t_n$, se conocen los valores de la función incógnita y sus derivadas, esto es, $\mathbf{a}_n$, $\dot{\mathbf{a}}_n$, $\ddot{\mathbf{a}}_n$ hasta $\overset{p-1}{\mathbf{a}_n}$, y que nuestro objetivo es determinar $\mathbf{a}_{n+1}$, $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$, $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$ hasta $\overset{p-1}{\mathbf{a}_{n+1}}$, donde p es el orden de la serie usada en este intervalo.

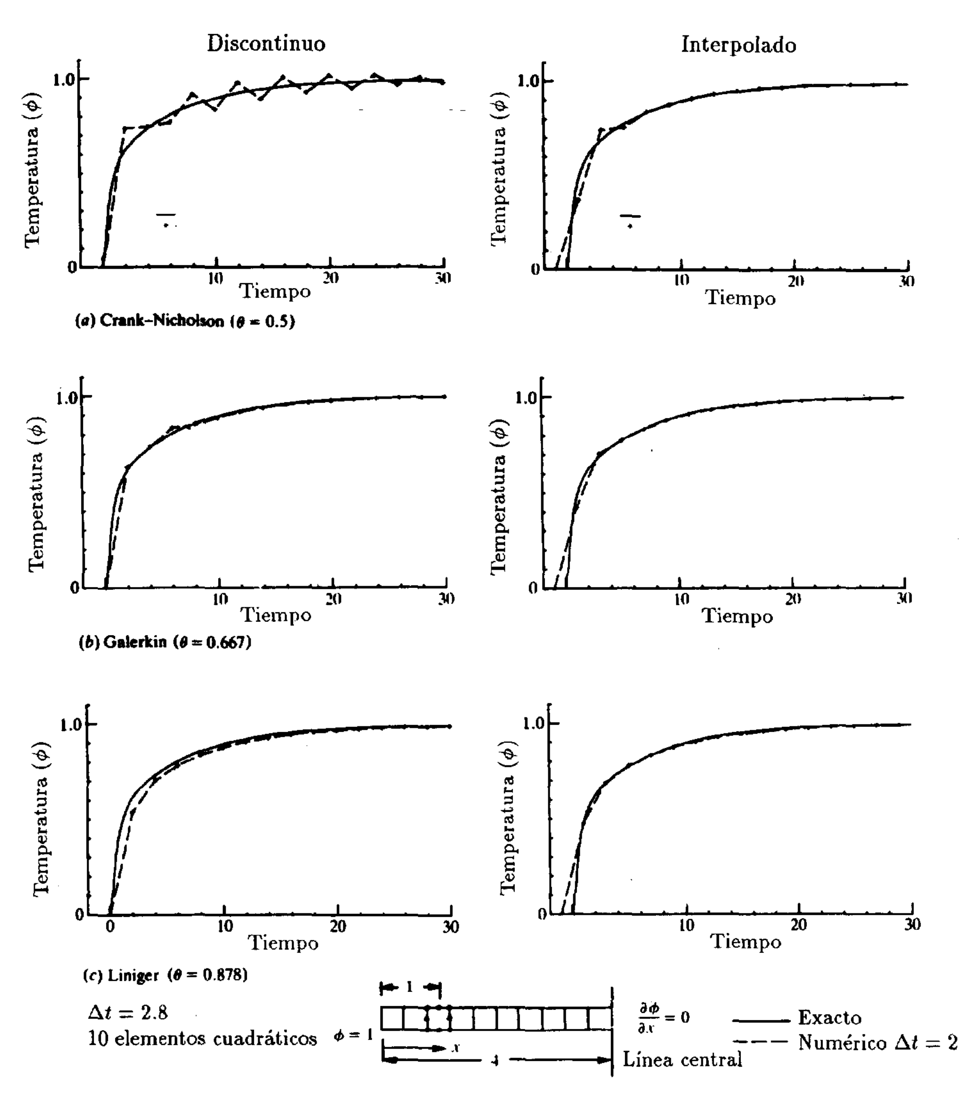
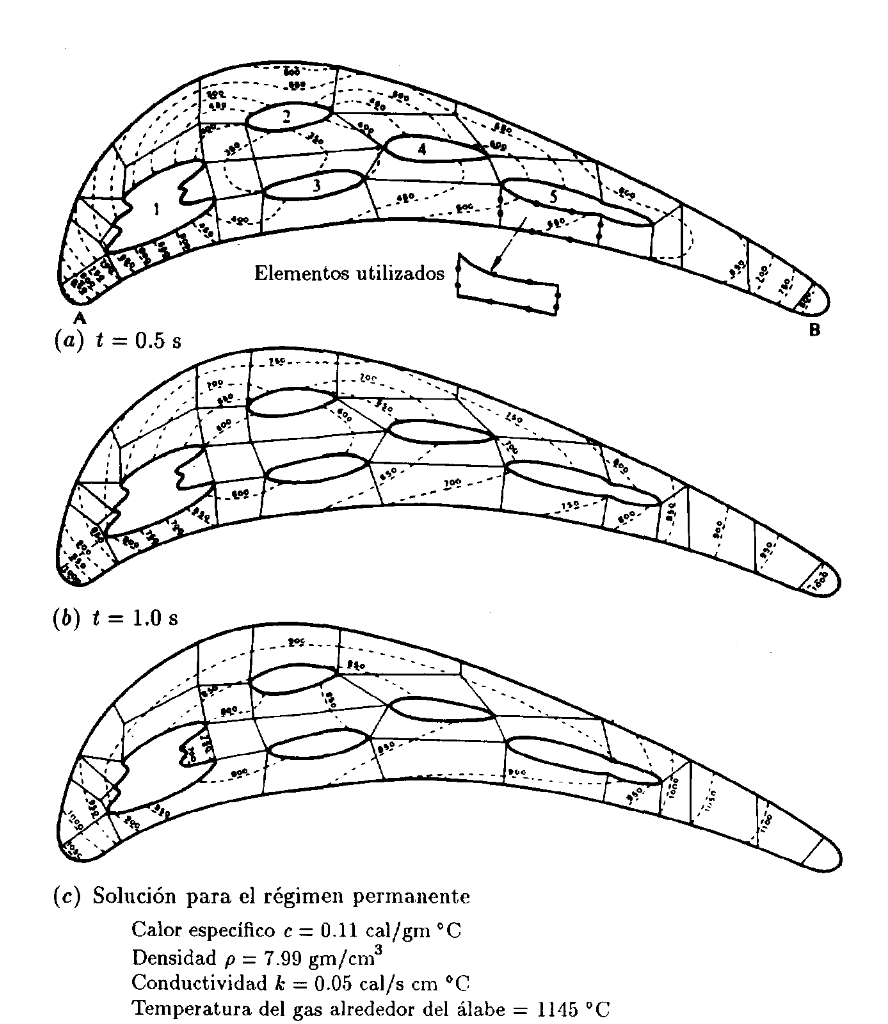


Figura 10.8 Calentamiento transitorio de una barra; comparación de las condiciones iniciales discontinua e interpolada (alisada) para esquemas de un solo paso.

Esto es ciertamente una presunción bastante fuerte puesto que para problemas de primer orden ya hemos establecido que sólo se da una condición inicial única, $\mathbf{a}(0)$, y que para problemas de segundo orden se necesitan generalmente dos condiciones, $\mathbf{a}(0)$ y $\dot{\mathbf{a}}(0)$ (esto es, el desplaza-



Calor específico $c = 0.11$ cal/gm °C
Densidad $\rho = 7.99$ gm/cm^3
Conductividad $k = 0.05$ cal/s cm °C
Temperatura del gas alrededor del álabe = 1145 °C
El coeficiente de termotransferencia varía de 0.390 a 0.056 en las caras exteriores del álabe (A-B)

Número del orificio	Temperatura del orificio de refrigeración	α alrededor del perímetro de cada orificio
1	545 °C	0.0980
2	587 °C	0.0871

Figura 10.9 Distribución de temperaturas en un álabe rotor refrigerado, inicialmente a temperatura nula.

miento y la velocidad del sistema). Podemos, sin embargo, argumentar que si el sistema comienza en reposo se pueden tomar $\mathbf{a}(0)$ hasta $\overset{p-1}{\mathbf{a}}(0)$

iguales a cero y que la solución seguirá siendo suave en las derivadas de mayor orden, siempre que *las fuerzas que actúan sobre el sistema sean adecuadamente continuas.* Alternativamente, se puede diferenciar la ecuación diferencial para obtener los valores iniciales necesarios.

10.3.2 *La forma de residuos ponderados (elementos finitos) SSpj.*[18,19] El desarrollo del vector incógnita $\mathbf{a}$ se toma como un polinomio de grado p. Con los valores *conocidos* de $\mathbf{a}_n$, $\dot{\mathbf{a}}_n$, $\ddot{\mathbf{a}}_n$ hasta $\overset{p-1}{\mathbf{a}}_n$ al principio del paso de tiempo Δt, podemos escribir, como en la Sección 10.2.1,

$$\tau = t - t_n \qquad \Delta t = t_{n+1} - t_n \tag{10.30}$$

y utilizando una serie polinómica de grado p

$$\mathbf{a} \approx \mathbf{a}_n + \dot{\mathbf{a}}_n \tau + \frac{\ddot{\mathbf{a}} \tau^2}{2!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \tau^p}{p!} \tag{10.31}$$

donde la única incógnita es el vector $\boldsymbol{\alpha}_n^p$,

$$\boldsymbol{\alpha}_n^p \equiv \overset{p}{\mathbf{a}} \equiv \frac{d^p}{dt^p}\mathbf{a} \tag{10.32}$$

que representa un valor promedio de la derivada p-ésima en el intervalo Δt. La aproximación de $\mathbf{a}$ para el caso de $p = 2$ se muestra en la Figura 10.10.

Notemos que para obtener una aproximación consistente de todas las derivadas que aparecen en las ecuaciones diferenciales (10.1) y (10.2) se necesita $p \geq 2$ para la ecuación dinámica y $p \geq 1$ para la ecuación de primer orden. De hecho, la aproximación más baja, esto es $p = 1$, es la base del algoritmo deducido en la sección anterior.

El algoritmo de recurrencia se obtiene sustituyendo $\mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{a}}$ y $\ddot{\mathbf{a}}$ obtenidos mediante diferenciación de la Ec. (10.31) en la Ec. (10.1) y satisfaciendo la ecuación de residuos ponderados con una única función de ponderación $W(t)$. Esto da

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} W(t) \Bigg\{ \mathbf{M} & \left[\ddot{\mathbf{a}}_n + \overset{3}{\mathbf{a}}_n \tau + \cdots + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \tau^{p-2}}{(p-2)!} \right] \\ & + \mathbf{C} \left[\dot{\mathbf{a}}_n + \ddot{\mathbf{a}}_n \tau + \cdots + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \tau^{p-1}}{(p-1)!} \right] \\ & + \mathbf{K} \left[\mathbf{a}_n + \dot{\mathbf{a}}_n \tau + \cdots + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \tau^p}{(p)!} \right] + \mathbf{f} \Bigg\} \, d\tau = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{10.33}$$

como la ecuación básica para determinar $\boldsymbol{\alpha}_n^p$.

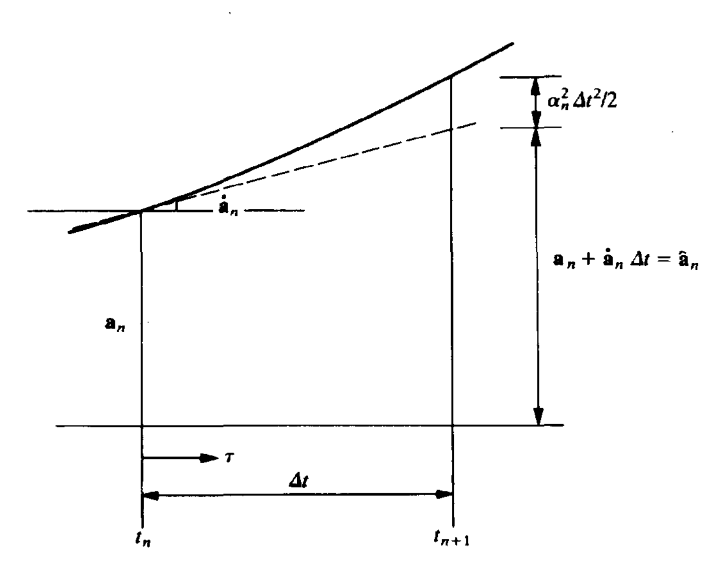


Figura 10.10 Una aproximación de segundo orden en el tiempo.

Sin especificar la función de peso utilizada se puede, como en la Sección 10.2.1, generalizar sus efectos escribiendo [de forma similar a la Ec. (10.10)]

$$\Theta_1 = \frac{\displaystyle\int_0^{\Delta t} W\tau \, d\tau}{\displaystyle\Delta t \int_0^{\Delta t} W \, d\tau}$$

hasta

$$\Theta_p = \frac{\displaystyle\int_0^{\Delta t} W\tau^p \, d\tau}{\displaystyle\Delta t^p \int_0^{\Delta t} W \, d\tau}$$

y

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{\displaystyle\int_0^{\Delta t} W f \, d\tau}{\displaystyle\int_0^{\Delta t} W \, d\tau} \qquad \text{con} \quad \Theta_0 \equiv 1 \tag{10.34}$$

La Ec. (10.33) puede ahora escribirse de forma más compacta como

$$\mathbf{M}\left[\ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \Theta_{p-2} \Delta t^{p-2}}{(p-2)!}\right] + \mathbf{C}\left[\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \Theta_{p-1} \Delta t^{p-1}}{(p-1)!}\right]$$

$$+\mathbf{K}\left[\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \Theta_p \Delta t^p}{p!}\right] + \bar{\mathbf{f}}_n = \mathbf{0} \tag{10.35}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} &= \mathbf{a}_n + \dot{\mathbf{a}}_n \Delta t \Theta_1 + \cdots + \frac{\overset{p-1}{\mathbf{a}_n} \Delta t^{p-1} \Theta_{p-1}}{(p-1)!} \\
&= \sum_{q=0}^{p-1} \frac{\overset{q}{\mathbf{a}_n} \Delta t^q \Theta_q}{q!} \\
\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{a}}_n + \ddot{\mathbf{a}}_n \Delta t \Theta_1 + \cdots + \frac{\overset{p-1}{\mathbf{a}_n} \Delta t^{p-2} \Theta_{p-2}}{(p-2)!} \\
&= \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\overset{q}{\mathbf{a}_n} \Delta t^{q-1} \Theta_{q-1}}{(q-1)!} \\
\ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} &= \ddot{\mathbf{a}}_n + \overset{3}{\mathbf{a}_n} \Delta t \Theta_1 + \cdots + \frac{\overset{p-1}{\mathbf{a}_n} \Delta t^{p-3} \Theta_{p-3}}{(p-3)!} \\
&= \sum_{q=2}^{p-1} \frac{\overset{q}{\mathbf{a}_n} \Delta t^{q-2} \Theta_{q-2}}{(q-2)!}
\end{aligned} \tag{10.36}$$

Como $\tilde{\mathbf{a}}_{n+1}$, $\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1}$ y $\ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1}$ pueden calcularse directamente a partir de los valores iniciales, se puede resolver la Ec. (10.35) para obtener

$$\boldsymbol{\alpha}_n^p = -\left[\frac{\mathbf{M}\Delta t^{p-2}\Theta_{p-2}}{(p-2)!} + \frac{\mathbf{C}\Delta t^{p-1}\Theta_{p-1}}{(p-1)!} + \frac{\mathbf{K}\Delta t^p \Theta_p}{p!}\right]^{-1}$$

$$\times \left(\mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \bar{\mathbf{f}}\right) \tag{10.37}$$

Es importante observar que $\tilde{\mathbf{a}}_{n+1}$, $\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1}$ y $\ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1}$ representan valores medios de predicción de $\mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{a}}$ y $\ddot{\mathbf{a}}$ en el intervalo en que se satisface la ecuación de gobierno (10.1) en un sentido promediado si *$\boldsymbol{\alpha}_n^p$ se toma como cero.*

El procedimiento está ahora completo ya que el conocimiento del vector $\boldsymbol{\alpha}_n^p$ permite la evaluación de $\mathbf{a}_{n+1}$ a $\overset{p-1}{\mathbf{a}}_{n+1}$ a partir de la serie usada originalmente en la Ec. (10.31) tomando $\tau = \Delta t$. Esto da

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \dot{\mathbf{a}}_n \Delta t + \cdots + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \Delta t^p}{p!} = \hat{\mathbf{a}}_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \Delta t^p}{p!}$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \ddot{\mathbf{a}}_n \Delta t + \cdots + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \Delta t^{p-1}}{(p-1)!} = \dot{\hat{\mathbf{a}}}_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^p \Delta t^{p-1}}{(p-1)!}$$

$$\vdots$$

$$\overset{p-1}{\mathbf{a}}_{n+1} = \overset{p-1}{\mathbf{a}}_n + \boldsymbol{\alpha}_n^p \Delta t \qquad (10.38)$$

En lo anterior, $\hat{\mathbf{a}}_{n+1}$, $\dot{\hat{\mathbf{a}}}_{n+1}$, etc., son de nuevo cantidades que se pueden escribir *a priori* (antes de resolver $\boldsymbol{\alpha}_n^p$). Éstos representan valores de predicción al final del intervalo con $\boldsymbol{\alpha}_n^p = 0$.

Para resumir, el algoritmo general necesita la elección de los valores de Θ_1 y Θ_p y precisa:

a) el cálculo de $\tilde{\mathbf{a}}_{n+1}$, $\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1}$ y $\ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1}$ utilizando las definiciones de las Ecs. (10.36);
b) el cálculo de $\boldsymbol{\alpha}_n^p$ mediante la solución de la Ec. (10.37);
c) el cálculo de $\mathbf{a}_{n+1}$ a $\overset{p-1}{\mathbf{a}}_{n+1}$ mediante las Ecs. (10.38).

Después de completar el paso (*c*) se puede empezar un nuevo paso de tiempo. En problemas de primer orden el cálculo de $\ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1}$ puede ser obviamente omitido.

Si las matrices $\mathbf{C}$ y $\mathbf{M}$ son diagonales la solución de la Ec (10.27) es trivial siempre que se elija

$$\Theta_p = 0 \qquad (10.39)$$

Con esta elección los algoritmos son *explícitos*, pero encontraremos más adelante que algunas veces solamente son *condicionalmente estables.*

Cuando $\Theta_p \neq 0$ se tienen varios tipos de algoritmos *implícitos* y se demostrará que algunos de éstos son *incondicionalmente estables.* De hecho, son tales algoritmos los que tienen el mayor uso práctico.

Casos especialmente importantes del algoritmo general son las formas SS11 y SS22 que se describen a continuación.

El algoritmo SS11. Si se considera la ecuación de primer orden (esto es, $j = 1$) es evidente que sólo se necesita especificar el valor de $\mathbf{a}_n$ como valor inicial para cualquier cálculo. Por esta razón la elección de una serie lineal en el intervalo de tiempo es *natural* ($p = 1$) y el algoritmo SS11 es, por esta razón, el más habitualmente usado.

Ahora la aproximación de la Ec. (10.31) es, sencillamente,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\alpha}\tau \qquad (\boldsymbol{\alpha}_n^1 = \boldsymbol{\alpha} = \dot{\mathbf{a}}) \qquad (10.40)$$

y la aproximación a la satisfacción promediada de la Ec. (10.2) es simplemente

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \boldsymbol{\alpha}\Theta\Delta t) + \bar{\mathbf{f}}_n = \mathbf{0} \qquad (\Theta_1 = \Theta) \qquad (10.41)$$

con

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = \mathbf{a}_n$$

La solución de la Ec. (10.41) determina $\boldsymbol{\alpha}$ de la forma

$$\boldsymbol{\alpha} = -(\mathbf{C} + \Delta t\Theta\mathbf{K})^{-1}(\bar{\mathbf{f}} + \mathbf{K}\mathbf{a}_n) \qquad (10.42)$$

y finalmente

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\alpha}\Delta t \qquad (10.43)$$

El lector puede verificar que este proceso es idéntico al desarrollado en las Ecs. (10.7) a (10.11) y por lo tanto no precisa de mayor discusión excepto quizá para notar la forma computacional más elegante que se ha presentado aquí.

El algoritmo SS22. Con la Ec. (10.1) se considera un sistema de segundo orden ($j = 2$) en el que las condiciones iniciales necesarias precisan la especificación de dos cantidades, $\mathbf{a}_n$ y $\dot{\mathbf{a}}_n$. La elección más simple y natural aquí es especificar el mínimo valor de p, esto es, $p = 2$, ya que esto no precisa el cálculo de derivadas adicionales al comienzo. Este algoritmo, SS22, es *por tanto básico para ecuaciones dinámicas* y se presenta aquí en su forma completa.

A partir de la Ec. (10.31) la aproximación cuadrática es

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \dot{\mathbf{a}}_n\tau + \frac{\boldsymbol{\alpha}\tau^2}{2} \qquad (\boldsymbol{\alpha}_n^2 = \boldsymbol{\alpha} = \ddot{\mathbf{a}}) \qquad (10.44)$$

La forma aproximada de la ecuación dinámica "promedio" es ahora

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{C}(\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} + \boldsymbol{\alpha}\Theta_1\Delta t) + \mathbf{K}\left(\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}\Theta_2\Delta t^2}{2}\right) + \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \qquad (10.45)$$

con valores de predicción "medios"

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \dot{\mathbf{a}}_n \Delta t \Theta_1$$
$$\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n \tag{10.46}$$

Después de la evaluación de $\boldsymbol{\alpha}$ a partir de la Ec. (10.45), los valores de $\mathbf{a}_{n+1}$ se evalúan mediante las Ecs. (10.38) que ahora son simplemente

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \dot{\mathbf{a}}_n \Delta t + \frac{\boldsymbol{\alpha} \Delta t^2}{2}$$
$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \boldsymbol{\alpha} \Delta t \tag{10.47}$$

Esto completa el algoritmo, que es de gran valor práctico en la solución de problemas dinámicos.

En muchos aspectos este algoritmo recuerda el algoritmo de Newmark[33] que discutiremos en la siguiente sección y que se usa ampliamente en la práctica. De hecho, sus propiedaes de estabilidad resultan ser idénticas a las del algoritmo de Newmark, esto es

$$\Theta_1 = \gamma \quad \text{y} \quad \Theta_1 \geq \Theta_2 \geq \frac{1}{2} \qquad \text{para estabilidad incondicional}$$
$$\Theta_2 = 2\beta \tag{10.48}$$

En lo anterior, γ y β son los parámetros de Newmark usados convencionalmente.

Para $\Theta_2 = 0$ el algoritmo es "explícito" (suponiendo que tanto $\mathbf{M}$ y $\mathbf{C}$ sean diagonales) y puede hacerse condicionalmente estable si $\Theta_1 \geq \frac{1}{2}$.

El algoritmo es claramente aplicable a ecuaciones de primer orden (descrito como SS21) y se mostrará que las condiciones de estabilidad son idénticas.

10.3.3 *Algoritmo de colocación mediante serie truncada de Taylor GNpj.* Se demostrará que se obtiene de nuevo, como en la Sección 10.2.2, un proceso que no puede arrancar por sí mismo, y que es en la mayoría de los casos, sin embargo, un algoritmo similar al SSpj que hemos deducido. El método clásico de Newmark[33] se reconocerá como un caso particular, así como su derivación en una forma generalmente presentada en los textos existentes.[34] Debido a esta similitud llamaremos al nuevo algoritmo Newmark generalizado (GNpj).

En la deducción consideraremos la satisfacción de la ecuación de gobierno (10.1) sólo en los puntos extremos del intervalo Δt (colocación) y escribiremos

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{10.49}$$

con aproximaciones apropiadas para los valores de $\mathbf{a}_{n+1}$, $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ y $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$.†

Si se considera un desarrollo en serie truncada de Taylor similar al de la Ec. (10.15) para la función $\mathbf{a}$ y sus derivadas, se puede escribir

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \cdots + \frac{\Delta t^p}{p!} \overset{p}{\mathbf{a}}_n + \beta_p \frac{\Delta t^p}{p!} (\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1} - \overset{p}{\mathbf{a}}_n)$$
$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_n + \cdots + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \overset{p}{\mathbf{a}}_n + \beta_{p-1} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} (\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1} - \overset{p}{\mathbf{a}}_n)$$
$$\vdots \tag{10.50}$$
$$\overset{p-1}{\mathbf{a}}_{n+1} = \overset{p-1}{\mathbf{a}}_n + \Delta t \overset{p}{\mathbf{a}}_n + \beta_1 \Delta t (\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1} - \overset{p}{\mathbf{a}}_n) \qquad (\beta_0 = 1)$$

En las Ecs. (10.50) se ha introducido un polinomio de grado p más un término restante de serie de Taylor en cada uno de los desarrollos de la función y sus derivadas con parámetros $\beta_j, j = 1, 2, \cdots, p$, que pueden elegirse para dar buenas propiedades de aproximación al algoritmo.

La sustitución de los primeros tres desarrollos de (10.50) en la Ec. (10.49) da una única ecuación de la cual puede calcularse $\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1}$. Cuando éste ha sido determinado, pueden evaluarse $\mathbf{a}_{n+1}$ a $\overset{p-1}{\mathbf{a}}_{n+1}$ utilizando las Ecs. (10.50). La satisfacción de la Ec. (10.49) es casi una "colocación" que puede obtenerse sustituyendo las expresiones (10.50) en una forma de residuos ponderados (10.33) con $W = \delta(t_{n+1})$ (la delta de Dirac). Sin embargo, la serie no corresponde a una única función $\mathbf{a}$.

Se pueden escribir con detalle las tres primeras series de las Ecs. (10.50) de la forma

$$\mathbf{a}_{n+1} = \bar{\mathbf{a}}_{n+1} + \frac{\Delta t^p}{p!} \beta_p \overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1}$$
$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\bar{\mathbf{a}}}_{n+1} + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \beta_{p-1} \overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1} \tag{10.51}$$
$$\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} = \ddot{\bar{\mathbf{a}}}_{n+1} + \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \beta_{p-2} \overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1}$$

† Una alternativa consiste en usar un método de residuos ponderados en la ecuación de gobierno que da una generalización de la Ec. (10.11) de la forma

$$\frac{\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} - \dot{\mathbf{a}}_n)}{\Delta t} + \mathbf{C}[\dot{\mathbf{a}}_n + \Theta_1(\dot{\mathbf{a}}_{n+1} - \dot{\mathbf{a}}_n)] + \mathbf{K}[\mathbf{a}_n + \Theta_1(\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n)] + \mathbf{f}_n + \Theta_2(\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{f}_n) = \mathbf{0}$$

Esta forma puede combinarse con un método de residuos ponderados como el descrito en la referencia [16] o con un algoritmo de colocación como en la referencia [63]. Esto es similar al algoritmo descrito en esta sección aunque los parámetros óptimos son a menudo diferentes.

donde las contracciones $\bar{\mathbf{a}}$, $\dot{\bar{\mathbf{a}}}$ y $\ddot{\bar{\mathbf{a}}}$ son evidentes. Sustituyendo lo anterior en la Ec. (10.49) resulta

$$\mathbf{M}\left[\ddot{\bar{\mathbf{a}}}_{n+1} + \beta_{p-2}\frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!}\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1}\right] + \mathbf{C}\left[\dot{\bar{\mathbf{a}}}_{n+1} + \beta_{p-1}\frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!}\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1}\right]$$
$$+\mathbf{K}\left[\bar{\mathbf{a}}_{n+1} + \beta_{p}\frac{\Delta t^{p}}{p!}\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1}\right] + \mathbf{f}_{n+1} = 0 \qquad (10.52)$$

Resolviendo la ecuación anterior para $\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1}$ tenemos

$$\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1} = -\left[\frac{\mathbf{M}\Delta t^{p-2}\beta_{p-2}}{(p-2)!} + \frac{\mathbf{C}\Delta t^{p-1}\beta_{p-1}}{(p-1)!} + \frac{\mathbf{K}\Delta t^{p}\beta_{p}}{p!}\right]^{-1}$$
$$\times\left(\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{a}}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{a}}}_{n+1} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1}\right) \qquad (10.53)$$

Notamos inmediatamente que la expresión anterior es formalmente idéntica a la del algoritmo SSpj, Ec. (10.37), si hacemos

$$\beta_{p-2} = \Theta_{p-2} \qquad \beta_{p-1} = \Theta_{p-1} \qquad \beta_{p} = \Theta_{p} \qquad (10.54)$$

Sin embargo, $\bar{\mathbf{a}}_{n+1}$, $\dot{\bar{\mathbf{a}}}_{n+1}$, etc., en el método de Newmark generalizado, GNpj, no son idénticas a $\tilde{\mathbf{a}}_{n+1}$, $\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1}$, etc., en SSpj. En el algoritmo SSpj éstos representan valores de predicción medios en el intervalo Δt mientras que en los algoritmos GN representan valores de predicción en t_{n+1}.

El procedimiento de cálculo para los algoritmos GN es muy similar al de los algoritmos SS, comenzando ahora con los valores conocidos de $\mathbf{a}_n$ a $\overset{p}{\mathbf{a}}_n$. Como antes, tenemos las condiciones iniciales dadas y se puede utilizar la ecuacion diferencial y sus derivadas para generar las derivadas de $\mathbf{a}$ de mayor orden en $t = 0$. Sin embargo, el algoritmo GN precisa de mayor capacidad de almacenamiento y operaciones de ordenador debido a la necesidad de retener y utilizar $\overset{p}{\mathbf{a}}_0$ en el cálculo del siguiente paso de tiempo.

El miembro más importante de esta familia es, naturalmente, el algoritmo GN22.

El algoritmo de Newmark (GN22).[33] Este algoritmo ya ha sido mencionado, puesto que es uno de los más populares para análisis dinámico y se conoce como el esquema de Newmark. De hecho, es un caso especial del algoritmo general de la sección precedente en el que se usa una serie cuadrática ($p = 2$), siendo esto el mínimo requerido para problemas de segundo orden. Lo desarrollaremos aquí con detalle en vista de su extendido uso.

El desarrollo de la Ec. (10.50) es

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t\dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-\beta_2)\ddot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\beta_2\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$$
$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t(1-\beta_1)\ddot{\mathbf{a}}_n + \Delta t\beta_1\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \qquad (10.55)$$

Esto, conjuntamente con la ecuación dinámica (10.49),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0} \qquad (10.56)$$

permiten determinar las tres incógnitas $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$, $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ y $\mathbf{a}_{n+1}$.

Es cómodo proceder de la forma ya indicada y resolver primero $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$ sustituyendo (10.55) en (10.56). Esto resulta como primer paso en el equivalente de la Ec. (10.53):

$$\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} = -\left(\mathbf{M} + \mathbf{C}\beta_1\Delta t + \frac{\mathbf{K}\beta_2\Delta t^2}{2}\right)^{-1} \times \left\{\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{C}\left[\dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t(1-\beta_1)\ddot{\mathbf{a}}_n\right]\right.$$
$$\left. + \mathbf{K}\left[\mathbf{a}_n + \Delta t\dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-\beta_2)\ddot{\mathbf{a}}_n\right]\right\} \qquad (10.57)$$

Después de este paso los valores de $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ y $\mathbf{a}_{n+1}$ pueden encontrarse mediante sencillas operaciones vectoriales utilizando las Ecs. (10.55).

Algunos usuarios prefieren un procedimiento ligeramente más complicado en el que la primera incógnita determinada es $\mathbf{a}_{n+1}$. Esto resulta en

$$\mathbf{a}_{n+1} = \left(\mathbf{M} + \mathbf{C}\beta_1\Delta t + \frac{\mathbf{K}\beta_2\Delta t^2}{2}\right)^{-1}$$
$$\times\left\{\frac{-\beta_2\Delta t^2}{2}\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{C}\left[\frac{-\beta_2\Delta t^2}{2}(\dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t(1-\beta_1)\ddot{\mathbf{a}}_n)\right.\right.$$
$$\left. - \beta_1\Delta t\left(\mathbf{a}_n + \Delta t\dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-\beta_2)\ddot{\mathbf{a}}_n\right)\right]$$
$$\left. + \mathbf{M}\left[\mathbf{a}_n + \Delta t\dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-\beta_2)\ddot{\mathbf{a}}_n\right]\right\} \qquad (10.58)$$

que de nuevo proporciona $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ y $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$ utilizando las Ecs. (10.55). En este procedimiento la inversión es idéntica pero las operaciones vectoriales se

simplifican ligeramente.†

Volveremos al problema de la estabilidad más tarde pero anticiparemos aquí el resultado, que es que la estabilidad es incondicional para precisamente los mismos valores que los de la Ec. (10.48) si se identifica $\beta_1 = \Theta_1$ y $\beta_2 = \Theta_2$. De hecho, los requisitos de estabilidad para SS22 y GN22 son idénticos aunque los algoritmos son sólo similares.

Como en el caso general, $\beta_2 = 0$ produce un algoritmo explícito y la solución es muy sencilla si $\mathbf{M}$ y $\mathbf{C}$ se suponen diagonales.

Es interesante remarcar que la precisión puede mejorarse ligeramente y, sin embargo, preservar las ventajas de la forma explícita de los algoritmos SS/GN mediante un sencillo proceso iterativo. En éste (por ejemplo, para el algoritmo GN) se predice $\mathbf{a}^i_{n+1}$, $\dot{\mathbf{a}}^i_{n+1}$ y $\ddot{\mathbf{a}}^i_{n+1}$ utilizando las expresiones (10.51) con

$$(\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1})^{i-1}$$

haciendo para $i = 1$,

$$(\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1})^{0} = 0$$

Se continúa reescribiendo la ecuación de gobierno (10.52) de la forma

$$\mathbf{M}\left[(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1})^{i-1} + \beta_{p-2}\frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!}(\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1})^{i}\right] + \mathbf{C}\mathbf{a}^{i-1}_{n+1} + \mathbf{K}\ddot{\mathbf{a}}^{i-1}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{10.59}$$

y resolviendo para $(\overset{p}{\mathbf{a}}_{n+1})^i$.

Esta iteración de predicción/corrección se ha utilizado con éxito para varios algoritmos, aunque naturalmente las condiciones de estabilidad permanecen inalteradas con respecto a las de un algoritmo puramente explícito.[35]

10.3.4 *Estabilidad de los algoritmos generales.* La *consistencia* de los algoritmos generales del tipo SS y GN es evidente y viene asegurada por su formulación.

† Algunos programas escriben la Ec. (10.58) en una forma alternativa

$$\mathbf{a}_{n+1} = \left(\frac{2\mathbf{M}}{\beta_2\Delta t^2} + \frac{2\mathbf{C}\beta_1}{\beta_2\Delta t} + \mathbf{K}\right)^{-1}\{\mathbf{f}_{n+1} - \cdots$$

Esto tiene el mérito de proporcionar inmediatamente las soluciones estáticas ya que la inversión concierne a una matriz "de rigidez". Sin embargo, esta forma no es deseable ya que no permite el uso de la forma explícita, $\beta_2 = 0$.

De una forma similar a la usada en la Sección 10.2.5 se puede concluir que *el error local de truncamiento* es $0(\Delta t)^{p+1}$ ya que la serie contiene todos los téminos hasta τ^p. Sin embargo, el error total de truncamiento despúes de n pasos es $0(\Delta t)^p$ sólo para el sistema de ecuaciones de primer orden, siendo $0(\Delta t)^{p-1}$ para el de segundo. Se pueden encontrar detalles de las discusiones sobre precisión y las razones para esto en la referencia [6].

La cuestión de la estabilidad es de capital importancia, y en esta sección la discutiremos con detalle para los algoritmos de tipo SS. El establecimiento de condiciones similares para el algoritmo GN sigue exactamente el mismo procedimiento y puede dejarse como ejercicio para el lector. Es, sin embargo, importante remarcar aquí que se puede demostrar que:

a) los algoritmos SS y GN son generalmente similares en comportamiento, y
b) *sus condiciones de estabilidad son idénticas* (suponiendo $\Theta_p \equiv \beta_p$).

La prueba de esta última afirmación requiere algo de álgebra elaborada y se da en la referencia [6].

La determinación de los requisitos de estabilidad sigue exactamente la línea esbozada en la Sección 10.2.5. Sin embargo, por razones prácticas:

a) evitaremos escribir explícitamente la matriz de amplificación $\mathbf{A}$;
b) consideraremos el sistema de ecuaciones escalares obtenido a partir de la descomposición modal y sin términos de fuerza, esto es

$$m\ddot{a} + c\dot{a} + ka = 0 \tag{10.60}$$

Las Ecs. (10.35), (10.36) y (10.38) escritas en términos escalares definen los algoritmos de recurrencia. Para el caso homogéneo la solución general puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mu a_n \\ \dot{a}_{n+1} &= \mu \dot{a}_n \\ &\vdots \\ \overset{p-1}{a}_{n+1} &= \mu \overset{p-1}{a}_n \end{aligned} \tag{10.61}$$

y la sustitución de lo anterior en las ecuaciones que gobiernan la recurrencia permiten escribir de forma bastante general

$$\mathbf{S}\mathbf{X}_n = \mathbf{0} \tag{10.62}$$

donde

$$\mathbf{X}_n = \begin{Bmatrix} a_n \\ \Delta t \dot{a}_n \\ \vdots \\ \Delta t^{p-1}\overset{p-1}{a}_n \\ \Delta t^p \alpha_n \end{Bmatrix} \tag{10.63}$$

El lector puede verificar que la matriz $\mathbf{S}$ se puede escribir en forma compacta como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} b_0, & b_1, & b_2, \cdots, & b_{p-1}, & b_p \\ 1-\mu, & 1, & 1/2!, \cdots, & \dfrac{1}{(p-1)!}, & \dfrac{1}{p!} \\ 0, & 1-\mu, & 1, \cdots, & \dfrac{1}{(p-2)!}, & \dfrac{1}{(p-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \cdots, 1-\mu, & 1, & 1/2! \\ 0, & 0, & 0, \cdots, 0 & 1-\mu, & 1 \end{bmatrix} \tag{10.64}$$

donde

$$b_0 = \Theta_0 k \Delta t^2$$
$$b_1 = \Theta_0 c \Delta t + \Theta_1 k \Delta t^2, \qquad \Theta_0 = 1$$
$$b_q = \frac{\Theta_{q-2} m}{(q-2)!} + \frac{\Theta_{q-1} c \Delta t}{(q-1)!} + \frac{\Theta_q k \Delta t^2}{q!}, \qquad q = 2, 3, \cdots, p$$

Para que existan soluciones no triviales para el vector $\mathbf{X}_n$ es necesario que el determinante de $\mathbf{S}$ sea cero:

$$\det \mathbf{S} = 0 \tag{10.65}$$

Esto proporciona el *polinomio característico* en μ de orden p, del que se obtienen los valores propios de la matriz de amplificación, y para que exista estabilidad es necesario y suficiente que los módulos de todos los valores propios sean [véase Ec. (10.25)]

$$|\mu| \leq 1 \tag{10.66}$$

Nótese que en el caso de raíces repetidas el signo de igualdad no es aplicable. El lector habrá notado que la derivación directa del determinante de $\mathbf{S}$ es mucho más sencilla que obtener la matriz $\mathbf{A}$ y encontrar sus valores propios, pero los resultados son, naturalmente, idénticos.

El cálculo de los límites de estabilidad, incluso con el sistema de ecuaciones escalar (modal), no es trivial y por esta razón sólo lo haremos para $p = 2$ y $p = 3$ en lo que sigue. Sin embargo, se introducen a continuación dos procedimientos generales.

El primero de éstos es el llamado *transformación z*. Se utiliza un cambio de variable en el polinomio, haciendo

$$\mu = \frac{1+z}{1-z} \tag{10.67}$$

donde z y μ son en general números complejos. Es fácil demostrar que el requisito de la Ec. (10.66) es idéntico a exigir que *la parte real de z sea negativa* (véase Figura 10.11).

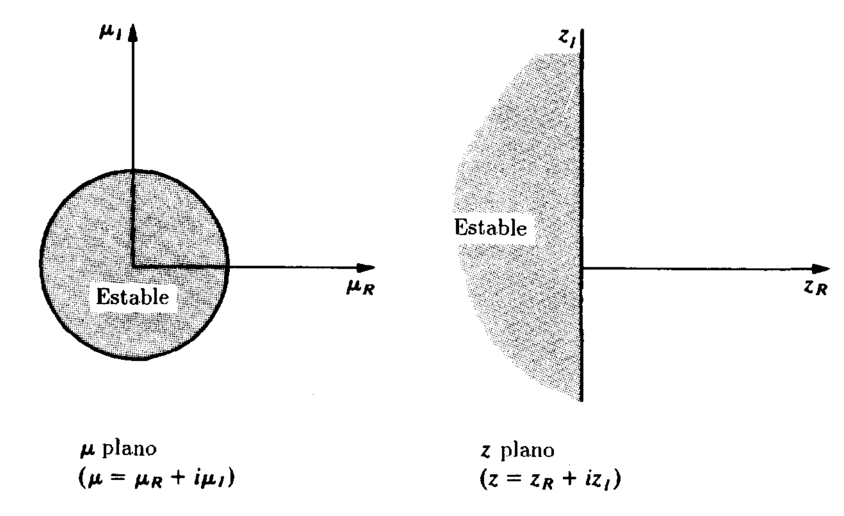


Figura 10.11 La transformación $\mu = (1+z)/(1-z)$.

El segundo es la conocida condición de Routh-Hurwitz[36-38] que establece que para un polinomio con $c_0 > 0$

$$c_0 z^n + c_1 z^{n+1} + \cdots + c_n = 0 \tag{10.68}$$

la parte real de todas las raíces será negativa si, para $c_1 > 0$,

$$\det \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\det \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} > 0 \qquad (10.69a)$$

y, de forma general,

$$\det \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & \cdots & \\ c_0 & c_2 & c_4 & \cdots & \\ 0 & c_1 & c_3 & \cdots & \\ 0 & 0 & c_2 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & & & & c_n \end{bmatrix} > 0 \qquad (10.69b)$$

Con estas herramientas en la mano se puede discutir con detalle la estabilidad de algoritmos específicos.

10.3.5 *Estabilidad de los algoritmos SS22/SS21.* Las relaciones de recurrencia para el algoritmo dado por las Ecs. (10.45) y (10.47) pueden escribirse después de sustituir

$$a_{n+1} = \mu a_n \qquad \text{y} \qquad \dot{a}_{n+1} = \mu \dot{a}_n \qquad f = 0 \qquad (10.70)$$

como

$$\begin{aligned} m\alpha + c(\dot{a}_n + \alpha\Theta_1\Delta t) + k\left(a_n + \dot{a}_n\Theta_1\Delta t + \frac{\alpha\Theta\Delta t^2}{2}\right) &= 0 \\ -\mu a_n + a_n + \dot{a}_n\Delta t + \frac{\alpha\Delta t^2}{2} &= 0 \quad (10.71) \\ -\mu\dot{a}_n + \dot{a}_n + \alpha\Delta t &= 0 \end{aligned}$$

Hacer el cambio de variable de la Ec. (10.67) resulta en un polinomio característico de la forma

$$c_0 z^2 + c_1 z + c_2 = 0 \qquad (10.72)$$

con

$$\begin{aligned} c_0 &= 4m + 2(2\Theta_1 - 1)c\Delta t + 2(\Theta_2 - \Theta_1)k\Delta t^2 \\ c_1 &= 2c\Delta t + k\Delta t^2(2\Theta_1 - 1) \\ c_2 &= k\Delta t^2 \end{aligned}$$

El requisito de estabilidad de Routh-Hurwitz es simplemente que

$$c_0 > 0 \qquad c_1 \geq 0 \qquad \det \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_0 & c_2 \end{bmatrix} > 0$$

o alternativamente

$$c_0 \geq 0 \qquad c_1 \geq 0 \qquad c_2 \geq 0 \qquad (10.73)$$

Estas desigualdades dan la condición de *estabilidad incondicional* de la forma

$$\Theta_2 \geq \Theta_1 \geq 0.5 \qquad (10.74)$$

Esta condición es también válida cuando $m = 0$, esto es, para el algoritmo SS21 (la ecuación de primer orden), aunque en dicho caso $\Theta_2 = \Theta_1$ debe ser excluida.

Naturalmente es posible satisfacer las desigualdades (10.73) sólo para ciertos valores de Δt, resultando en este caso estabilidad condicional. Para el proceso explícito $\Theta_2 = 0$ con los algoritmos SS22/SS21 las desigualdades (10.73) exigen que

$$\begin{aligned} 2m + (2\Theta_1 - 1)c\Delta t - \Theta_1 k\Delta t^2 &\geq 0 \\ 2c + (2\Theta_1 - 1)k\Delta t &\geq 0 \end{aligned} \qquad (10.75)$$

La segunda se satisface siempre que

$$\Theta_1 \geq 0.5 \qquad (10.76)$$

y para $\Theta_1 = 0.5$ la primera proporciona el requisito de que

$$\Delta t^2 \leq \frac{4m}{k} \qquad (10.77)$$

La última condición no permite un esquema implícito para SS21, esto es, cuando $m = 0$. Aquí, sin embargo, si hacemos $\Theta_1 > 0.5$ tenemos a partir de la segunda ecuación de (10.75)

$$\Delta t < \frac{c}{k}\,\frac{2\Theta_1 - 1}{\Theta_1} \qquad (10.78)$$

Es de interés para los problemas de dinámica estructural considerar la naturaleza de las cotas en una situación elástica. Podemos usar el mismo proceso que el descrito en la Sección 10.2.5 para los problemas de primer orden del tipo de transmisión térmica. Mirando a un único elemento con

un único grado de libertad se obtiene en lugar de la condición (10.77) (para matrices de masa consistentes)

$$\Delta t \leq \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \frac{h}{C} = \Delta t_{crit}$$

donde h es el tamaño del elemento, y

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

es la velocidad de propagación de las ondas elásticas (para matrices aglutinadas el factor es $2/\sqrt{2}$).

De nuevo el tamaño del elemento más pequeño gobierna la estabilidad pero es interesante notar que en problemas dinámicos el paso de tiempo crítico es proporcional a h mientras que, para problemas de primer orden es proporcional a h^2, como demuestra la Ec. (10.29). Claramente, para mallas de tamaño decreciente los esquemas explícitos en problemas dinámicos son más realistas que en análisis térmico y, como se verá más adelante, son tremendamente populares.

10.3.6 *Estabilidad de varios esquemas de alto orden y su equivalencia con algunas alternativas conocidas.* Idénticas consideraciones de estabilidad que las descritas en las secciones precedentes pueden aplicarse a SS32/31 y aproximaciones de mayor orden. Se citan a continuacion algunos resultados omitiéndose el álgebra.[6]

SS32/31. Para amortiguamiento nulo ($C = 0$) con el algoritmo SS32 se requiere para estabilidad condicional que

$$\Theta_1 > \frac{1}{2} \qquad \Theta_2 \geq \Theta_1 + \frac{1}{6} \qquad \Theta_3 \geq \frac{3}{2} \qquad \Theta_2 \geq \frac{1}{4} \tag{10.79}$$

y

$$3\Theta_1\Theta_2 - 3\Theta_1^2 + \Theta_1 \geq \Theta_3$$

Para problemas de primer orden ($m = 0$), esto es, SS31, los primeros requisitos son como en los problemas dinámicos, pero el último se transforma en

$$3\Theta_1\Theta_2 - 3\Theta_1^2 + \Theta_1 \geq \Theta_3 - \frac{[6\Theta_1(\Theta_1 - 1) + 1]^2}{9(2\Theta_1 - 1)} \tag{10.80}$$

Con $\Theta_3 = 0$, esto es, un esquema explícito cuando $c = 0$,

$$\Delta t^2 \leq \frac{m}{k} \frac{12(2\Theta_1 - 1)}{6\Theta_2 - 1} \tag{10.81a}$$

y cuando $m = 0$,

$$\Delta t \leq \frac{c}{k} \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{6\Theta_2 - 1} \tag{10.81b}$$

SS42/41. Para éste (y para órdenes mayores) no existe estabilidad incondicional en problemas dinámicos con $m \neq 0$. Esto es una consecuencia del teorema de Dahlquist.[39] El esquema SS41 puede tener estabilidad incondicional, pero las expresiones generales para esto son engorrosas. Citamos un ejemplo que es incondicionalmente estable:

$$\Theta_1 = \frac{5}{2} \qquad \Theta_2 = \frac{35}{6} \qquad \Theta_3 = \frac{25}{2} \qquad \Theta_4 = 24$$

Este conjunto de valores corresponde a un algoritmo en diferencias hacia atrás de cuatro pasos de Gear.[40]

Es de interés general remarcar que ciertos miembros de las familias de algoritmos SS (o GN) son similares en comportamiento e idénticos en cuanto a estabilidad (y, por tanto, en recurrencia) a otros publicados en la vasta literatura sobre el tema. Cada algoritmo pretende tener ventajas y propiedades particulares. En las Tablas 10.2 a 10.4 se muestran algunos miembros de esta familia.[30,39–46] Claramente, en las fórmulas generales están presentes muchos más algoritmos aplicables y el estudio de sus ventajas está todavía por hacerse.

Subrayemos aquí que siempre existe identidad de estabilidad y recurrencia con algoritmos de multipaso, los cuales serán discutidos en la siguiente sección.

MÉTODOS DE MULTIPASO

10.4 Algoritmos de recurrencia multipaso

10.4.1 *Introducción.* En las secciones precedentes nos hemos ocupado de algoritmos de recurrencia válidos dentro de un único paso de tiempo y que relacionan los valores de $\mathbf{a}_{n+1}$, $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$, $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$ con los de $\mathbf{a}_n$, $\dot{\mathbf{a}}_n$, $\ddot{\mathbf{a}}_n$, etc. Utilizando procedimientos muy similares a los introducidos anteriormente es posible deducir algoritmos de paso múltiple (o multipaso) en los cuales se relaciona $\mathbf{a}_{n+1}$ con los valores de $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_{n-2}$, etc., sin introducir explícitamente las derivadas y suponiendo que cada conjunto está separado por un intervalo igual Δt. En general, tales algoritmos son menos cómodos de usar que los procesos de paso único, ya que no permiten un cambio fácil en el tamaño del paso de tiempo. Sin embargo, mucho del trabajo clásico en problemas de estabilidad y precisión se ha realizado para tales algoritmos de multipaso y por tanto merecen una mención aquí.

TABLA 10.2
SS21 EQUIVALENTES

Algoritmo	Valores de Theta
Zlamal[30]	$\Theta_1 = \frac{5}{6}$, $\Theta_2 = 2$
Gear[40]	$\Theta_1 = \frac{3}{2}$, $\Theta_2 = 2$
Liniger[41]	$\Theta_1 = 1.0848$, $\Theta_2 = 1$
Liniger[41]	$\Theta_1 = 1.2184$, $\Theta_2 = 1.292$

TABLA 10.3
SS31 EQUIVALENTES

Algoritmo	Valores de Theta
Gear[40]	$\Theta_1 = 2$, $\Theta_2 = \frac{11}{3}$, $\Theta_3 = 6$
Liniger[41]	$\Theta_1 = 1.84$, $\Theta_2 = 3.07$, $\Theta_3 = 4.5$
Zlamal[30]	$\Theta_1 = 0.8$, $\Theta_2 = 1.03$, $\Theta_3 = 1.29$

TABLA 10.4
SS32 EQUIVALENTES[47]

Algoritmo	Valores de Theta
Houbolt[42]	$\Theta_1 = 2$, $\Theta_2 = \frac{11}{3}$, $\Theta_3 = 6$
Wilson[43,44]	$\Theta_1 = \Theta$, $\Theta_2 = \Theta^2$, $\Theta_3 = \Theta^3$ ($\Theta = 1.4$ común)
Bossak-Newmark[45] $(m\ddot{x} + kx = 0,$ $\gamma_B = \frac{1}{2} - \alpha_B)$	$\Theta_1 = 1 - \alpha_B$ $\Theta_2 = \frac{2}{3} - \alpha_B + 2\beta_B$ $\Theta_3 = 6\beta_B$
Bossak-Newmark[45] $(m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0,$ $\gamma_B = \frac{1}{2} - \alpha_B,$ $\beta_B = \frac{1}{6} - \alpha_B/2)$	$\Theta_1 = 1 - \alpha_B$ $\Theta_2 = 1 - 2\alpha_B$ $\Theta_3 = 1 - 3\alpha_B$
Hilber-Hughes-Taylor[46] $(m\ddot{x} + kx = 0,$ $\gamma_H = \frac{1}{2} - \alpha_H)$	$\Theta_1 = 1$ $\Theta_2 = \frac{2}{3} + 2\beta_H - 2\alpha_H^2$ $\Theta_3 = 6\beta_H(1 + \alpha_H)$

Se demostrará en esta sección que una serie de tales algoritmos puede derivarse sencillamente utilizando el procedimiento de residuos ponderados y que este conjunto tiene idénticas propiedades de estabilidad y precisión que los esquemas SSpj.

10.4.2 *Procedimiento de aproximación para un algoritmo general de multipaso.* Como en la Sección 10.3.2 aproximaremos la función $\mathbf{a}$ de la ecuación de segundo orden

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{10.82}$$

mediante una serie polinómica de orden p, ahora con la única incógnita $\mathbf{a}_{n+1}$. Este polinomio toma el valor de $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{a}_{n-1}, \cdots$, $\mathbf{a}_{n-p+1}$ para los tiempos apropiados (Figura 10.12). Se puede escribir este polinomio de forma

$$\mathbf{a} = \sum_{j=-p+1}^{1} N_j \mathbf{a}_{n+j} \tag{10.83}$$

donde

$$N_j = N_j(\xi) = \prod_{\substack{k=-p+1\\k\neq j}}^{1} \frac{\xi - k}{i - k} \tag{10.84}$$

$$\xi = \frac{\tau}{\Delta t}, \qquad -p+1 \leq \xi \leq 1$$
$$j = -p+1, -p+2, \cdots, 0, 1 \tag{10.85}$$

y $N_j(\xi)$ son las funciones de interpolación de Lagrange (véase Capítulo 7 del Volumen 1).

Se pueden diferenciar las Ecs. (10.84) para obtener

$$N_j'(\xi) = \sum_{\substack{k=-p+1\\k\neq j}}^{1} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{l=-p+1\\l\neq k\\l\neq j}}^{1} (\xi - l)}{\displaystyle\prod_{\substack{k=-p+1\\k\neq j}}^{1} (j-k)} \tag{10.86}$$

y

$$N_j''(\xi) = \sum_{\substack{k=-p+1\\k\neq j}}^{1} \sum_{\substack{l=-p+1\\l\neq k\\l\neq j}}^{1} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{m=-p+1\\m\neq k\\m\neq j\\m\neq l}}^{1} (\xi - m)}{\displaystyle\prod_{\substack{k=-p+1\\k\neq j}}^{1} (j-k)} \tag{10.87}$$

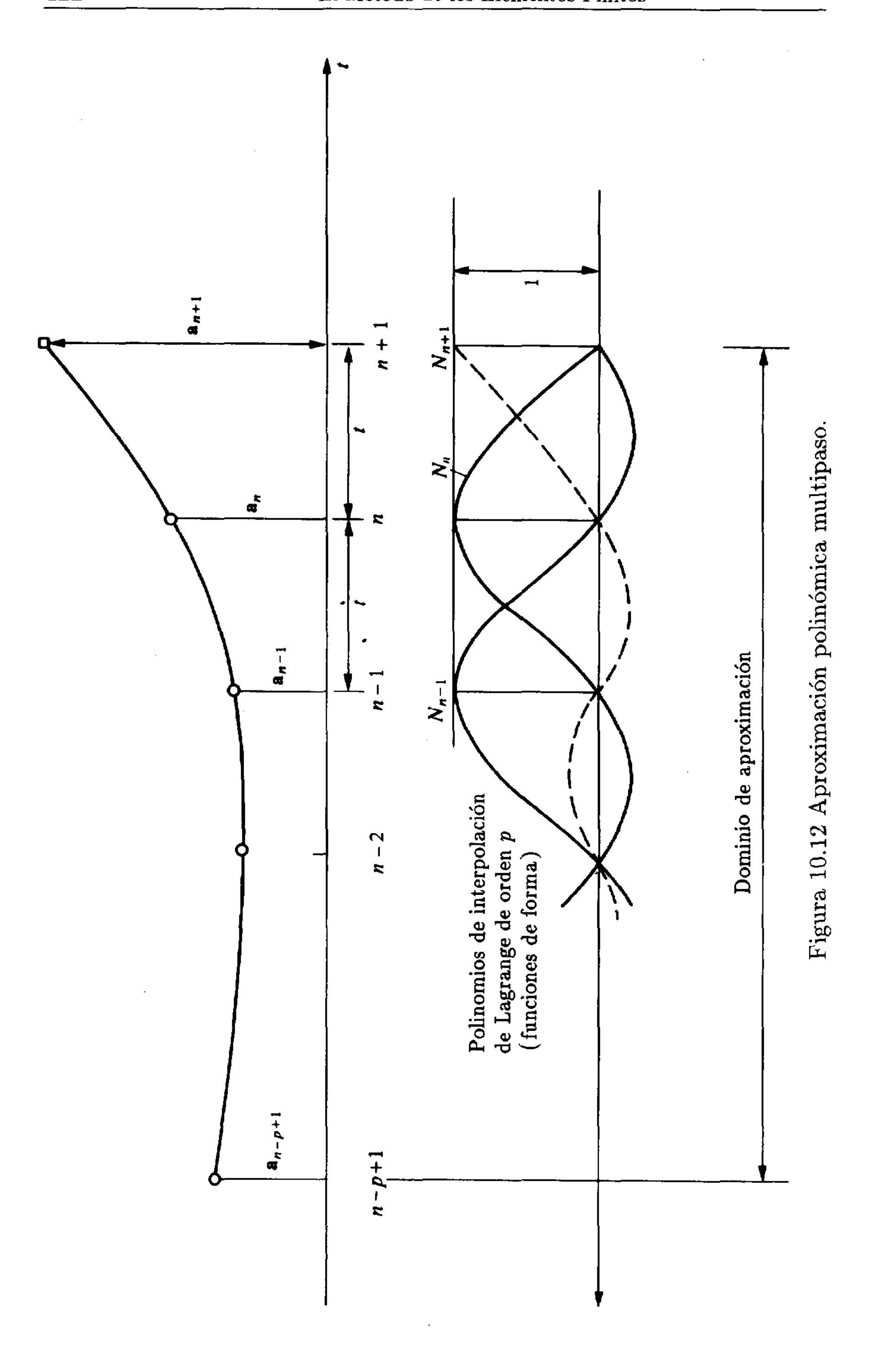


Figura 10.12 Aproximación polinómica multipaso.

Estas expresiones se pueden sustituir en la Ec. (10.83), dando

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=-p+1}^{1} N_j'(\xi)\mathbf{a}_{n+j} \tag{10.88}$$

y

$$\ddot{\mathbf{a}} = \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{j=-p+1}^{1} N_j''(\xi)\mathbf{a}_{n+j} \tag{10.89}$$

La sustitución de $\mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{a}}$ y $\ddot{\mathbf{a}}$ en la forma de residuos ponderados de la Ec. (10.82) resulta en

$$\int_{-p+1}^{1} W(\xi) \left[\sum_{j=-p+1}^{1} \mathbf{M}N_j''(\xi)\mathbf{a}_{n+j} + \Delta t\mathbf{C} \sum_{j=-p+1}^{1} N_j'(\xi)\mathbf{a}_{n+j} + \Delta t^2\mathbf{K} \sum_{j=-p+1}^{1} N_j(\xi)\mathbf{a}_{n+j} + \Delta t^2 \sum_{j=-p+1}^{1} N_j(\xi)\mathbf{f}_{n+j} \right] d\xi = 0 \tag{10.90}$$

con la función de fuerza interpolada de forma similar a partir de sus valores nodales.

Utilizando los parámetros

$$\phi_q = \frac{\int_0^1 W\xi^q \, d\xi}{\int_0^1 W\xi \, d\xi}, \qquad q = 1, 2, \cdots, p; \quad \phi_0 = 1 \tag{10.91}$$

se tiene ahora un algoritmo que permite calular $\mathbf{a}_{n+1}$ a partir de los valores conocidos $\mathbf{a}_{p+1}$, $\mathbf{a}_{p+2}, \cdots$, $\mathbf{a}_n$. [*Nota:* mientras los límites de integración $-p+1$, $-p+2$ sean los *mismos* en las Ecs. (10.90) y (10.91), no hay diferencia como se elijan].

Por ejemplo, para $p = 3$, la Ec. (10.84) da

$$\begin{aligned}
N_{-2}(\xi) &= \frac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{(2)(-3)} = -\frac{1}{6}(\xi^3 - \xi) \\
N_{-1}(\xi) &= \frac{(\xi+2)\xi(\xi-1)}{(-2)} = \frac{1}{2}(\xi^3 + \xi^2 - 2\xi) \\
N_0(\xi) &= \frac{(\xi+2)(\xi+1)(\xi-1)}{(-2)} = \frac{1}{2}(\xi^3 + 2\xi^2 - \xi - 2) \\
N_1(\xi) &= \frac{(\xi+2)(\xi+1)\xi}{(3)(2)(1)} = \frac{1}{6}(\xi^3 + 3\xi^2 + 2\xi)
\end{aligned} \tag{10.92a}$$

De forma similar, a partir de las Ecs. (10.86) y (10.87),

$$
\begin{aligned}
N'_{-2}(\xi) &= \frac{1}{6}[\xi(\xi-1)+(\xi+1)(\xi-1)+(\xi+1)] = \frac{1}{6}(3\xi^2-1) \\
N'_{-1}(\xi) &= \frac{1}{2}[\xi(\xi-1)+(\xi+2)(\xi-1)+(\xi+2)] = \frac{1}{2}(3\xi^2+2\xi-2) \\
N'_{0}(\xi) &= -\frac{1}{2}[(\xi+1)(\xi-1)+(\xi+2)(\xi-1)+(\xi+2)(\xi+1)] \\
&= -\frac{1}{2}(3\xi^2+4\xi-1) \qquad (10.92b) \\
N'_{-1}(\xi) &= \frac{1}{6}[(\xi+1)\xi+(\xi+2)\xi+(\xi+2)(\xi+1)] \\
&= \frac{1}{6}(3\xi^2+6\xi+2)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
N''_{-2}(\xi) &= -\xi \\
N''_{-1}(\xi) &= 3\xi+1 \qquad (10.92c) \\
N''_{0}(\xi) &= -3\xi-2 \\
N''_{1}(\xi) &= \xi+1
\end{aligned}
$$

Tenemos ahora un algoritmo de tres pasos para la solución de la Ec. (10.82) que toma la forma (haciendo $f=0$)

$$
\sum_{j=-2}^{1}[\alpha_{j+2}\mathbf{M}+\gamma_{j+2}\Delta t\mathbf{C}+\beta_{j+2}\Delta t^2\mathbf{K}]\mathbf{a}_{n+j}=0 \qquad (10.93)
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\alpha_{j+2} &= \int_0^1 W(\xi)N''_j(\xi)\,d\xi \\
\gamma_{j+2} &= \int_0^1 W(\xi)N'_j(\xi)\,d\xi \qquad (10.94)
\end{aligned}
$$

y

$$
\beta_{j+2} = \int_0^1 W(\xi)N_j(\xi)\,d\xi
$$

obteniéndose tras la integración

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = -\phi_1 \quad , \quad \alpha_1 = 3\phi_1+1 \\
&\alpha_2 = -3\phi_1-2 \quad , \quad \alpha_3 = \phi_1+1 \\
&\gamma_0 = -\frac{1}{2}\phi_2+\frac{1}{6} \\
&\gamma_1 = \frac{3}{2}\phi_2+\phi_1-1 \\
&\gamma_2 = -\frac{3}{2}\phi_2-2\phi_1+\frac{1}{2} \\
&\gamma_3 = \frac{1}{2}\phi_2+\phi_1+\frac{1}{3} \qquad (10.95) \\
&\beta_0 = -\frac{1}{6}\phi_3+\frac{1}{6}\phi_1 \\
&\beta_1 = \frac{1}{2}\phi_3+\frac{1}{2}\phi_2-\phi_1 \\
&\beta_2 = -\frac{1}{2}\phi_3-\phi_2+\frac{1}{2}\phi_1+1 \\
&\beta_3 = \frac{1}{6}\phi_3+\frac{1}{2}\phi_2+\frac{1}{3}\phi_1
\end{aligned}
$$

Un algoritmo de la forma dada por la Ec. (10.93) se llama un método lineal de tres pasos. La forma general de un método de p-pasos es

$$
\sum_{j=-p+1}^{1}(\alpha_{j+p-1}\mathbf{M}+\gamma_{j+p-1}\Delta t\mathbf{C}+\beta_{j+p-1}\Delta t^2\mathbf{K})\mathbf{a}_{n+j}=\mathbf{0} \qquad (10.96)
$$

Ésta es la forma que se da generalmente en los textos de matemáticas; constituye una extensión de la forma dada por Lambert[2] para $\mathbf{C}=\mathbf{0}$. El procedimiento de residuos ponderados descrito aquí deduce los parámetros α, β y γ en función de los parámetros ϕ_0, $\phi_1, \cdots$, ϕ_p, y garantiza de esta forma la consistencia.

La incógnita $\mathbf{a}_{n+1}$ se obtiene a partir de la Ec. (10.96) de la forma

$$
\mathbf{a}_{n+1} = (\alpha_3\mathbf{M}+\gamma_3\Delta t\mathbf{C}+\beta_3\Delta t^2\mathbf{K})^{-1} \qquad \text{(valores conocidos)} \qquad (10.97)
$$

Por ejemplo, para $p=3$ la matriz a invertir es

$$
[(\phi_1+1)\mathbf{M}+(\frac{1}{2}\phi_2+\phi_1+\frac{1}{3})\Delta t\mathbf{C}+(\frac{1}{6}\phi_3+\frac{1}{2}\phi_2+\frac{1}{3}\phi_1)\Delta t^2\mathbf{K}]
$$

La comparación de ésta con la matriz que debe invertirse en el algoritmo SSpj dado en la Ec. (10.37) sugiere una correspondencia entre SSpj y el

algoritmo anterior de p pasos que exploraremos con detalle en la próxima sección.

10.4.3 *Relación entre SSpj y el algoritmo de residuos ponderados de p-pasos.* Por sencillez se considerará ahora el algoritmo de p-pasos descrito en la sección precedente aplicado a la ecuación escalar

$$m\ddot{a} + c\dot{a} + ka = 0 \tag{10.98}$$

Como en las consideraciones de estabilidad anteriores se puede obtener la solución general para la relación de recurrencia

$$\sum_{j=-p+1}^{1} (\alpha_{j+p-1}m + \Delta t\gamma_{j+p-1}c + \Delta t^2\beta_{j+p-1}k)a_{n+j} = 0 \tag{10.99}$$

escribiendo $a_{n+1} = \mu$, $a_n = \mu^2$, $a_{n-1} = \cdots$ donde los valores de μ son las raíces μ_k del polinomio de estabilidad del algoritmo de p-pasos:

$$\sum_{j=-p+1}^{1} (\alpha_{j+p-1}m + \Delta tc\gamma_{j+p-1} + \Delta t^2\beta_{j+p-1}k)\mu^{p-1+j} = 0 \tag{10.100}$$

Se puede identificar este polinomio de estabilidad de forma bastante general con el resultante del determinante de la Ec. (10.64), tal como se muestra en la referencia [6], utilizando un adecuado conjunto de relaciones entre Θ y ϕ. Así, por ejemplo, en el caso $p = 3$ que se discute, se tiene la identidad de estabilidad y ciertamente del propio algoritmo cuando

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= 1 + \phi_1\\ \Theta_2 &= \frac{2}{3} + 2\phi_1 + \phi_2\\ \Theta_3 &= \phi_3 + 3\phi_2 + 2\phi_1\end{aligned} \tag{10.101}$$

La Tabla 10.5 resume las identidades para $p = 2, 3$ y 4.

Muchos resultados obtenidos previamente para los métodos de p-pasos[15,47] pueden ser usados para conocer las propiedades de precisión y estabilidad de las soluciones producidas por los algoritmos SSpj. Las Tablas 10.6 y 10.7 dan la precisión de algoritmos estables de las familias de SSp1 y SSp2, respectivamente, para $p = 2, 3, 4$. Los algoritmos que son solamente condicionalmente estables (esto es, estables solamente para valores del paso de tiempo menores que un cierto valor crítico) están marcados como CS. En la referencia [2] se dan más detalles.

TABLA 10.5

SS22/21	
	$\Theta_1 = \phi_1 + \frac{1}{2}$
	$\Theta_2 = \phi_1 + \phi_2$
SS32/31	
	$\Theta_1 = \phi_1 + 1$
	$\Theta_2 = \frac{2}{3} + 2\phi_1 + \phi_2$
	$\Theta_3 = 2\phi_1 + 3\phi_2 + \phi_3$
SS42/41	
	$\Theta_1 = \frac{3}{2} + \phi_1$
	$\Theta_2 = \frac{11}{6} + 3\phi_1 + \phi_2$
	$\Theta_3 = \frac{3}{2} + 11\phi_1/2 + 9\phi_2/2 + \phi_3$
	$\Theta_4 = 6\phi_1 + 11\phi_2 + 6\phi_3 + \phi_4$

TABLA 10.6

Método	Parámetros	Error
SS11	Θ_1	$0(\Delta t)$
	$\Theta_1 = 0.5$	$0(\Delta t^2)$
SS21	Θ_1, Θ_2	$0(\Delta t^2)$
	$\Theta_1 - \Theta_2 = \frac{1}{6}$	$0(\Delta t^2)$CS
SS31	$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$	$0(\Delta t^3)$
	$\Theta_1 - 3\Theta_2 + 2\Theta_3 = 0$	$0(\Delta t^4)$CS
SS41	$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$	$0(\Delta t^4)$

Se concluye esta sección escribiendo de forma completa el algoritmo de segundo orden (dos pasos) que corresponde precisamente a los métodos SS22 y GN22. De hecho, se escribe en la forma deducida originalmente por Newmark:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{M} + \Delta t\mathbf{C} + \beta\Delta t^2\mathbf{K})\mathbf{a}_{n+1}\\ &\quad + [-2\mathbf{M} + (1-2\gamma)\Delta t\mathbf{C} + (\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma)\Delta t^2\mathbf{K}]\mathbf{a}_n\\ &\quad + [\mathbf{M} - (1-\gamma)\Delta t\mathbf{C} + (\frac{1}{2} + \beta - \gamma)\Delta t^2\mathbf{K}]\mathbf{a}_{n-1} + \bar{\mathbf{f}}\Delta t^2 = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{10.102}$$

Aquí, naturalmente, se han utilizado los parámetros originales de New-

TABLA 10.7

Método	Parámetros	Error	
		$C=0$	$C\neq 0$
SS22	Θ_1, Θ_2	$0(\Delta t)$	$0(\Delta t)$
	$\Theta_1, \Theta_2 = 0.5$	$0(\Delta t^2)$	$0(\Delta t^2)$
	$\Theta_1 = 0.5, \Theta_2 = \frac{1}{6}$	$0(\Delta t^4)$CS	$0(\Delta t^2)$CS
SS32	$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$	$0(\Delta t^2)$	$0(\Delta t^2)$
	$\Theta_2 = \Theta_1 - \frac{1}{6}$	$0(\Delta t^3)$CS	$0(\Delta t^3)$CS
	$\Theta_3 = \Theta_1/2$	$0(\Delta t^4)$CS	—
SS42	$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$	$0(\Delta t^3)$CS	$0(\Delta t^3)$CS

mark, que se pueden cambiar para corresponderse con la forma SS22/GN22 como sigue:

$$\gamma = \Theta_1 = \beta_1 \qquad \beta = \frac{1}{2}\Theta_2 = \frac{1}{2}\beta_2$$

La forma explícita de este algoritmo ($\Theta_2 = 0$) se usa frecuentemente como alternativa de la forma explícita de paso único. Se le conoce entonces como *aproximación de diferencias centrales* y se obtiene por diferenciación directa. El lector puede verificar fácilmente que la aproximación por diferencias finitas más sencilla de la Ec. (10.1) corresponde de hecho a lo anterior con $\Theta_1 = \frac{1}{2}$, $\Theta_2 = 0$.

10.5 Algunas consideraciones sobre el comportamiento general de los algoritmos numéricos

En las Secciones 10.2.5 y 10.3.3 se ha considerado la solución exacta de los algoritmos aproximados de recurrencia de la forma

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mu \mathbf{a}_n, \qquad \text{etc.} \tag{10.103}$$

para los sistemas descompuestos modalmente, de un único grado de libertad, típicos de las Ecs. (10.4) y (10.5). La evaluación de μ es importante para asegurar que su módulo no excede la unidad y se conserva así la estabilidad.

Sin embargo, la solución análitica de ecuaciones lineales homogéneas es fácil de obtener, y la comparación de μ con dicha solución, que siempre es de la forma

$$a = \tilde{a}e^{\lambda t} \tag{10.104a}$$

o bien

$$a_{n+1} = a_n e^{\lambda \Delta t} \tag{10.104b}$$

es instructiva y proporciona información sobre el comportamiento del algoritmo dentro de un rango particular de valores propios.

En la Figura 10.5 se ha dibujado la solución exacta $e^{\omega \Delta t}$ y su comparación con los valores de μ para varios algoritmos Θ que aproximan la ecuación de primer orden, con la observación de que aquí

$$\lambda \equiv -\omega = -\frac{k}{c} \tag{10.105}$$

y es real.

Se observa inmediatamente que el error de comportamiento es muy diferente para diversos valores de Δt y obviamente empeora para los valores mayores. Naturalmente tales valores en un problema real multivariable corresponden a las respuestas "de alta frecuencia" que son menos importantes, y para obtener soluciones suavizadas se prefieren algoritmos en los que μ tienda a cero en tales valores. Sin embargo, la respuesta a través del rango completo de tiempo es importante y los intentos de Liniger[41] para escoger, por ejemplo, el valor óptimo de Θ consideran varios rangos de tiempo. La Tabla 10.1 de la Sección 10.2.6 ilustra como un algoritmo $\Theta = \frac{2}{3}$ con un error de truncamento mayor que el de $\Theta = \frac{1}{2}$ puede comportarse mejor en un sistema multidimensional debido a tales propiedades.

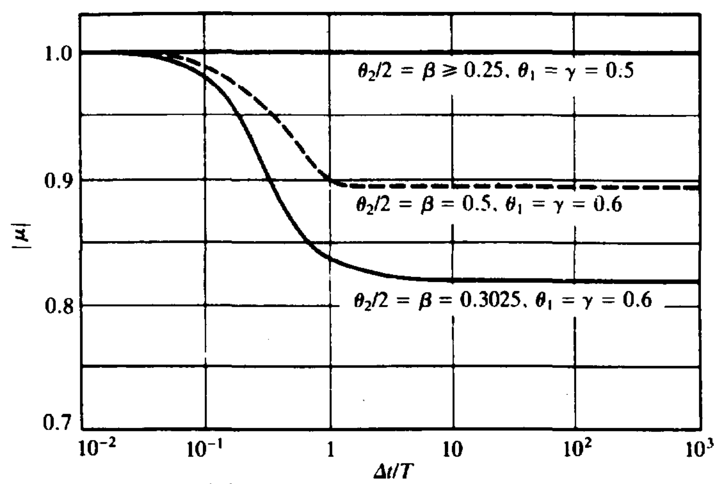
Naturalmente se pueden aplicar análisis similares a la ecuación de segundo orden. Para simplificar el tema frecuentemente se considera solamente la ecuación sin amortiguamiento en la forma

$$m\ddot{a} + ka = 0 \tag{10.106}$$

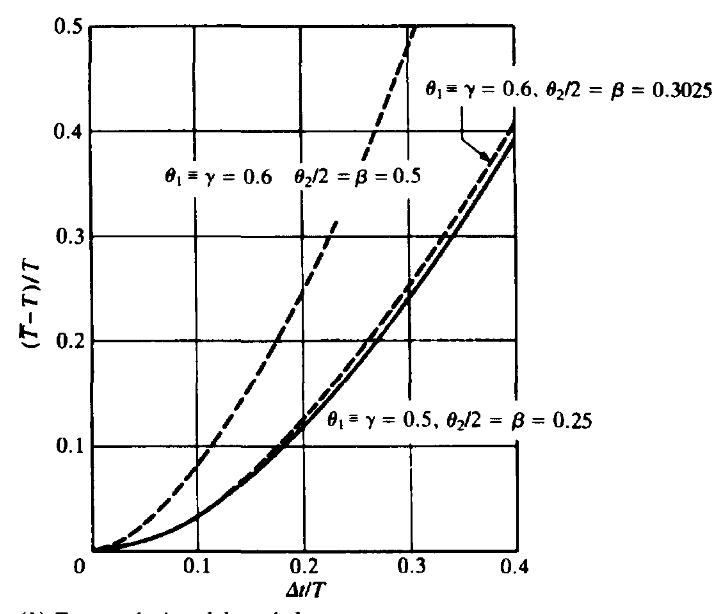
en la cual el valor de λ es puramente imaginario y corresponde a una única oscilación. Examinando μ se puede encontrar no solamente la relación de amplitud (que para alta precisión debería ser la unidad) sino también el retardo de fase.

En la Figura 10.13(a) y (b) se muestra tanto la variación del módulo μ (esto es, el radio espectral) como el período relativo para los esquemas SS22/GN22, que naturalmente son también aplicables a sus equivalentes de dos pasos. Los resultados se dibujan en función de

$$\Delta t/T \qquad \text{donde } T = 2\pi/\omega; \;\; \omega^2 = k/m \tag{10.107}$$



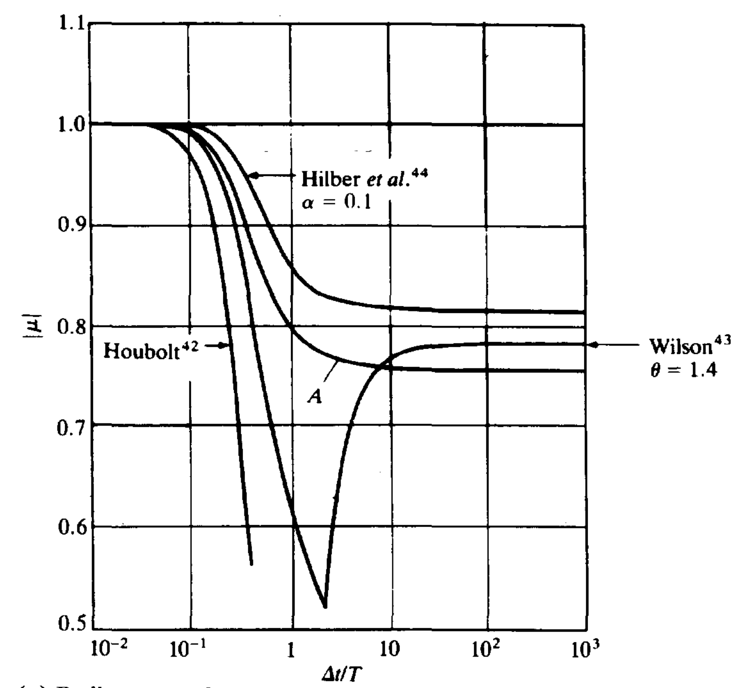
(a) Radio espectral $|\mu|$



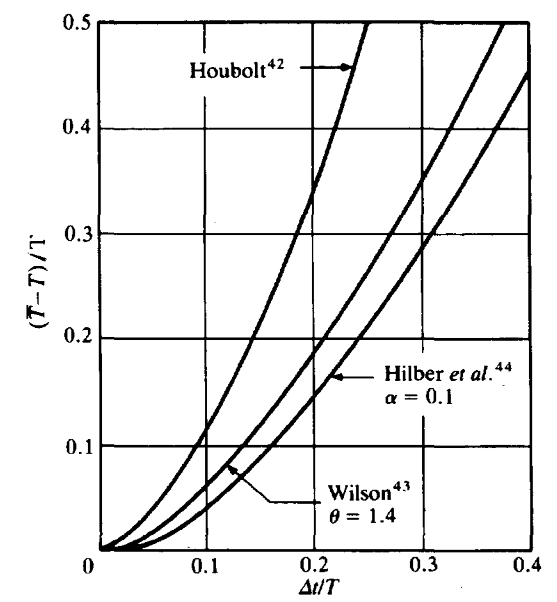
(b) Error relativo del período

Figura 10.13 SS22, GN22 (Newmark) o su equivalente de dos pasos.

En la Figuras 10.14(a) y (b) se dan curvas similares para los esquemas SS23 y GN23 que se usan frecuentemente en la práctica y que se han discutido previamente.



(a) Radio espectral



(b) Error relativo del período

Figura 10.14 SS23, GN23 y sus equivalentes de dos pasos.

Aquí, como en el problema de primer orden, deseamos suprimir (o amortiguar) la respuesta de las frecuencias en las que $\Delta t/T$ es grande (por ejemplo $> \frac{1}{10}$) para los sistemas de múltiples grados de libertad, ya que tal respuesta será invariablemente imprecisa. Al mismo tiempo es deseable por debajo de este límite tener las relaciones de amplitud tan cercanas a la unidad como sea posible. Resulta claro que el límite de estabilidad con $\Theta = \Theta_2 = \frac{1}{2}$ que da respuesta unidad en todas partes es, en general, no deseable (a menos que el amortiguamiento físico sea suficiente para eliminar las altas frecuencias) y que es necesario un cierto amortiguamiento algorítmico. Los diversos esquemas mostrados en la Figuras 10.13 y 10.14 se pueden juzgar en consecuencia y explican la razón para la búsqueda de un algoritmo óptimo.

Se ha comentado frecuentemente que aunque los esquemas pueden ser idénticos en relación a la estabilidad, sus comportamientos pueden ser ligeramente diferentes. En la Figura 10.15 se muestra la aplicación en paralelo de SS22 y GN22 a un sistema de un único grado de libertad, mostrando resultados y errores para cada esquema.

10.6 Problemas no lineales

10.6.1 *Consideraciones introductorias.* Se ha mencionado al principio de este capítulo que el típico problema transitorio lineal dado por la ecuación diferencial ordinaria (10.1) (válida tanto para problemas de primer como de segundo orden) puede volverse no lineal. La Ec. (10.3) muestra una forma típica de dicha no linealidad, ya que muestra una dependencia con la función incógnita $\mathbf{a}$. Limitaremos nuestra atención a este tipo de problemas. A veces es posible que la dependencia sea respecto a $\dot{\mathbf{a}}$ y $\ddot{\mathbf{a}}$, y la extensión a tales problemas sigue líneas similares a las que describiremos a continuación. Afortunadamente este último tipo de problemas es raro.

Algunos típicos problemas no lineales que ocurren en la ecuación de segundo orden ($\mathbf{M} \neq 0$) son:

1. Comportamiento material no lineal, independiente de la velocidad de carga, en problemas de dinámica estructural. Son típicas las respuestas de las estructuras y de sus cimentaciones a los terremotos, con daño permanente o colapso; estudios del comportamiento de vehículos de motor ante impactos (choque); etc.
2. Comportamiento geométricamente no lineal debido a grandes deformaciones en dinámica estructural.

En ambos casos citados, generalmente $\mathbf{M}$ y $\mathbf{C}$ permanecen constantes. Sin embargo, éstas pueden variar, por ejemplo, en:

3. Problemas de combustión que causan un cambio de contorno con $\mathbf{M}$ ahora variable.

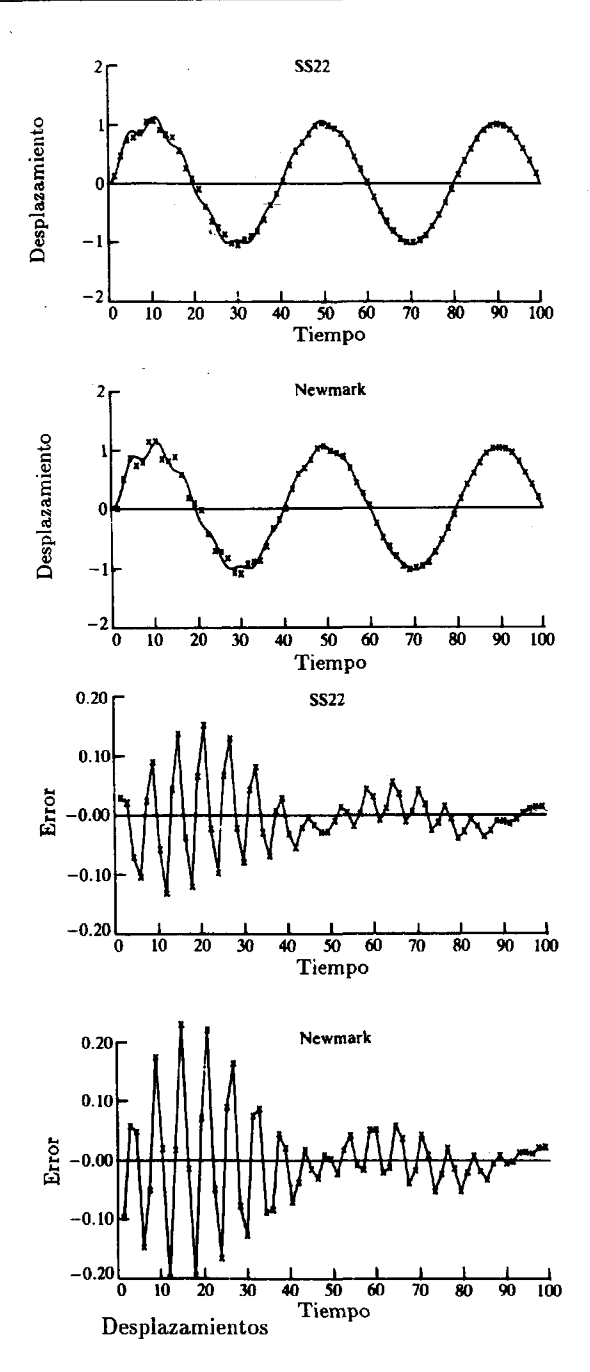
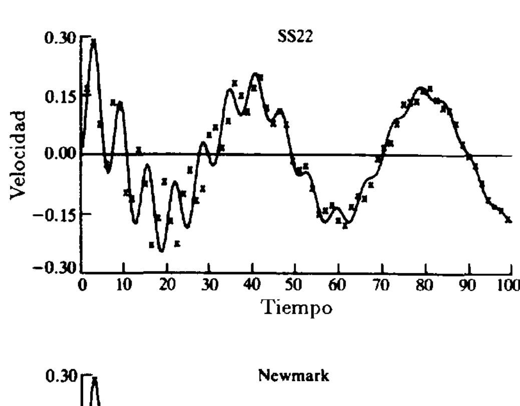
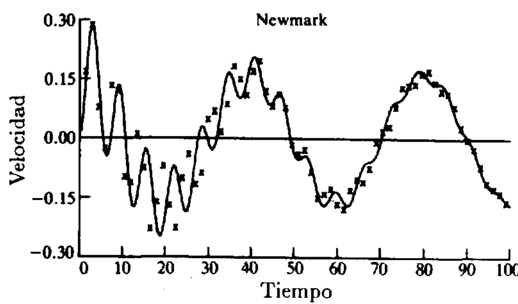
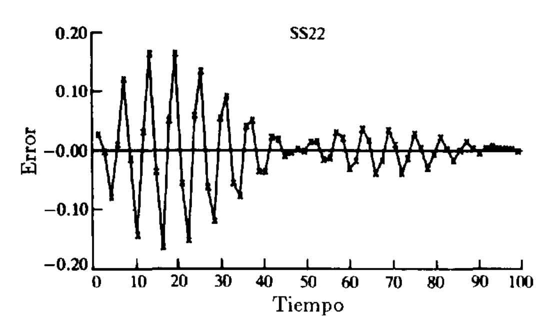


Figura 10.15 Comparación de los algoritmos SS22 y Newmark (GN22). Ecuación dinámica con un único grado de libertad con un término de fuerzas periódico, $\Theta_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$, $\Theta_2 = \beta_2 = 0$,







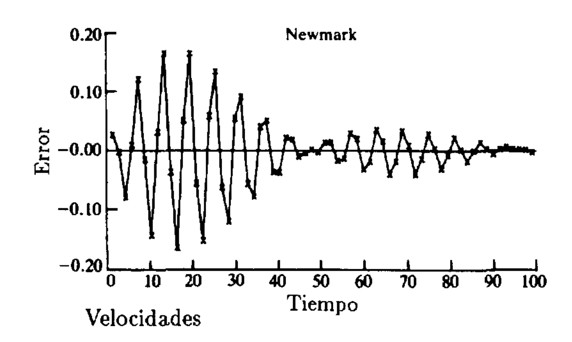
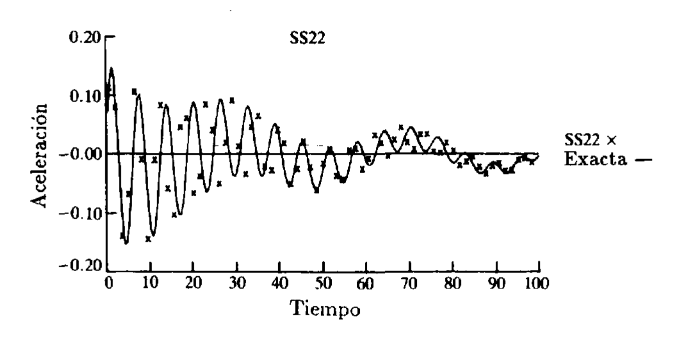
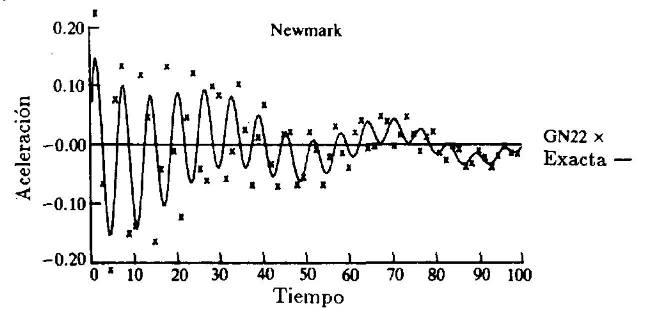
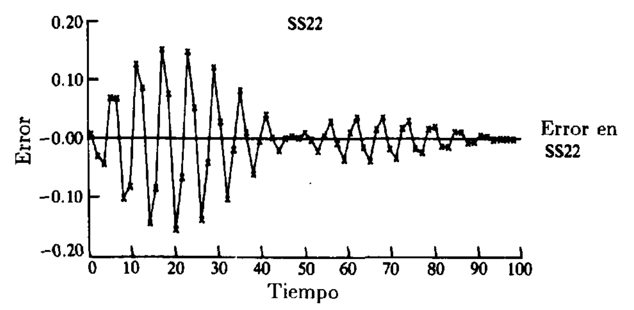


Figura 10.15 (*continuación*).







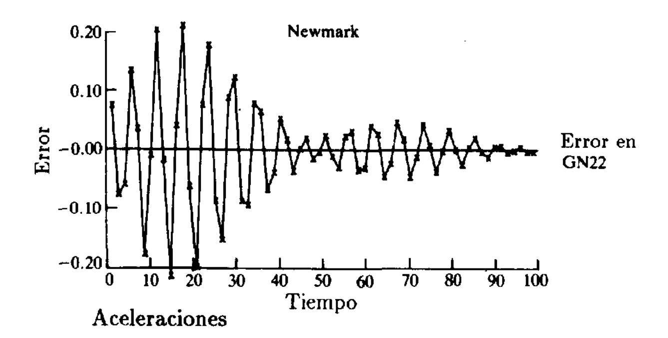


Figura 10.15 (*continuación*).

En problemas de primer orden son típicas las situaciones donde la conductividad y/o el calor específico son dependientes de la temperatura. Para todos estos problemas los procedimientos de recurrencia de avance en el tiempo son de una importancia capital ya que representan los únicos procesos de solución práctica.

En esta parte del capítulo no se pretende entrar en detalles de las no linealidades materiales o geométricas, ya que éstas han sido descritas con detalle en los Capítulos 7 y 8, respectivamente. Además, no se pretende discutir los métodos para resolver un problema no lineal de la forma

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{10.108}$$

De nuevo esto ha sido tratado a fondo en el Capítulo 7. Sin embargo, es importante tratar la manera en que el esquema de recurrencia debe formularse para el problema anterior. A este tema se dedica la siguiente sección.

10.6.2 *Formulación del esquema de recurrencia para problemas no lineales.* La ecuación general no lineal escrita de la forma

$$\mathbf{M}(\mathbf{a})\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{P}(\mathbf{a}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{10.109}$$

podría naturalmente discretizarse por cualquiera de los procedimientos anteriores, utilizando el método de residuos ponderados, o su forma particular de colocación.

La *forma de colocación* es más obvia ya que las ecuaciones algebraicas no lineales se obtienen directamente de escribir la Ec. (10.109) para un punto particular del tiempo. Aquí resulta particularmente útil la serie de algoritmos GN [por ejemplo, el método de Newmark (GN22)]. En lugar de la Ec. (10.56) escribimos la forma no lineal como

$$\mathbf{M}(\mathbf{a}_{n+1})\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{C}(\mathbf{a}_{n+1})\dot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{P}(\mathbf{a}_{n+1}) + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{10.110}$$

en la cual al sustituir las Ecs. (10.55) inmediatamente da la forma requerida

$$\mathbf{\Psi}(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}) = \mathbf{0} \tag{10.111}$$

donde el vector incógnita es $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$, tal como en el caso lineal. Ahora se pueden aplicar inmediatamente varios de los algoritmos de solución no lineales del Capítulo 7.

En los algoritmos SSpj y los multipaso es también posible el uso de colocación. Si se utiliza la delta de Dirac como función de ponderación W, la ponderación conlleva siempre la satisfacción de la ecuación de gobierno en un valor particular de τ (colocación), y esto reemplaza a la Ec. (10.33).

A partir de aquí se puede usar idéntico proceso de solución sustituyendo valores apropiados de Θ. Obsérvese que tomando

$$\begin{aligned}
\tau &= \Delta t \quad \text{da} \quad \Theta_1 = 1, \quad \Theta_2 = 1, \quad \Theta_3 = 1, \text{ etc.}\\
\tau &= \frac{3}{4}\Delta t \quad \text{da} \quad \Theta_1 = \frac{3}{4}, \quad \Theta_2 = \frac{9}{16}, \quad \Theta_3 = \frac{27}{64}, \text{ etc.}\\
\tau &= \frac{1}{2}\Delta t \quad \text{da} \quad \Theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \Theta_2 = \frac{1}{4}, \quad \Theta_3 = \frac{1}{16}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Para SS22 sólo los dos primeros procesos son incondicionalmente estables. Todos dan la ecuación no lineal de la forma

$$\mathbf{\Psi}(\boldsymbol{\alpha}_n) = \mathbf{0} \tag{10.112}$$

que es de nuevo la forma estándar no lineal.

Pueden hacerse idénticas consideraciones respecto al algoritmo multipaso si se utiliza la ponderación con delta de Dirac en la Ec. (10.90). No insistiremos en este punto, pero nótese que:

1. Cuando la colocación se realiza en el punto $t = t_n$ en el algoritmo de dos pasos se tiene precisamente el esquema de diferencias centrales (explícito), frecuentemente utilizado en el análisis dinámico de problemas no lineales.[48–54]
2. Cuando la colocación se hace en $t = t_{n+1}$ y se usa un algoritmo de tres pasos se tiene el esquema de Houbolt.[42]

A estas alturas es necesaria una consideración adicional sobre *esquemas explícitos.* Como se ha comentado anteriormente, el esquema GN22 toma una forma explícita con $2\beta = \beta_2 = \Theta_2 = 0$ y podría parecer en la Ec. (10.111) que todavía es necesario resolver un sistema de ecuaciones no lineales. Sin embargo, el estudio de la Ec. (10.55) muestra que la primera de éstas es ahora

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t\dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t_2}{2}\ddot{\mathbf{a}}_n \tag{10.113}$$

que puede ser evaluada directamente, pero la segunda queda de la forma

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t(1-\beta_1)\ddot{\mathbf{a}}_n + \Delta t\beta_1\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \tag{10.114}$$

Sin embargo, si no existe dependencia de $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ o $\mathbf{P}$ con respecto a $\dot{\mathbf{a}}$, entonces el esquema no necesita iteración alguna y es ciertamente explícito para una $\mathbf{M}$ diagonal. Este cálculo directo es una ventaja obvia de los esquemas explícitos, ya que *los problemas no lineales no representan prácticamente coste adicional alguno sobre los problemas lineales.* Por esta razón dichos esquemas son tremendamente populares.

Desgraciadamente, el esquema SS22 con ponderación de Dirac en t_n no puede ser interpretado de forma tan simple. De hecho, no es fácil utilizar la familia SSpj con ponderación arbitraria que conduce a todas las posibles combinaciones de Θ. El procedimiento más lógico parece ser escribir la ecuación no lineal como la equivalente de la Ec. (10.35) para el caso general, de la forma

$$\mathbf{\Psi}(\boldsymbol{\alpha}_n) \equiv \mathbf{M}(\tilde{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1})\ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} + \mathbf{C}(\tilde{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1})\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} + \mathbf{P}(\tilde{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1}) + \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \qquad (10.115a)$$

con

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} &= \ddot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n \Theta_{p-2}\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} &= \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n \Theta_{p-1}\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\alpha}_n \Theta_{p}\Delta t^{p}}{p!} \end{aligned} \qquad (10.115b)$$

y aquí $\tilde{\mathbf{a}}$, $\dot{\tilde{\mathbf{a}}}$ y $\ddot{\tilde{\mathbf{a}}}$ se definen mediante la Ec. (10.36). Naturalmente, ahora es posible cualquier elección de Θ.

La aplicación a problemas de primer orden sigue líneas similares y de nuevo pueden utilizarse aquí todos los algoritmos de paso único. Es bastante popular el algoritmo de dos pasos de Lees[55] que corresponde al de la Ec. (10.102) con $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ y todos los parámetros no lineales evaluados en t_n.

10.6.3 *El proceso de solución no lineal.* Como ya se ha mencionado, el proceso de solución para cada paso entre t_n y t_{n+1} requiere la solución (iterativa) de un conjunto de ecuaciones no lineales, a menos que se utilice la forma explícita con estabilidad condicional. Se utilizan aquí los métodos estándar del Capítulo 7, con sus límites de convergencia apropiados. Todos los métodos son aplicables y la mayoría se pueden usar en problemas prácticos. Claramente, sin embargo, no es deseable hacer muchas iteraciones para cada paso de tiempo y si no se consigue convergencia con tres o cuatro iteraciones es ventajoso reducir el tamaño del paso de tiempo. Es necesario encontrar un equilibrio económico entre el número de iteraciones y el tamaño del paso de tiempo y los límites precisos para esto son en cierta forma subjetivos. Ciertamente, el criterio de convergencia no debe hacerse demasiado estricto y debe ser compatible con el error de la discretización temporal en cada paso de tiempo.

10.6.4 *Algunos ejemplos.* El lector puede encontrar numerosos ejemplos del uso de los métodos de avance en el tiempo para la solución de problemas

no lineales de primer y segundo orden en la literatura. Citaremos algunos de éstos a continuación.

Transmisión del calor en régimen transitorio. Recordemos aquí la ecuación de gobierno para este conjunto de problemas físicos aunque ya se han mostrado algunas aplicaciones lineales. Se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \rho c\frac{\partial T}{\partial t} - Q = 0 \qquad (10.116)$$

con las condiciones de contorno

$$T = \bar{T} \qquad \text{o} \qquad k\frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha(T - T_a)^n \qquad (10.117)$$

donde α se conoce como coeficente de termotransferencia.

La no linealidad aparece debido a que c, k y Q pueden ser dependientes de la temperatura o en la condición de radiación con $n \neq 1$. Mostraremos dos ejemplos para ilustrar lo anterior.

El primero trata del efecto de las *heladas en los suelos*, donde el calor latente que absorbe la helada se representa variando el calor específico con la temperatura en una zona estrecha, tal como se muestra en la Figura 10.16. Además, en la transición del estado fluido al helado la conductividad varía. Se tiene, pues, un problema en el que ambas matrices $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ son variables y en la Figura 10.17 se muestra la solución para el desarrollo de una zona helada obtenida con el algoritmo de tres puntos (Lees)[55,56] con $\mathbf{C} = \mathbf{C}_n$ y $\mathbf{K} = \mathbf{K}_n$.

En este problema se presenta una característica en el cálculo de cierta importancia ya que los valores del calor específico se hacen muy altos en la zona de transición, y esto puede no ser tenido en cuenta al seguir un método de avance en el tiempo si se utiliza un incremento de temperatura que *sobrepase* el punto de congelación. Para evitar esta dificultad y mantener el equilibrio de calor correcto se introduce el concepto de entalpía, definiendo

$$H = \int_o^T \rho c \, dT \qquad (10.118)$$

Siempre que se considera un cambio de temperatura se calcula un valor apropiado de ρc que proporciona la variación de H correcta.

El problema de transmisión del calor con cambio de estado es de cierta importancia en los procesos de soldadura y fundición. En la referencia [57] se dan algunas soluciones muy útiles para estos problemas obtenidas utilizando elementos finitos. En la referencia [58] se dan más detalles del procedimiento descrito anteriormente.

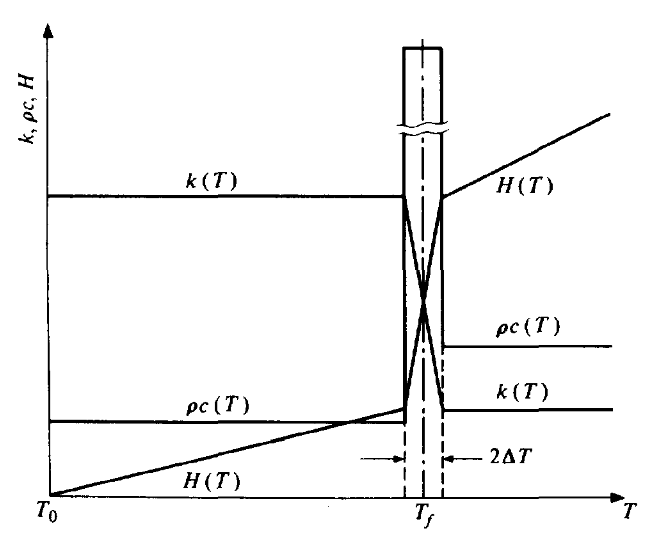


Figura 10.16 Estimación de las propiedades termofísicas en problemas de cambio de fase. El efecto de calor latente se aproxima por un gran incremento de entalpía en un intervalo pequeño de temperatura $2\Delta T$.

El segundo ejemplo no lineal trata el problema de *ignición espontánea*.[59] Ya se ha discutido el caso de régimen permanente de este problema en la Sección 7.16 y trataremos ahora del transitorio. Aquí el calor generado es función de la temperatura

$$Q = \delta e^T \qquad (10.119)$$

y la situación puede convertirse en *físicamente inestable* con temperaturas aumentando continuamente hasta alcanzar valores extremos. En la Figura 10.18 se muestra la solución del problema en régimen transitorio de una esfera a la temperatura inicial $T = 290K$ inmersa en un baño a $550K$. Se da la solución para los dos valores del parámetro δ para $k = \rho c = 1$; las no linealidades son ahora tan importantes que fue necesario emplear métodos iterativos para encontrar la solución para cada paso de tiempo. Para el mayor valor de δ la temperatura aumenta hasta infinito en un *tiempo finito*, y hubo que variar continuamente el intervalo de tiempo en los cálculos para tener en cuenta este efecto. El tiempo que tarda en alcanzar ese punto se conoce como *tiempo de inducción* y se muestra en la Figura 10.18 para varios valores de δ.

No se ha discutido con detalle el problema del cambio del intervalo de tiempo durante los cálculos, pero evidentemente esto debe hacerse con

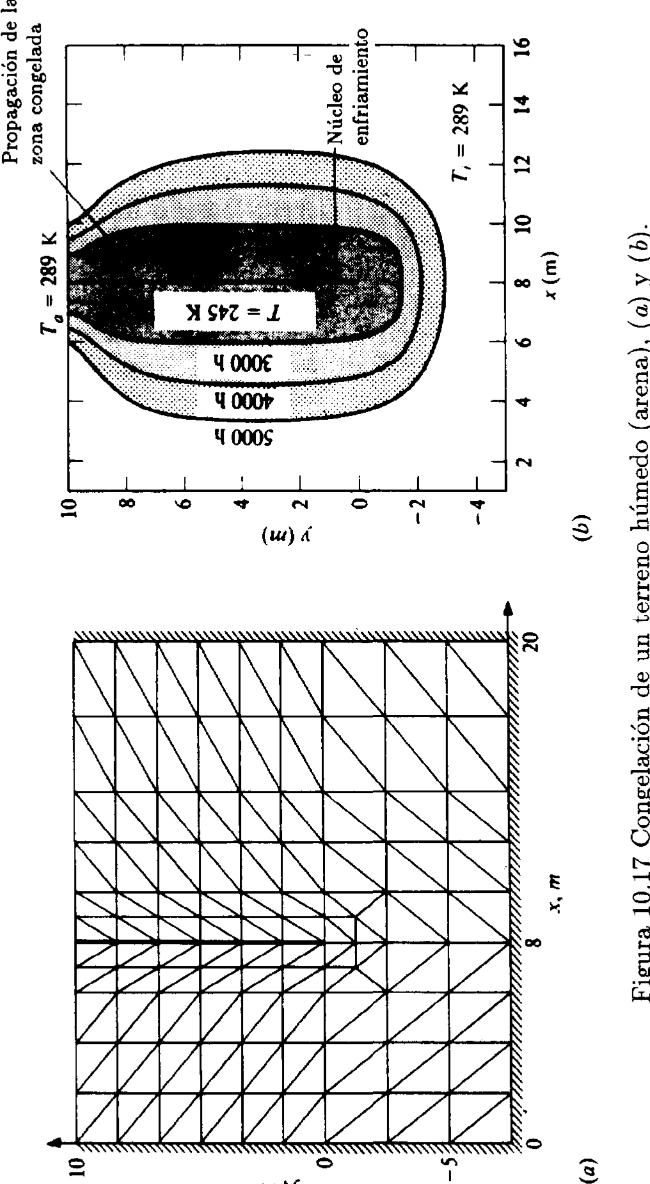
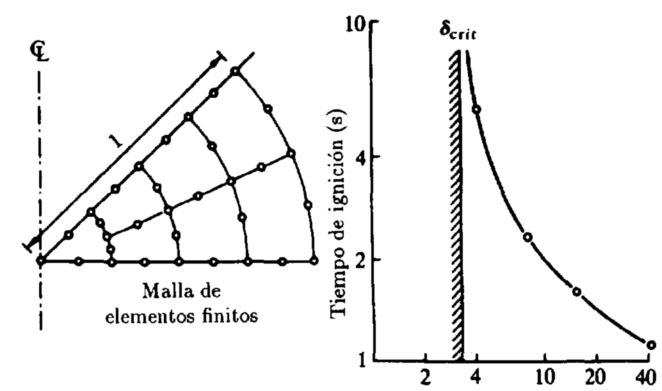
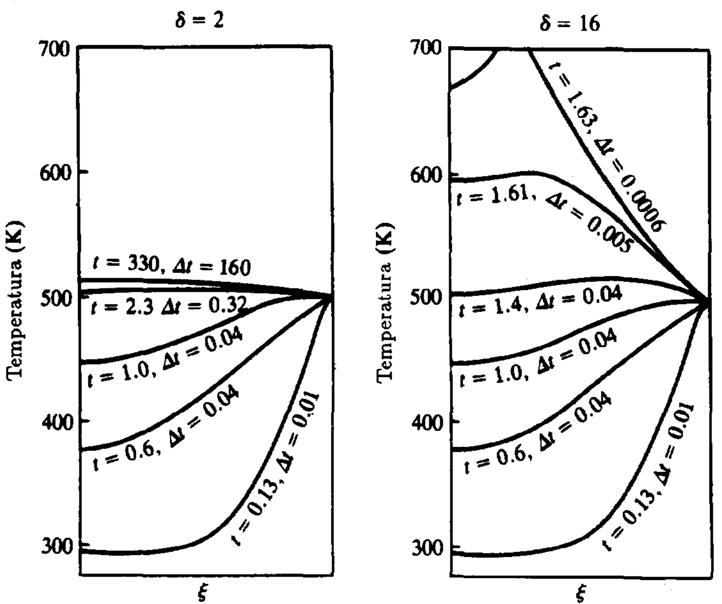


Figura 10.17 Congelación de un terreno húmedo (arena), (*a*) y (*b*).



(*a*) Tiempo de inducción-parámetro de Frank-Kamenetskii



(*b*) **Líneas de temperatura para un comportamiento transitorio del reactor esférico con ignición ($\delta = 16$) y sin ignición ($\delta = 2$)**

Figura 10.18 Reactor esférico.

bastante frecuencia para evitar variaciones grandes de la función incógnita, que se traducirían en pérdida de precisión.

Dinámica estructural. Los ejemplos finales tratan sobre *dinámica de estructuras en régimen transitorio con no linealidad debida al material y a la geometría.*

Aquí generalmente aparece un comportamiento altamente no lineal debido a efectos materiales y geométricos. Prescindiendo de los efectos de amortiguamiento, la ecuación de movimiento [Ec. (10.1)] del sistema discreto se puede escribir como

$$\mathbf{M\ddot{a}} + \mathbf{P(a)} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{10.120}$$

donde

$$\mathbf{P(a)} \equiv \mathbf{Ka} \tag{10.121}$$

es un vector de fuerzas internas. Esto, tal como se ha mostrado previamente, puede calcularse a partir del valor de las tensiones en cualquier instante de tiempo de la forma

$$\mathbf{P(a)} = \int_\Omega \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega \tag{10.122}$$

y una solución transitoria explícita se puede seguir adecuadamente.

Si se continúa un cálculo explícito hasta el punto en el cual se alcancen condiciones de estado estacionario, esto es, hasta que

$$\mathbf{\ddot{a}} = \mathbf{\dot{a}} = 0$$

se obtiene la solución de un problema no lineal estático. Este tipo de técnica es frecuentemente eficaz y se ha aplicado con éxito en el contexto de las diferencias finitas bajo el nombre de "relajación dinámica"[60–62] para la solución de problemas estáticos, como una alternativa a los métodos descritos en el Capítulo 7. Sus posibilidades todavía no han sido exploradas en el contexto general de los elementos finitos.

Se dan a continuación dos ejemplos de análisis dinámico explícito. El primer problema, ilustrado en la primera hoja con figuras en color al inicio del libro, es un problema tridimensional de gran tamaño y su solución se obtuvo utilizando un esquema dinámico explícito y uno de los mayores ordenadores existentes en la actualidad. En este caso los esquemas implícitos hubieran sido totalmente inaplicables y, de hecho, el programa explícito proporciona una solución directa iterativa del problema estacionario que se muestra. Sin embargo, debe reconocerse que tales soluciones finales no son necesariamente únicas.

En la Figura 10.19 se muestra un típico análisis de choque de un automóvil llevado a cabo por medios similares. Los procedimientos explícitos de análisis presentados aquí son todavía objeto de activa investigación debido a su utilidad.[63]

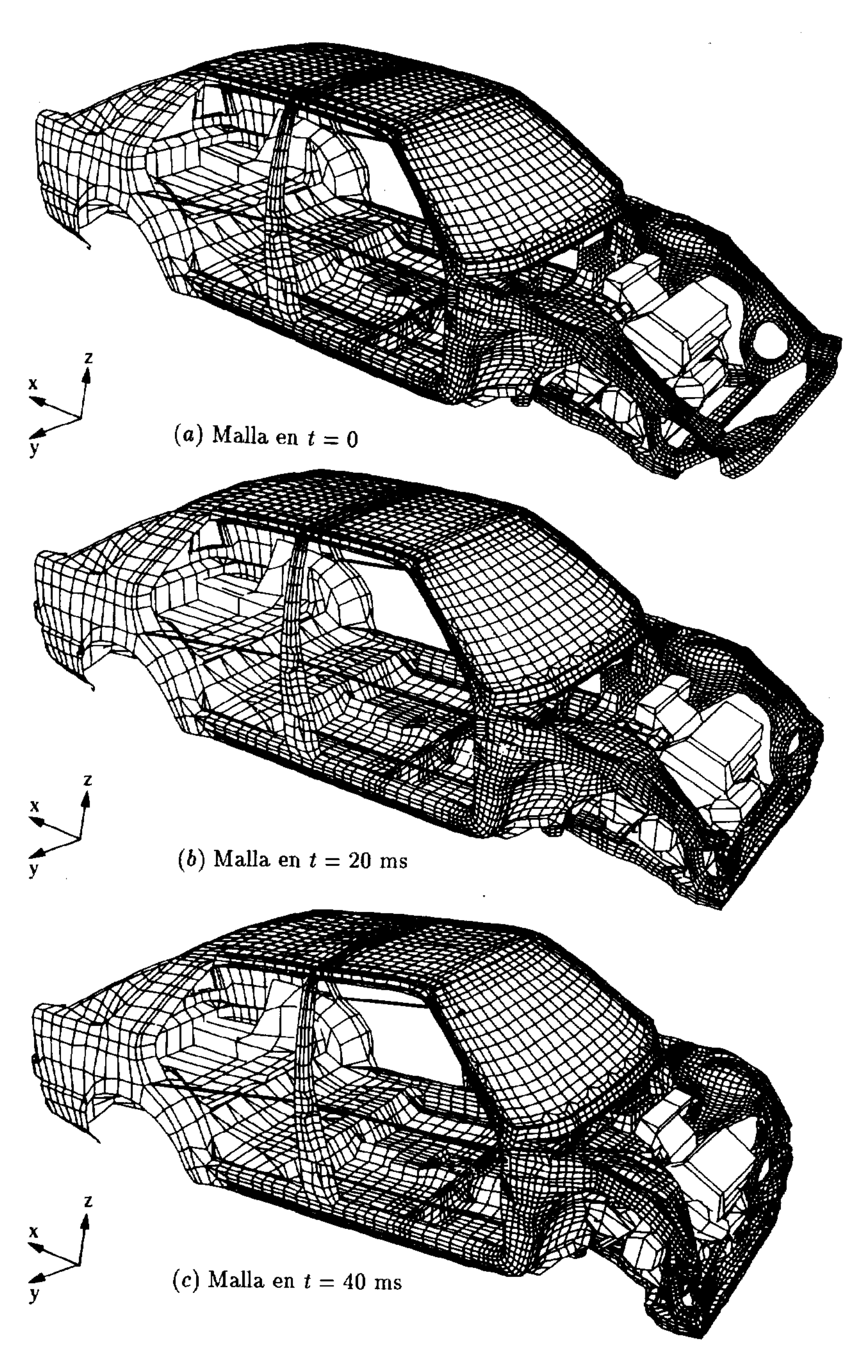


Figura 10.19 Análisis de choque de un SAAB 9000. El análisis se llevó a cabo utilizando el programa explícito LS-DYNA 3D (J. Hallquist) 14805 elementos de lámina y 6 elementos de viga con un Δt medio de $0.8 \times 10^{-8} s$, tiempo de CPU 17h en un CRAY X-MP48. (Reproducido por cortesía de SAAB Automobile AB).

10.7 Consideraciones finales

La deducción y los ejemplos presentados en este capítulo abarcan las herramientas necesarias para la solución eficiente de muchos problemas transitorios gobernados por las Ecs. (10.1) y (10.2). En el próximo capítulo se tratarán algunos problemas más complejos que aparecen frecuentemente en la práctica y donde a menudo se necesita la solución simultánea por avance en el tiempo.

Referencias

1. R.D. RICHTMYER y K.W. MORTON, *Difference Methods for Initial Value Problems*, Wiley (Interscience), New York, 1967.
2. T.D. LAMBERT, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, Wiley, Chichester, 1973.
3. P. HENRICI, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1962.
4. F.B. HILDEBRAND, *Finite Difference Equations and Simulations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968.
5. G.W. GEAR, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
6. W.L. WOOD, *Practical Time Stepping Schemes*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
7. J.T. ODEN, "A general theory of finite elements, Part II Applications", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 247–54, 1969.
8. I. FRIED, "Finite element analysis of time-dependent phenomena", *JAIAA*, **7**, 1170–3, 1969.
9. J.H. ARGYRIS y D.W. SCHARPF, "Finite elements in time and space", *Nucl. Eng. Des.*, **10**, 456–69, 1969.
10. O.C. ZIENKIEWICZ y C.J. PAREKH, "Transient field problems -two and three dimensional analysis isoparametric finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2**, 61–71, 1970.
11. O.C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*, pp. 335–9, McGraw-Hill, New York, 1971.
12. O.C. ZIENKIEWICZ y R.W. LEWIS, "An analysis of various time stepping schemes for initial value problems", *Int. J. Earthquake Eng. Struct, Dynam.*, **1**, 407–8, 1973.
13. W.L. WOOD y R.W. LEWIS, "A comparison of time marching schemes for the transient heat conduction equation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **9**, 679–89, 1975.
14. O.C. ZIENKIEWICZ, "A new look at the Newmark, Houbolt and other time stepping formulas. A weighted residual approach", *Int. J. Earthquake Eng. Struct Dynam.*, **5**, 413–18, 1977.

15. W.L. WOOD, "On the Zienkiewicz four-time-level scheme for the numerical integration of vibration problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 1519–28, 1977.
16. O.C. ZIENKIEWICZ, W.L. WOOD y R.L. TAYLOR, "An alternative single-step algorithm for dynamic problems", *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dynam.*, **8**, 31–40, 1980.
17. W.L. WOOD, "A further look at Newmark, Houbolt, etc., time-stepping formulas", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, 1009–17, 1984.
18. O.C. ZIENKIEWICZ, W.L. WOOD, N.W. HINE y R.L. TAYLOR, "A unified set of single-step algorithms, Part 1: general formulation and applications", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, 1529–52, 1984.
19. W.L. WOOD, "A unified set of single-step algoritms, Part 2: theory", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, 2303–9, 1984.
20. M.G. KATONA y O.C. ZIENKIEWICZ, "A unified set of single-step algorithms, Part 3: the beta-m method, a generalisation of the Newmark scheme", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **21**, 1345–59, 1985.
21. E. VAROGLU y N.D.L. FINN, "A finite element method for the diffusion convection equations with concurrent coefficients", *Adv. Water Resources*, **1**, 337–41, 1973.
22. C.J. JOHNSON, V. NAVERT y J. PITKÄRANTA, "Finite element methods for linear, hyperbolic problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **45**, 285–312, 1984.
23. B.M. IRONS y C. TREHARNE, "A bound theorem for eigen values and its practical applications", en *2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pp. 245–54, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1971.
24. K. WASHIZU, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1975.
25. M. GURTIN, "Variational principles for linear elastodynamics", *Arch. Nat. Mech. Anal.*, **16**, 34–50, 1969.
26. M. GURTIN, "Variational principles for linear initial-value problems", *Q. Appl. Math.*, **22**, 252–6, 1964.
27. E.L. WILSON y R.E. NICKELL, "Application of finite element method to heat conduction analysis", *Nucl. Eng. Des.*, **4**, 1–11, 1966.
28. J. CRANK y P. NICOLSON, "A practical method for numerical integration of solutions of partial differential equations of heat conduction type", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **43**, 50, 1947.
29. R.L TAYLOR y O.C. ZIENKIEWICZ, "A note on the *order of approximation* ", *Int. J. Solids Struct.*, **21**, 793–8, 1985.
30. M. ZLAMAL, "Finite element methods in heat conduction problems", en *The Mathematics of Finite Elements and Applications* (ed. J. Whiteman), pp. 85–104, Academic Press, London, 1977.

31. W. LINIGER, "Optimisation of a numerical integration method for stiff systems of ordinary differential equations", IBM research report RC2198, 1968.
32. J.M. BETTENCOURT, O.C. ZIENKIEWICZ y G. CANTIN, "Consistent use of finite elements in time and the perfomance of various recurrence schemes for the heat diffusion equation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**, 931–8, 1981.
33. N.M. NEWMARK, "A method for computation of structural dynamics", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **85**, EM3, 67–94, 1959.
34. T. BELYTSCHKO y T.J.R. HUGHES (eds.), *Computational Methods for Transient Analysis*, North Holland, Dordrecht, 1983.
35. I. MIRANDA, R.M. FERENCZ y T.J.R. HUGHES, "An improved implicit-explicit time integration method for structural dynamics", *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dynam.*, **18**, 643–55, 1989.
36. E.J. ROUTH, *A Treatise on the Stability of a Given State or Motion*, Macmillan, London, 1877.
37. A. HURWITZ, "Uber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Würzeln mit negativen reellen teilen besitzt", *Math. Ann.*, **46**, 273–84, 1895.
38. F.R. GANTMACHER, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, 1959.
39. G.G. DAHLQUIST, "A special stability problem for linear multistep methods", *BIT*, **3**, 27–43, 1963.
40. C.W. GEAR, "The automatic integration of stiff ordinary differential equations", en *Information Processing 68* (ed. A.J.H. Morrell), pp. 187–93, North Holland, Dordrecht, 1969.
41. W. LINGER, "Global accuracy and A-stability of one and two step integration formulas for stiff ordinary differential equations", en *Proc. Conf. on Numerical Solution of Differential Equations*, Dundee University, 1969.
42. J.C. HOUBOLT, "A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft", *J. Aero. Sci.*, **17**, 540–50, 1950.
43. E.L. WILSON, "A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures", SEL report, 68–1, University of California, Berkeley, 1968.
44. K.J. BATHE y E.L. WILSON, "Stability and accuracy analysis of direct integration methods", *Int. J. Earhquake Eng. Struct. Dynam.*, **1**, 283–91, 1973.
45. W.L. WOOD, M. BOSSAK y O.C. ZIENKIEWICZ, "An alpha modification of Newmark's method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **15**, 1562–6, 1980.
46. H.M. HILBER, T.J.R. HUGHES y R.L. TAYLOR, "Improved numer-

ical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics", *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dynam.*, **5**, 283–92, 1977.
47. W.L. WOOD, "On the Zienkiewicz three- and four-time level schemes applied to the numerical integration of parabolic equations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **12**, 1717–26, 1978.
48. T. BELYTSCHKO, R.L. CHIAPETTA y H.D. BARTEL, "Efficient large scale non-linear transient analysis by finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 579–96, 1976.
49. D. SHANTARAM, D.R.J. OWEN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Dynamic transient behaviour of two and three dimensional structures including plasticity, large deformation and fluid interaction", *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dynam.*, **4**, 561–78, 1976.
50. R.D. KRIEG y S.W. KEY, "Transient shock response by numerical time integration", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **7**, 273–86, 1973.
51. C.C. FU, "On the stability of explicit methods for numerical integration of the equations of matrices in finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **4**, 95–107, 1972.
52. J.O. HALLQUIST, "A numerical treatment of sliding interfaces and impact", *ASME*, **AMD-30**, 117–33, 1978.
53. G.L. GOUDREAU y J.O. HALLQUIST, "Recent developments in large-scale finite element lagrangian hydrocode technology", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **33**, 725–57, 1982.
54. J.O. HALLQUIST, G.L. GOUDREAU y D.J. BENSON, "Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **51**, 107–37, 1985.
55. M. LEES, "A linear three level difference scheme for quasilinear parabolic equations", *Maths. Comp.*, **20**, 516–622, 1966.
56. G. COMINI, D. DEL GUIDICE, R.W. LEWIS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Finite element solution of non-linear conduction problems with special reference to phase change", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, 613–24, 1974.
57. H.D. HIBBITT y P.V. MARCAL, "Numerical thermo-mechanical model for the welding subsequent loading of a fabricated structure", *Comp. Struct.*, **3**, 1145–74, 1973.
58. K. MORGAN, R.W. LEWIS y O.C. ZIENKIEWICZ, "An improved algorithm for heat convection problems with phase change", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **12**, 1191–5, 1978.
59. C.A. ANDERSON y O.C. ZIENKIEWICZ, "Spontaneous ignition: finite element solutions for steady and transient conditions", *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, 398–404, 1974.
60. J.R.M. OTTER, "Dynamic relaxation", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **35**, 633–56, 1966.

61. O.C. ZIENKIEWICZ y R. LÖHNER, "Accelerated "relaxation" or direct solution? Future prospects for finite element methods", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, **21**, 1–11, 1985.
62. P. UNDERWOOD, "Dynamic relaxation", en *Computer Methods for Transient Analysis* (eds T. Belytchko y T.J.R. Hughes), cap. 5, pp. 245–65, North Holland, Dordrecht, 1983.
63. J.C. SIMO y K. WONG, "Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly conserve energy and momentum", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **31**, 19–52, 1991.

Capítulo 11

SISTEMAS ACOPLADOS

11.1 Problemas acoplados –definición y clasificación–

A menudo dos o más sistemas físicos interaccionan uno con otro de tal manera que es imposible obtener la solución independiente de cualquiera de los sistemas sin la solución simultánea de los demás. Tales sistemas se conocen como acoplados y, naturalmente, tal acoplamiento puede ser débil o fuerte dependiendo del grado de interacción.

Un problema obviamente "acoplado" es el de interacción dinámica fluido-estructura. En él, ni el fluido ni el sistema estructural se pueden resolver independientemente uno del otro debido a las fuerzas desconocidas en la interfase.

Una definición de sistemas acoplados que incluya una amplia variedad de problemas y su discretización númerica puede generalizarse de la forma siguiente:[1]

> *Sistemas y formulaciones acopladas son aquéllas aplicables a dominios múltiples y variables dependientes que a menudo (pero no siempre) describen fenómenos físicos diferentes y en los que*
> *a) ningún dominio puede resolverse de forma separada de los demás;*
> *b) ningún conjunto de variables dependientes puede ser eliminada explícitamente a nivel de ecuación diferencial.*

El lector puede contrastar esta definición con las de formulaciones *mixtas e irreducibles* dadas en el Capítulo 12 del Volumen 1 y encontrar algunas similitudes. Claramente las formulaciones "mixtas" y "acopladas" son análogas, siendo la principal diferencia que en la primera la eliminación de algunas variables dependientes es posible a nivel de la ecuación diferencial de gobierno. En el sistema acoplado se necesita una solución analítica completa o la inversión de un único sistema (discretizado) antes de que tal eliminación sea posible.

De hecho, se puede hacer aún otra distinción. En los sistemas acoplados la solución de cualquier sistema único es un problema bien planteado y

puede resolverse cuando las variables correspondientes a los otros sistemas están prescritas. Éste no es siempre el caso en las formulaciones mixtas.

Resulta práctico clasificar los sistemas acoplados en dos categorías:

Clase I. Esta clase contiene problemas en los cuales el acoplamiento ocurre en las interfases entre dominios a través de las condiciones de contorno que se imponen allí. Generalmente los dominios describen situaciones físicas diferentes, pero es posible considerar el acoplamiento entre dominios que siendo físicamente similares han sido discretizados usando procedimientos diferentes.

Clase II. Esta clase contiene problemas en los cuales los varios dominios se superponen (totalmente o parcialmente). Aquí el acoplamiento ocurre a través de las ecuaciones diferenciales de gobierno que describen fenómenos físicos diferentes.

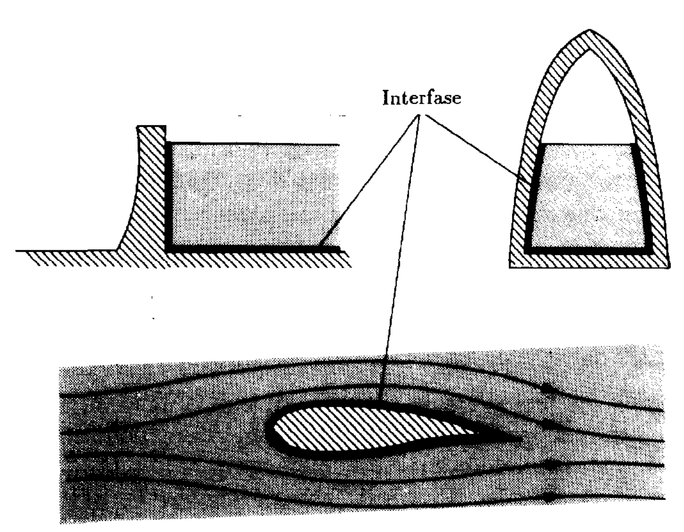
Típicos de la primera categoría son los problemas de interacción fluido-estructura en los que interaccionan dominios físicamente diferentes [ver Figura 11.1(*a*)] y también las interacciones estructura-estructura de la Figura 11.1(*b*) donde la interfase simplemente divide regiones elegidas arbitrariamente en las que se han utlizado discretizaciones numéricas diferentes.

La necesidad de usar diferentes discretizaciones puede surgir de distintas causas. Así, por ejemplo:

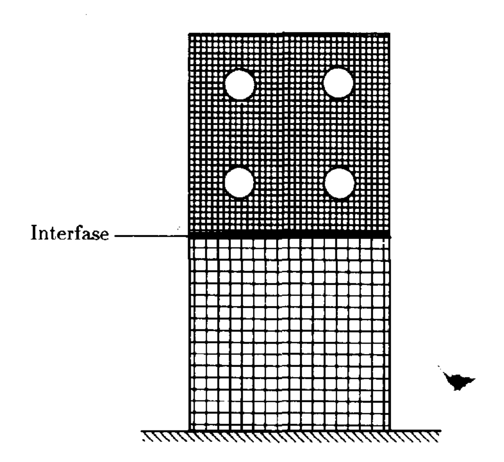
1. Mallas de elementos finitos diferentes pueden presentar ventajas para describir los dominios.
2. Diferentes procedimientos tales como la combinación de métodos de contorno y de elementos finitos en sus regiones respectivas pueden ser deseables desde el punto de vista computacional.
3. Los dominios pueden dividirse simplemente debido a la elección de diferentes algoritmos de avance en el tiempo, por ejemplo, unos de tipo implícito y otros explícitos.

En la Figura 11.2 se muestran problemas típicos de la segunda categoría. Uno de éstos es la extrusión de metales, donde el flujo plástico está fuertemente acoplado con el campo de temperaturas, mientras al mismo tiempo este último está influenciado por el calor generado en el flujo plástico. El otro es de dinámica de suelos (respuesta de una presa ante acciones sísmicas), en el cual el flujo y las presiones de filtración interaccionan con el comportamiento dinámico del "esqueleto" del suelo.

Se observa que en los ejemplos mostrados aparece el movimiento de forma invariable. De hecho, la inmensa mayoría de problemas acoplados implican tal comportamiento dinámico y por esta razón el presente capítulo



(*a*) Interacción fluido–estructura (dominios físicamente diferentes)

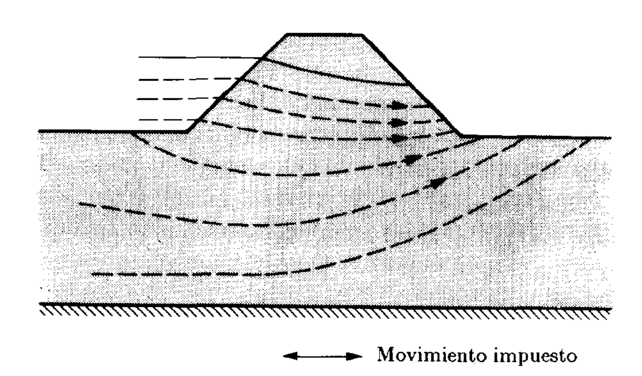


(*b*) Interacción estructura–estructura (dominios físicamente idénticos)

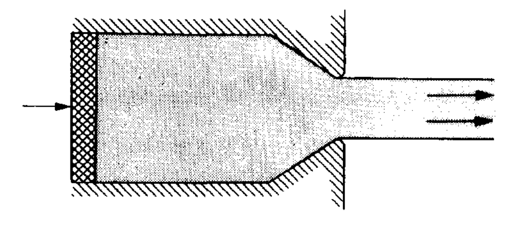
Figura 11.1 Problemas de Clase I con acoplamiento vía interfases (mostradas en línea gruesa).

sólo considerará esta área. Se seguirán, por tanto, y ampliarán las técnicas de análisis de los Capítulos 9 y 10.

Como los problemas que se encuentran en análisis acoplados de varios



(*a*) La filtración a través del medio poroso interacciona con un comportamiento estructural dinámico



(*b*) Problema de extrusión de metal en el que el flujo plástico está acoplado con el campo térmico

Figura 11.2 Problemas acoplados de Clase II con acoplamiento en dominios que se superponen.

tipos son similares, centraremos la presentación en tres ejemplos:

1. Interacción fluido-estructura (limitado a pequeñas amplitudes).
2. Interacción suelo-fluido.
3. Análisis dinámico implícito-explícito de una estructura en la cual la separación de dominios afecta al de discretización temporal.

En estos problemas encontraremos todas las características típicas del análisis acoplado y la extensión a otros seguirá líneas similares. En el Capítulo 13 trataremos, por ejemplo, con mayor detalle el problema de la extrusión acoplada de metales[2] y el lector podrá descubrir las similitudes.

Como observación final merece la pena mencionar que problemas tales como el análisis tensional debido a efectos térmicos, al que nos hemos referido frecuentemente en este libro, no es un problema acoplado en los términos en los que se han definido aquí. En éste, el problema de análisis tensional precisa el conocimiento del campo de temperaturas, pero éstas, en general, pueden ser determinadas mediante la solución de un problema completamente independiente del campo tensional. Por tanto, el problema queda desacoplado en una dirección. Se pueden encontrar muchos ejemplos de problemas verdaderamente acoplados en la literatura.[3,4]

11.2 Interacción fluido-estructura (problema de clase I)

11.2.1 *Observaciones generales y ecuaciones de comportamiento del fluido.* El problema de interacción fluido-estructura es amplio y cubre muchas formas de comportamiento del fluido, las cuales, de momento, no hemos discutido en detalle. La consideración de problemas en los cuales el fluido sufre un movimiento importante se trata en los Capítulos 13 a 15 y es difícil en este punto introducir problemas tales como, por ejemplo, el aleteo ("flutter"), donde el movimiento de un ala influencia el flujo y las fuerzas en su entorno pudiendo causar inestabilidad. Por la misma razón se excluye aquí el problema de la "cuerda vibrante", en el cual el desprendimiento de vórtices influencia el movimiento de la cuerda.

Sin embargo, en una muy amplia variedad de problemas el desplazamiento del fluido es pequeño mientras que la interacción es importante. Se engloban en esta categoría los dos primeros ejemplos de la Figura 11.1, en los cuales el movimiento estructural influencia e interacciona con la generación de presiones en el embalse o en el contenedor. Numerosos congresos se han dedicado enteramente a esta clase de problema de considerable interés en ingeniería, y en el cual afortunadamente son posibles considerables simplificaciones en la descripción de la fase fluida. Las referencias [5] a [17] incluyen algunos estudios típicos.

En tales problemas es posible escribir las ecuaciones dinámicas del comportamiento fluido simplemente como

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} \approx \rho \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p \tag{11.1}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del fluido, ρ es la densidad y p la presión.

Para llegar a lo anterior se ha supuesto:

a) que la densidad ρ varía sólo ligeramente;
b) que las velocidades son suficientemente pequeñas como para omitir los efectos convectivos, y

c) que los efectos viscosos que introducen tensiones desviadoras pueden ser despreciados en el fluido.

El lector puede de hecho notar que con las suposiciones anteriores la Ec. (11.1) es una forma especial de la relación más general descrita en el Capítulo 13 [véase la Ec. (13.21)].

La ecuación de continuidad basada en las mismas hipótesis es

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \rho \nabla^T \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{11.2}$$

y puesto que

$$d\rho = \frac{\rho dp}{K} \tag{11.3}$$

donde K es el módulo de deformación volumétrica, se puede escribir

$$\nabla^T \mathbf{v} = \frac{1}{K}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{11.4}$$

La eliminación de $\mathbf{v}$ entre (11.1) y (11.4) lleva a la conocida ecuación de Helmholtz que gobierna la presión p:

$$\nabla^2 p + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{11.5a}$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{K}{p}} \tag{11.5b}$$

denota la velocidad del sonido en el fluido.

Las ecuaciones descritas arriba son de hecho la base de todos los problemas *acústicos.*

11.2.2 *Condiciones de contorno para el fluido. Acoplamiento y radiación.* En la Figura 11.3 nos centramos en el problema de clase I ilustrado en la Figura 11.1(*a*) y en las condiciones de contornos posibles para la parte fluida descrita por la ecuación de gobierno (11.5). Como es conocido, se necesita como condición de contorno la especificación, bien de los gradientes normales o de los valores de p.

Interfase con el sólido (contornos ① , ② en la Figura 11.3). En estos contornos las velocidades normales (o sus derivadas temporales) están prescritas. Considerando el gradiente de presión en la dirección n normal a la cara se puede escribir, mediante la Ec. (11.1),

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \dot{\bar{v}}_n \tag{11.6}$$

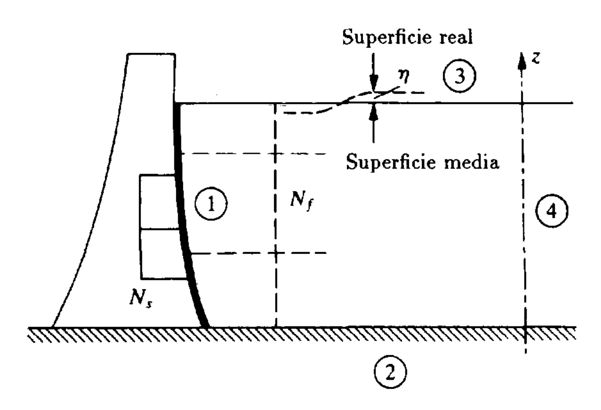


Figura 11.3 Condiciones de contorno para el fluido en un sistema de interacción fluido-estructura.

donde $\dot{\bar{v}}_n$ está prescrita.

Por tanto, por ejemplo, en el contorno ① ocurre acoplamiento con el movimiento de la estructura descrito por los desplazamientos $\mathbf{u}$. Aquí escribiremos

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}}_n = \ddot{\mathbf{u}}_n \tag{11.7}$$

mientras que en el contorno ② , donde sólo existe movimiento horizontal, tenemos

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}}_z = 0 \tag{11.8}$$

Claramente, el acoplamiento con el movimiento de la estructura ocurre sólo vía el contorno ① .

Superficie libre (contorno ③ en la Figura 11.3). En la superficie libre la hipótesis más sencilla es que

$$p = 0 \tag{11.9}$$

Sin embargo, esto no permite la posibilidad de ondas superficiales de gravedad. Éstas pueden aproximarse suponiendo que la superficie real está a una elevación η relativa a la superficie media. Ahora

$$p = \rho g \eta \tag{11.10a}$$

donde ρ es la densidad y g la aceleración de la gravedad. Sin embargo, por la Ec. (11.1), tenemos, puesto que $v_z = \partial\eta/\partial t$ y suponiendo ρ constante,

$$\rho\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{11.10b}$$

y eliminando η usando la Ec. (11.10a), tenemos una condición de gradiente normal prescrito

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{g}\ddot{p} \tag{11.11}$$

Esto permite incorporar las ondas de gravedad de forma aproximada en el análisis y se conoce como *la condición linealizada de ondas de superficie.*

Contornos de radiación (contorno ④ en la Figura 11.3). Este "contorno" termina físicamente un dominio infinito y es necesaria alguna aproximación para tener en cuenta el efecto de tal truncamiento. El principal efecto dinámico es sencillamente que la única solución de las ecuaciones de gobierno (11.5) debe estar compuesta aquí de *ondas salientes solamente* ya que no existe entrada proveniente del dominio infinito.

Si se consideran sólo variaciones en x (la dirección horizontal) sabemos que la solución general de la Ec. (11.5) se puede escribir como

$$p = F(x - ct) + G(x + ct) \tag{11.12}$$

donde c es la velocidad de onda y las dos ondas F y G viajan en las direcciones positiva y negativa de x, respectivamente.

La ausencia de la onda entrante G significa que en el contorno ④ tenemos solamente

$$p = F(x - ct) \tag{11.13}$$

Por tanto

$$\frac{\partial p}{\partial n} \equiv \frac{\partial p}{\partial x} = F' \tag{11.14a}$$

y

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -cF' \tag{11.14b}$$

donde F' es la derivada de F con respecto a $(x - ct)$. Podemos, por tanto, eliminar la función desconocida F' y escribir

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{c}\dot{p} \tag{11.15}$$

que es una condición muy parecida a la Ec. (11.11). Esta condición de contorno se presentó por primera vez en la referencia [5] para contornos radiantes y es análoga a colocar un elemento de amortiguamiento en dicho contorno.

11.2.3 *El problema acoplado discreto.* Consideremos ahora la estructura discretizada de la forma estándar (en desplazamientos) con el vector de desplazamientos aproximado de la forma

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} \tag{11.16a}$$

y el fluido aproximado de forma similar mediante

$$\mathbf{p} \approx \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}} \tag{11.16b}$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{p}}$ son los parámetros (nodales) de cada campo y $\mathbf{N}_u$ y $\mathbf{N}_p$ son funciones de forma apropiadas.

Las ecuaciones estructurales discretas son entonces

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{11.17}$$

donde el término de acoplamiento aparece debido a las presiones especificadas en el contorno y es

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_u^T \mathbf{n} p \, d\Gamma \equiv \left(\int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_u^T \mathbf{n} \mathbf{N}_p^T \, d\Gamma \right) \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{p}} \tag{11.18}$$

En lo anterior, $\mathbf{n}$ es el vector dirección de la normal a la interfase. Los términos de las otras matrices son ya bien conocidos para el lector como la masa, amortiguamiento, rigidez y fuerza.

La discretización estándar (Galerkin) aplicada a la ecuación del fluido (11.5) y a sus condiciones de contorno lleva a

$$\mathbf{S}\ddot{\bar{\mathbf{p}}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{p}}} + \mathbf{H}\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}^T\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{11.19}$$

Para completar citaremos aquí la forma de las matrices que aparecen en la ecuación anterior. Así

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \int_\Omega \mathbf{N}_p^T \frac{1}{c^2} \mathbf{N}_p \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{g} \mathbf{N}_p \, d\Omega \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \int_{\Gamma_4} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{c^2} \mathbf{N}_p \, d\Omega \\ \mathbf{H} &= \int_\Omega \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_p \, d\Omega \end{aligned} \tag{11.20}$$

y $\mathbf{Q}$ es idéntica a la de la Ec. (11.18).

11.2.4 *Vibración libre.* Si consideramos la vibración libre y omitimos todos los términos de amortiguamiento (notando que en la componente fluida el

amortiguamiento se debe estrictamente a la energía perdida por radiación) podemos escribir las dos Ecs. (11.17) y (11.19) como el conjunto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{O} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (11.21)$$

e intentar establecer los valores propios correspondientes a las frecuencias naturales. Sin embargo, notamos inmediatamente que el sistema no es simétrico (ni definido positivo) y que los métodos estándar de cálculo de autovalores no son aplicables directamente. Físicamente es claro, sin embargo, que los valores propios son reales y que los modos de vibración libre existen.

El problema anterior es similar al que aparece en la vibración de sólidos en rotación y existen métodos especiales de solución, aunque costosos.[18] Es posible mediante varias manipulaciones llegar a una forma simétrica y reducir el problema a uno estándar de valores propios.[14,15,19–21]

Un método sencillo recientemente sugerido[22] consigue el objetivo de simetrización de la forma siguiente.

Poniendo $\bar{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}e^{i\omega t}$, $\bar{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}e^{i\omega t}$ podemos reescribir la Ec. (11.21) como

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{p}} - \omega^2\mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \qquad (11.22a)$$

$$\mathbf{H}\tilde{\mathbf{p}} - \omega^2\mathbf{S}\tilde{\mathbf{p}} - \omega^2\mathbf{Q}^T\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \qquad (11.22b)$$

e introducir la variable adicional $\mathbf{q}$ de tal forma que

$$\tilde{\mathbf{p}} = \omega^2\mathbf{q} \qquad 11.22c)$$

Después de alguna manipulación y sustitución se puede escribir el nuevo sistema como

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 & \mathbf{S} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{S}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (11.23)$$

que es una forma simétrica estándar. Además, la variable $\mathbf{q}$ puede eliminarse ahora por condensación estática y el sistema final sigue siendo simétrico y contiene sólo las variables básicas.

Una alternativa que ha sido frecuentemente utilizada es la de introducir una nueva variable de simetrización al nivel de la ecuación de gobierno, pero claramente esto no es necesario.[14,15]

Como ejemplo de un problema sencillo de la presente categoría mostramos el análisis de una pared flexible tridimensional vibrando con un fluido encerrado en un contenedor "rígido"[23] (Figura 11.4).

11.2.5 *Vibración forzada y algoritmos transitorios paso a paso.* El lector puede fácilmente verificar que la respuesta lineal estacionaria debida a una solicitación periódica puede ser fácilmente calculada en el dominio complejo de la frecuencia mediante los procedimientos descritos en el Capítulo 9. Aquí no aparecen dificultades debidas a la naturaleza no simétrica de las ecuaciones y los procedimientos estándar pueden aplicarse. Chopra y otros han hecho, por ejemplo, muchos estudios de interacción presa/embalse utilizando tales métodos.[24,25] Sin embargo, estos métodos no son en general económicos y fallan en estudios de respuesta no lineal. Aquí se precisan procedimientos de avance en el tiempo de la forma discutida en el capítulo anterior. Sin embargo, la aplicación sencilla de los métodos desarrollados allí no es posible para el sistema combinado (con $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{p}}$ como variables) debido a las matrices no simétricas y, por tanto, es necesario un procedimiento modificado.[26] En éste, cada una de las Ecs. (11.17) y (11.19) es *discretizada en el tiempo separadamente* utilizando los métodos generales del Capítulo 10.

Así, en el intervalo de tiempo Δt se puede aproximar $\bar{\mathbf{u}}$ utilizando, por ejemplo, el procedimiento general SS22 de la forma siguiente. Primero escribimos

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_n + \dot{\bar{\mathbf{u}}}_n\tau + \frac{\boldsymbol{\alpha}\tau^2}{2} \qquad (11.24a)$$

con una expresión similar para $\bar{\mathbf{p}}$,

$$\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}_n + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_n\tau + \frac{\boldsymbol{\beta}\tau^2}{2} \qquad (11.24b)$$

donde $\tau = t - t_n$ y el intervalo de tiempo es Δt.

La sustitución de lo anterior en las Ecs. (11.17) y (11.19) y la ponderación con dos *funciones de peso diferentes* conduce a dos relaciones en las que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son las incógnitas. Éstas son

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{C}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}_n + \boldsymbol{\alpha}\Theta_1\Delta t) + \mathbf{K}\left(\bar{\mathbf{u}}_n + \dot{\bar{\mathbf{u}}}_n\Theta_1\Delta t + \frac{\boldsymbol{\alpha}\Theta_2\Delta t^2}{2}\right) \\ &\qquad -\mathbf{Q}\left(\bar{\mathbf{p}}_n + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_n\Theta_1\Delta t + \frac{\boldsymbol{\beta}\Theta_2\Delta t^2}{2}\right) + \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (11.25a)$$

y $$\mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{H}\left(\bar{\mathbf{p}}_n + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_n\bar{\Theta}_1\Delta t + \frac{\boldsymbol{\beta}\bar{\Theta}_2\Delta t^2}{2}\right) + \mathbf{q} = \mathbf{b} \qquad (11.25b)$$

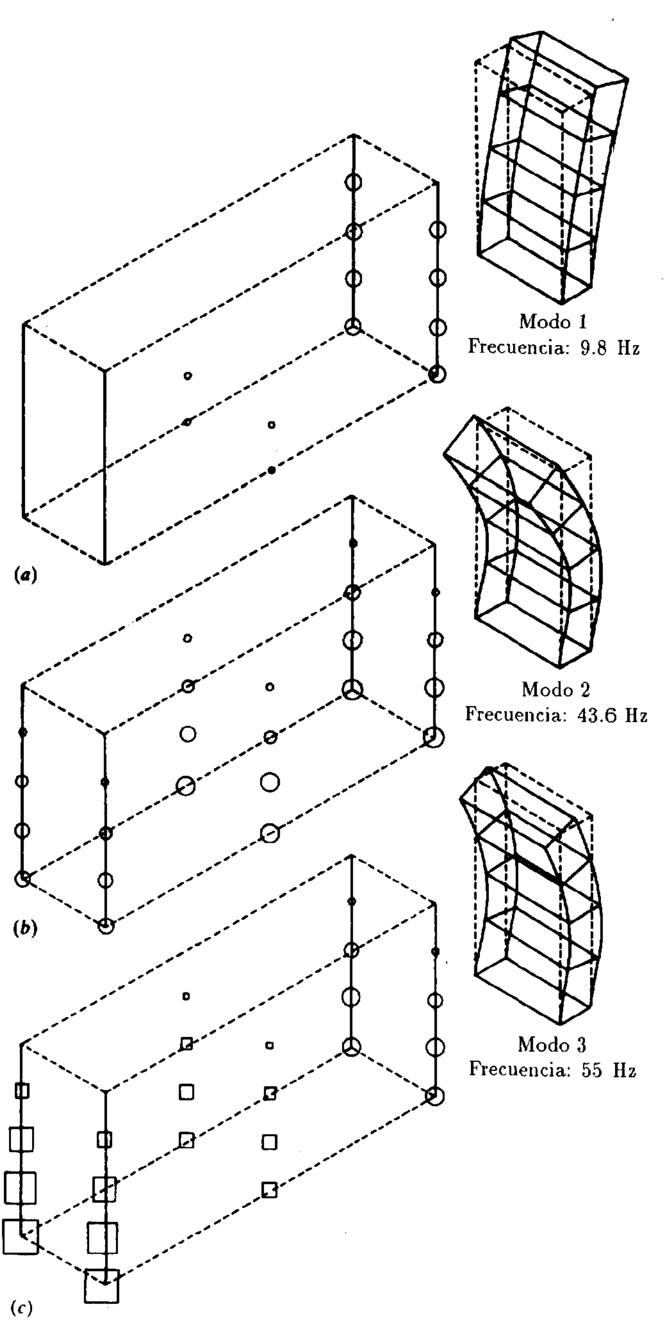


Figura 11.4 Masa de fluido con una superficie libre oscilando con una pared. Los círculos muestran la amplitud de la presión y los cuadrados indican signos opuestos. Planteamiento tridimensional utilizando elementos parabólicos.[23]

En lo anterior, los parámetros Θ_1, Θ_2, $\bar{\Theta}_1$ y $\bar{\Theta}_2$ son similares a los de la Ec. (10.35) y pueden ser elegidos por el usuario. Es interesante observar que el sistema de ecuaciones escrito de la forma siguiente resulta simétrico y de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{C}\Theta_1\Delta t + \mathbf{K}\Theta_2\Delta t^2/2 & -\mathbf{Q}\Theta_2\Delta t^2/2 \\ -\mathbf{Q}^T\Theta_2\Delta t^2/2 & -\mathbf{S}\Theta_2\Delta t^2/2 - \mathbf{H}\bar{\Theta}_2\Theta_2\Delta t^4/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} \tag{11.26}$$

donde $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se calculan a partir de cantidades conocidas. Al derivar la ecuación anterior, la segunda Ec. (11.25) ha sido multiplicada por $-\Theta_2\Delta t^2/2$.

No es necesario entrar en detalles de cálculo ya que éste sigue la forma usual de determinar $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ y entonces evaluar las variables del problema, esto es, $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}$, $\bar{\mathbf{p}}_{n+1}$, $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}$ y $\dot{\bar{\mathbf{p}}}_{n+1}$ en $\mathbf{t}_{n+1}$ antes de seguir al siguiente paso de tiempo.

La no linealidad del comportamiento estructural puede ser fácilmente acomodada de nuevo utilizando los procedimientos descritos en el capítulo anterior.

Es, sin embargo, importante considerar la estabilidad del sistema que naturalmente dependerá de la elección de Θ_i y $\bar{\Theta}_i$. Aquí encontramos, utilizando los procedimientos descritos en el Capítulo 10, que se obtiene estabilidad incondicional cuando

$$\begin{aligned} \Theta_2 \geq \Theta_1 \qquad \Theta_1 \geq \frac{1}{2} \\ \bar{\Theta}_2 \geq \Theta_2 \qquad \bar{\Theta}_1 \geq \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{11.27}$$

Es instructivo notar que se obtendría precisamente el mismo resultado si se utilizasen aproximaciones GN22 en la Ec. (11.24).

La derivación de tales condiciones de estabilidad es elemental y sigue exactamente las líneas de la Sección 10.3.4 del capítulo previo. Sin embargo, el álgebra es a veces tediosa y en general presentaremos en el presente capítulo sólo los resultados. No obstante, para permitir al lector repetir tales cálculos para cualquier caso que se encuentre esbozaremos los cálculos para el presente ejemplo.

Estabilidad del esquema de avance en el tiempo para estructura-fluido.[26] Para evaluaciones de estabilidad es siempre recomendable considerar el sistema descompuesto en modos con valores escalares. Por tanto, reescribiremos la Ec. (11.25) omitiendo los términos de fuerza y poniendo $\Theta_1 = \bar{\Theta}_1$, etc., de la forma

$$m\alpha + c(\dot{u}_n + \alpha\Theta_1\Delta t) + k\left(u_n + \dot{u}_n\Theta_1\Delta t + \frac{\alpha\Theta_1\Delta t^2}{2}\right)$$
$$- q\left(p_n + \dot{p}_n\Theta_1\Delta t + \frac{\alpha\Theta_2\Delta t^2}{2}\right) = 0 \qquad \text{(A)}$$

y
$$s\beta + q\alpha + h\left(p_n + \dot{p}_n\Theta_1\Delta t + \frac{\beta\Theta_2\Delta t^2}{2}\right) = 0 \qquad \text{(B)}$$

Para completar las relaciones de recurrencia se tiene

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \dot{u}_n\Delta t + \frac{\alpha\Delta t^2}{2} \\ \dot{u}_{n+1} &= \dot{u}_n + \alpha\Delta t \\ p_{n+1} &= p_n + \dot{p}_n\Delta t + \frac{\beta\Delta t^2}{2} \\ \dot{p}_{n+1} &= \dot{p}_n + \beta\Delta t \end{aligned} \qquad \text{(C)}$$

La solución exacta del sistema anterior siempre será de la forma

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mu u_n \\ \dot{u}_{n+1} &= \mu\dot{u}_n \\ p_{n+1} &= \mu p_n \\ \dot{p}_{n+1} &= \mu\dot{p}_n \end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

e inmediatamente podemos poner

$$\mu = \frac{1-z}{1+z}$$

sabiendo que para estabilidad se requiere que la parte real de z sea negativa.

Eliminando todos los valores $n+1$ de las Ecs. (C) y (D) se llega a

$$\begin{aligned} \dot{u}_n &= \frac{2z}{\Delta t}u_n & \dot{p}_n &= \frac{2z}{\Delta t}p_n \\ \alpha &= \frac{4z^2}{(1-z)\Delta t^2}u_n & \beta &= \frac{4z^2}{(1-z)\Delta t^2}p_n \end{aligned} \qquad \text{(E)}$$

Introduciendo (E) en el sistema (A) resulta

$$\{[4m' - 2(1-2\Theta_1)c' - 2k(\Theta_1 - \Theta_2)]z^2 + [2c' - k(1-2\Theta_1)]z + k\}u_n$$
$$+\{2q(\Theta_1 - \Theta_2)z^2 + q(1-2\Theta_1)z - q\}p_n = 0 \qquad \text{(F)}$$
y
$$4qz^2u_n + \{[4s - 2h'(\Theta_1 - \Theta_2)]z^2 - h'(1-2\Theta_1)z + h'\}p_n = 0$$

donde

$$m' = \frac{m}{\Delta t^2} \qquad c' = \frac{c}{\Delta t} \qquad h' = h\Delta t^2$$

Para que existan soluciones no triviales el determinante de la Ec. (F) tiene que ser nulo. Este determinante proporciona la ecuación característica para z, la cual es un polinomio de cuarto orden de la forma

$$a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_4 = 0$$

El uso de las condiciones de Routh-Hurwitz (véase Sección 10.3.4) asegura que los requisitos de estabilidad se satisfacen, esto es, que las raices de z tienen partes reales negativas.

Los requisitos son los siguientes:

$$a_0 > 0, \quad a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad a_3 \geq 0, \quad \text{y} \quad a_4 \geq 0$$

$$a_0 = [4m' - 2(1-2\Theta_1)c' - 2k(\Theta_1 - \Theta_2)][4s - 2h'(\Theta_1 - \Theta_2)] - 2q(\Theta_1 - \Theta_2) + 4q$$
$$> 0 \quad \text{para} \quad m', c', k, s, h' \geq 0 \qquad \text{(G)}$$

La inecuación se satisface si

$$\Theta_1 \geq \tfrac{1}{2} \qquad \Theta_2 \geq \Theta_1$$

Si se satisfacen todas las igualdades entonces debe satisfacerse que $m's > 0$. Si $m's = 0$ y $c' = 0$ en tal caso debe satisfacerse que $\Theta_2 > \Theta_1$.

$$\begin{aligned} a_1 = {} & [4m' - 2(1-2\Theta_1)c' - 2k(\Theta_1 - \Theta_2)][-h'(1-2\Theta_1)] \\ & + [2c' - k(1-2\Theta_1)][4s - 2h'(\Theta_1 - \Theta_2)] - 4q^2(1-2\Theta_1) \\ \geq {} & 0 \end{aligned} \qquad \text{(H)}$$

La inecuación se satisface si

$$\Theta_1 \geq \tfrac{1}{2} \qquad \Theta_2 \geq \Theta_1$$

$$\begin{aligned} a_2 = {} & [4m' - 2(1-2\Theta_1)c' - 2k(\Theta_1 - \Theta_2)]h' + [2c' - k(1-2\Theta_1)][-h'(1-2\Theta_1)] \\ & + k[4s - 2h'(\Theta_1 - \Theta_2)] + 4q^2 \\ \geq {} & 0 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

La inecuación se satisface si (G) y (H) se satisfacen.

$$a_3 = [2c' - k(1-2\Theta_1)]h' - kh'(1-2\Theta_1) \geq 0 \qquad \text{(J)}$$

La inecuación se satisface si (G) y (H) se satisfacen.

$$a_4 = kh' \geq 0 \qquad \text{(K)}$$

La inecuación se satisface automáticamente.

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_0a_3 &\geq 0 \\ a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(L)}$$

Las dos inecuaciones se satisfacen si (G) y (H) se satisfacen.

11.2.6 *Caso especial de fluidos incompresibles.* Si el fluido es incompresible además de ser no viscoso, su comportamiento se describe por una simple ecuación laplaciana

$$\nabla^2 p = 0 \tag{11.28}$$

que se obtiene poniendo $c = \infty$ en la Ec. (11.5).

En ausencia de efectos de onda de superficie y de presiones prescritas no nulas, la ecuación discreta (11.19) se convierte simplemente en

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{p}} = -\mathbf{Q}^T\ddot{\bar{\mathbf{u}}} \tag{11.29a}$$

ya que la radiación de ondas desaparece. Es sencillo obtener ahora

$$\bar{\mathbf{p}} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{Q}^T\ddot{\bar{\mathbf{u}}} \tag{11.29b}$$

y la sustitución de lo anterior en la ecuación de la estructura (11.17) resulta en

$$(\mathbf{M} + \mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{Q}^T)\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{11.30}$$

Éste es ahora un sistema estructural estándar en el que la matriz de masa ha sido aumentada por una *matriz de masa añadida*

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{Q}^T \tag{11.31}$$

y su solución sigue los esquemas estándar de los capítulos anteriores.

Debemos remarcar que:

1. En general no se necesita la inversa completa de $\mathbf{H}$ ya que sólo se necesitan las presiones en los nodos de la interfase.
2. En general, la cuestión de cuándo los efectos de la compresibilidad pueden ser ignorados es difícil y depende mucho de las frecuencias que deban ser consideradas en el análisis. Por ejemplo, en el análisis de la interaccion presa-embalse se ha debatido mucho este tema.[27] Aquí el período fundamental compresible puede ser del orden de H/c, donde H es una dimensión típica (tal como la altura de la presa). Si este período es del mismo orden de, por ejemplo, el movimiento de solicitación del terremoto, entonces naturalmente la compresibilidad debe ser tenida en cuenta. Si es mucho más corto entonces el despreciarla puede estar justificado.

11.2.7 *Efectos de cavitación en fluidos.* En fluidos tales como el agua el comportamiento lineal bajo deformación volumétrica termina cuando las presiones caen por debajo de un cierto umbral. Éste es el límite de la presión de vapor. Cuando éste se alcanza se forman cavidades o burbujas distribuidas y la presión permanece prácticamente constante.

Para seguir tal comportamiento debe introducirse una ley constitutiva no lineal. Newton[28] definió una variable útil para esta formulación:

$$s = \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) \equiv \nabla^T(\rho\mathbf{u}) \tag{11.32}$$

donde $\mathbf{u}$ es el desplazamiento del fluido. La no linealidad ahora es de tal forma que

$$\begin{aligned}
&p = -Ku_{i,i} = c^2 s \qquad \text{en comportamiento lineal}\\
\text{si}\quad &s < (p_a - p_v)/c^2\\
\text{y}\\
&p = p_a - p_v\\
\text{si}\quad &s > (p_a - p_v)/c^2 \qquad \text{por debajo del umbral}
\end{aligned} \tag{11.33}$$

Aquí p_a es la presión atmosférica (en la que se supone $u = 0$), p_v la presión de vapor y c la velocidad del sonido.

Controlar claramente las deformaciones es un problema difícil en la formulación usando las variables de velocidad y presión [Ecs. (11.1) a (11.5)]. Aquí, por tanto, es deseable un cambio de variable y es práctico introducir el potencial de desplazamientos ψ de tal forma que

$$\rho\mathbf{u} = -\nabla\psi \tag{11.34}$$

De la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (11.1) se ve que

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = -\nabla p = -\nabla\ddot{\psi}$$

Por tanto

$$\ddot{\psi} = p \tag{11.35}$$

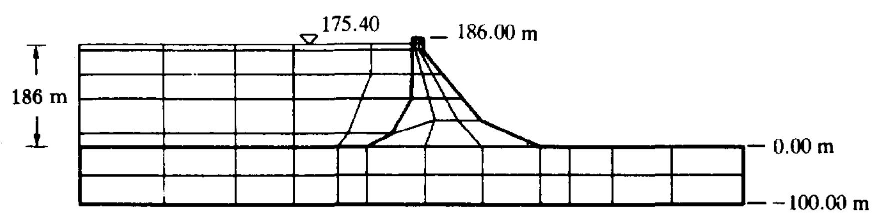
La ecuación de continuidad (11.2) ahora da

$$s = p\operatorname{div}\mathbf{u} = -\nabla^2\psi = \left(\frac{1}{c^2}\right)p = \left(\frac{1}{c^2}\right)\ddot{\psi} \tag{11.36}$$

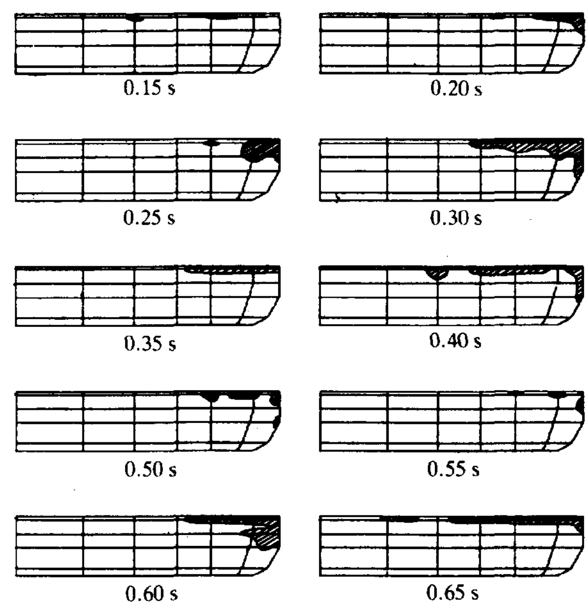
en el caso lineal [con los cambios apropiados de acuerdo con las condiciones (11.33) durante la cavitación].

Es interesante notar que la Ec. (11.36) tiene la misma forma que la Ec. (11.5) aunque se ha cambiado la variable.

Detalles de las condiciones de contorno, la discretización y el acoplamiento se describen completamente en la referencia [29] y siguen la metodología estándar dada previamente. La Figura 11.5, tomada de dicha referencia, ilustra los resultados de un análisis no lineal mostrando el desarrollo de las zonas de cavitación en un embalse.



(*a*) Malla estructura–fluido (elementos cuadráticos)



(*b*) Zonas en las que aparece cavitación

Figura 11.5 Estudio dinámico acoplado de la presa de Bhakra y el embalse.[29] Interacción durante el primer segundo de movimiento del terremoto mostrando el desarrollo de la cavitación.

11.3 Interacción suelo-fluido intersticial (problema de clase II)

11.3.1 *El problema y la ecuación de gobierno. Discretización.* Es bien conocido que el comportamiento de suelos (y, de hecho, de otros geomateriales) está fuertemente influenciado por las presiones del fluido presente en los poros del material. Ciertamente, el concepto de *tensión efectiva* tiene aquí una importancia vital. Por tanto, si $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor que describe la tensión total (positiva para tracción) que actúa en el área total del sólido y los poros y p es la presión del fluido en los poros (generalmente de agua), la tensión efectiva se define como

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{m}p \tag{11.37}$$

Aquí $\mathbf{m}^T = [1,1,1,0,0,0]$ si se usa la representación vectorial de tensión de los Capítulos 2 a 5 del Volumen 1. Es bien conocido que es sólo la tensión $\boldsymbol{\sigma}'$ la responsable de las deformaciones (o colapso) del esqueleto sólido del suelo (excluyendo aquí una muy pequeña compresión volumétrica de los granos, que debe ser incluida en ciertos casos). Por lo tanto, las leyes constitutivas incrementales que ligan los cambios de tensión y deformación pueden escribirse como

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}_T d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{11.38}$$

Inmediatamente se pueden escribir las ecuaciones discretas de equilibrio para la mezcla sólido-fluido exactamente de la forma en que se hizo en todos los problemas de mecánica de sólidos:

$$\int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\, d\Omega + \mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{11.39}$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ son los parámetros de discretización en desplazamientos, esto es

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} \tag{11.40}$$

$\mathbf{B}$ es la matriz de deformación y $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{f}$ tienen el significado usual de matrices de masa, amortiguamiento y fuerza.

Sin embargo, el término en el que aparece la tensión debe ser dividido de la forma

$$\int \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\, d\Omega \equiv \int \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}'\, d\Omega - \int \mathbf{B}^T\mathbf{m}p\, d\Omega \tag{11.41}$$

para permitir que se incorporen las relaciones directas entre tensiones efectivas y deformaciones (y, por tanto, desplazamientos). Para un esqueleto de suelo elástico lineal donde $\mathbf{D}_T$ es constante se tiene inmediatamente

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{11.42}$$

donde $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez estándar escrita como

$$\int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}'\, d\Omega = \left(\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, d\Omega\right)\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} \tag{11.43}$$

y $\mathbf{Q}$ acopla el campo de presiones y las ecuaciones de equilibrio suponiendo que las primeras se discretizan de la forma

$$p \approx \mathbf{N}_p\bar{\mathbf{p}} \tag{11.44}$$

Por tanto

$$\mathbf{Q} = \int \mathbf{B}^T\mathbf{m}\mathbf{N}_p\, d\Omega \tag{11.45}$$

En la anterior discretización se han usado de forma conveniente las mismas formas de elemento para las variables $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{p}}$, aunque no necesariamente idénticas interpolaciones. Con las ecuaciones dinámicas acopladas al campo de presión se necesita claramente una ecuación adicional de la cual se pueda obtener el campo de presiones. Ésta se obtiene de la ecuación de filtración transitoria de la forma

$$-\nabla(k\nabla p) + \frac{\dot{p}}{Q} + \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \tag{11.46}$$

donde Q está relacionada con la compresibilidad del fluido, k es la permeabilidad y el último término representa la velocidad de deformación volumétrica del esqueleto sólido, que naturalmente viene dada en función de la discretización de los desplazamientos de la forma

$$\varepsilon_{ii} \approx \mathbf{m}^T\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \tag{11.47}$$

La ecuación de filtración puede ahora, por supuesto, ser discretizada mediante la forma estándar de Galerkin como

$$\mathbf{Q}^T\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{S}\dot{\bar{\mathbf{p}}} + \mathbf{H}\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{11.48}$$

donde $\mathbf{Q}$ es precisamente la de la Ec. (11.45), y

$$\mathbf{S} = \int_\Omega \mathbf{N}_p^T\frac{1}{Q}\mathbf{N}_p\, d\Omega \qquad \mathbf{H} = \int_\Omega \nabla\mathbf{N}_p^T k\nabla\mathbf{N}_p\, d\Omega \tag{11.49}$$

con $\mathbf{q}$ conteniendo los términos de fuerza y de contorno. La derivación de las ecuaciones acopladas flujo-suelo fue obtenida por primera vez por Biot,[30] pero la presente formulación fue elaborada en las referencias [31] a [42], donde se discuten varias aproximaciones además del efecto de varias leyes constitutivas con respuesta no lineal.

No comentaremos con detalle ninguna de las condiciones de contorno ya que son del tipo estándar y están bien documentadas en los capítulos previos.

11.3.2 *El formato de las ecuaciones acopladas.* Aunque el principal interés de la solución de las ecuaciones acopladas está en su forma no lineal, es instructivo considerar la versión lineal de las Ecs. (11.42) y (11.48). Ésta puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \tag{11.50}$$

De nuevo, como en el problema de interacción estructura-fluido, el sistema es globalmente no simétrico, a pesar de la simetría inherente de las matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$ y $\mathbf{H}$. Sin embargo, como el problema de vibración libre no es de gran interés, aquí no discutiremos su simetrización. En el algoritmo de solución transitoria procederemos de una forma similar a la descrita en la Sección 11.2.5 y de nuevo obtendremos simetría.

11.3.3 *Algoritmo transitorio paso a paso.* Los procedimientos de avance en el tiempo se pueden obtener de forma análoga a la presentada en la Sección 11.2.5. Elegimos aquí usar el algoritmo GNpj de orden más bajo (véase Sección 10.3.3) para aproximar cada variable.

Por tanto, para $\bar{\mathbf{u}}$ utilizaremos GN22, escribiendo

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1} &= \dot{\bar{\mathbf{u}}}_n + \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n\Delta t + \beta_1\Delta\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n\Delta t \\ &\equiv \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^p + \beta_1\Delta\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n\Delta t \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \bar{\mathbf{u}}_n + \dot{\bar{\mathbf{u}}}_n\Delta t + \frac{\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n\Delta t^2}{2} + \frac{\beta_2\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n\Delta t^2}{2} \\ &\equiv \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^p + \frac{\beta_2\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n\Delta t^2}{2} \end{aligned} \tag{11.51a}$$

Para las variables p, que aparecen hasta primer orden, utilizaremos GN11, de la forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}_{n+1} &= \bar{\mathbf{p}}_n + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_n\Delta t + \Theta\Delta\dot{\bar{\mathbf{p}}}_n\Delta t \\ &= \bar{\mathbf{p}}_{n+1}^p + \Theta\Delta\dot{\bar{\mathbf{p}}}_n\Delta t \end{aligned} \tag{11.51b}$$

En lo anterior, $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^p$, etc., representan valores que pueden ser inmediatamente "predichos" a partir de parámetros conocidos en el tiempo t_n y

$$\Delta\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n = \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n \qquad \Delta\dot{\bar{\mathbf{p}}}_n = \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{n+1} - \dot{\bar{\mathbf{p}}}_n \tag{11.52}$$

son las incógnitas.

Para completar el algoritmo de recurrencia es necesario introducir lo anterior en las ecuaciones acopladas de gobierno [(11.39) y (11.48)] escritas en el tiempo t_{n+1}. Por tanto, se precisan las siguientes igualdades:

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1} + \int \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\, d\Omega - \mathbf{Q}\bar{\mathbf{p}}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{11.53}$$

y

$$\mathbf{Q}^T\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1} + \mathbf{S}\dot{\bar{\mathbf{p}}}_{n+1} + \mathbf{H}\bar{\mathbf{p}}_{n+1} + \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{0}$$

en las que generalmente $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}$ se evalúa utilizando la relación constitutiva (11.38) conocida $\boldsymbol{\sigma}'_n$.

El sistema es no lineal y, de hecho, en muchas ocasiones la matriz $\mathbf{H}$ puede depender de los valores de $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ debido a la variación de la permeabilidad con la deformación. Métodos de solución para tales sistemas

no lineales se han discutido en el Capítulo 7 y no los repetiremos aquí. Sin embargo, es de interés estudiar la forma lineal ya que el sistema no lineal resolverá ecuaciones similares de forma iterativa.

La sustitución de las Ecs. (11.51) en (11.53) resulta en el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}+\mathbf{C}\beta_1\Delta t+\mathbf{K}\beta_2\Delta t^2/2 & -\mathbf{Q}\Theta\Delta t \\ -\mathbf{Q}^T\Theta\Delta t & -\mathbf{S}\Theta/\beta_1-\mathbf{H}\Theta^2\Delta t/\beta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n \\ \Delta\dot{\bar{\mathbf{p}}}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} \tag{11.54}$$

donde se ha obtenido simetría multiplicando la segunda por $-\Theta/\beta_1$ y donde $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son vectores que pueden ser evaluados a partir de los valores iniciales conocidos.

La solución de la Ec. (11.54) y el uso de las Ecs. (11.51) completan la relación de recurrencia.

La estabilidad del esquema se puede hallar siguiendo idénticos procedimientos a los utilizados en la Sección 11.2.5 y el resultado es [26] que la estabilidad es incondicional cuando

$$\beta_2 \geq \beta_1 \qquad \beta_1 \geq \frac{1}{2} \qquad \Theta \geq \frac{1}{2} \tag{11.55}$$

11.3.4 *Casos especiales y requisitos de robustez.* Frecuentemente la compresibilidad de la fase fluida que aparece en la matriz $\mathbf{S}$ es tal que

$$\mathbf{S} \approx 0$$

comparado con los otros términos. Además, la permeabilidad k puede a veces ser muy pequeña (por ejemplo, en arcillas) y

$$\mathbf{H} \approx 0$$

lo que lleva al llamado comportamiento "no drenado".

Ahora la ecuación matricial en (11.54) se convierte en una forma de restricción lagrangiana (véase Capitulo 12 del Volumen 1), esto es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n \\ \Delta\dot{\bar{\mathbf{p}}}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} \tag{11.56}$$

y esto es resoluble sólo si

$$n_u \geq n_p$$

donde n_u y n_p son los números de parámetros de $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{p}}$.

El problema es de hecho idéntico al que se encuentra para comportamiento incompresible y las interpolaciones usadas para las variables $\mathbf{u}$ y p

deben satisfacer idénticos criterios. Como es necesaria la interpolación C_0 para ambas variables, en la Figura 11.6 se muestran formas de elementos adecuados que pueden ser utilizados con confianza.

La formulación puede naturalmente usarse para la solución estacionaria, pero debe remarcarse que en tales casos se produce desacoplamiento, ya que la ecuación de filtración pueder ser resuelta independientemente.

Finalmente merece la pena notar que la formulación también resuelve el conocido problema de consolidación de suelos donde los fenómenos son tan lentos que el término dinámico

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} \to 0$$

Sin embargo, no son necesarias modificaciones especiales y el algoritmo es de nuevo aplicable.

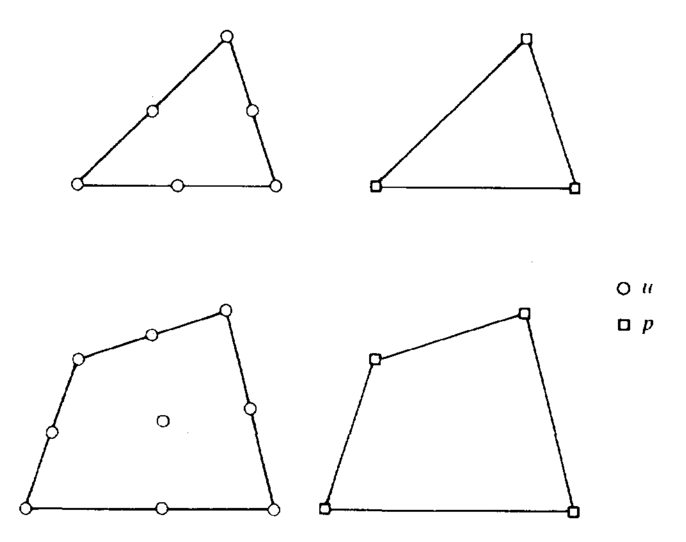


Figura 11.6 Interpolaciones "robustas" para el problema acoplado suelo-fluido.

11.3.5 *Ejemplos. Licuefacción de suelos.* Como ya se ha mencionado, la aplicación más interesante del comportamiento acoplado suelo-fluido es cuando se tienen en cuenta las propiedades no lineales del suelo. En particular, es un hecho bien conocido que la deformación repetida de un material granular, tipo suelo, en ausencia de fluido intersticial provoca una disminución del volumen (densificación) debido a la redistribución de las partículas. Esto, cuando está presente un fluido intersticial, tenderá (vía los términos de acoplamiento) a incrementar las presiones del fluido y,

por tanto, a reducir la resistencia del suelo. Ésta, como es bien conocido, disminuye con la tensión media efectiva de compresión.

No es sorprendente por lo tanto que bajo acción dinámica el suelo frecuentemente pierda toda su resistencia y se comporte casi como un fluido, llevando ocasionalmente a colapsos catastróficos de cimentaciones estructurales durante los terremotos. La reproducción de tales fenómenos en modelos computacionales no es fácil, ya que la descripción del comportamiento constitutivo para suelos no es perfecto. Sin embargo, el mucho esfuerzo dedicado a este tema ha producido frutos,[34–42] y existe una razonable confianza en las predicciones conseguidas cuando se comparan con los estudios experimentales. Uno de tales estudios se ilustra en la Figura 11.7, donde se presenta la comparación con ensayos llevados a cabo en una máquina centrífuga.[42] En particular, debe notarse la cercana correlación entre la presión y los desplazamientos calculados con los obtenidos experimentalmente.

11.3.6 *Biomecánica, extracción de petróleo y otras aplicaciones.* La interacción entre un medio poroso y el fluido intersticial no está limitada a los suelos. La mismas ecuaciones describen, por ejemplo, el problema de biomecánica de la interacción entre hueso y fluido en los cuerpos vivos. Existen aplicaciones documentadas en este campo.[43,44]

En ocasiones, dos (o más) fluidos están presentes en los poros y pueden escribirse ecuaciones similares para describir la interacción.[45,46] Problemas de asentamiento del terreno en campos petrolíferos debido a la extracción del crudo o flujo de mezclas de agua/crudo en la extracción petrolífera, etc., son buenos ejemplos de la aplicación de técnicas aquí descritas.

11.4 Sistemas partidos de una sola fase –particiones implícito-explícitas (problemas de clase I)–

En la Figura 11.1(*b*), en la que se describían problemas acoplados a través de una interfase, ya hemos indicado la posibilidad de que una estructura sea dividida en subestructuras que se unen únicamente a través de una interfase. Aquí las subestructuras serán en general de clase similar, pero pueden diferenciarse en la manera (simplemente el tamaño) de la discretización utilizada en cada uno o incluso en los algoritmos transitorios empleados. En el Capítulo 13 del Volumen 1 hemos descrito tipos especiales de formulaciones mixtas que permiten la unión de subdominios en los que, por ejemplo, se usan aproximaciones de tipo contorno en una de ellas y elementos finitos estándar en la otra. No volveremos ahora a esta fase y supondremos simplemente que el sistema total puede describirse utilizando tales procedimientos mediante un único sistema de ecuaciones en el tiempo.

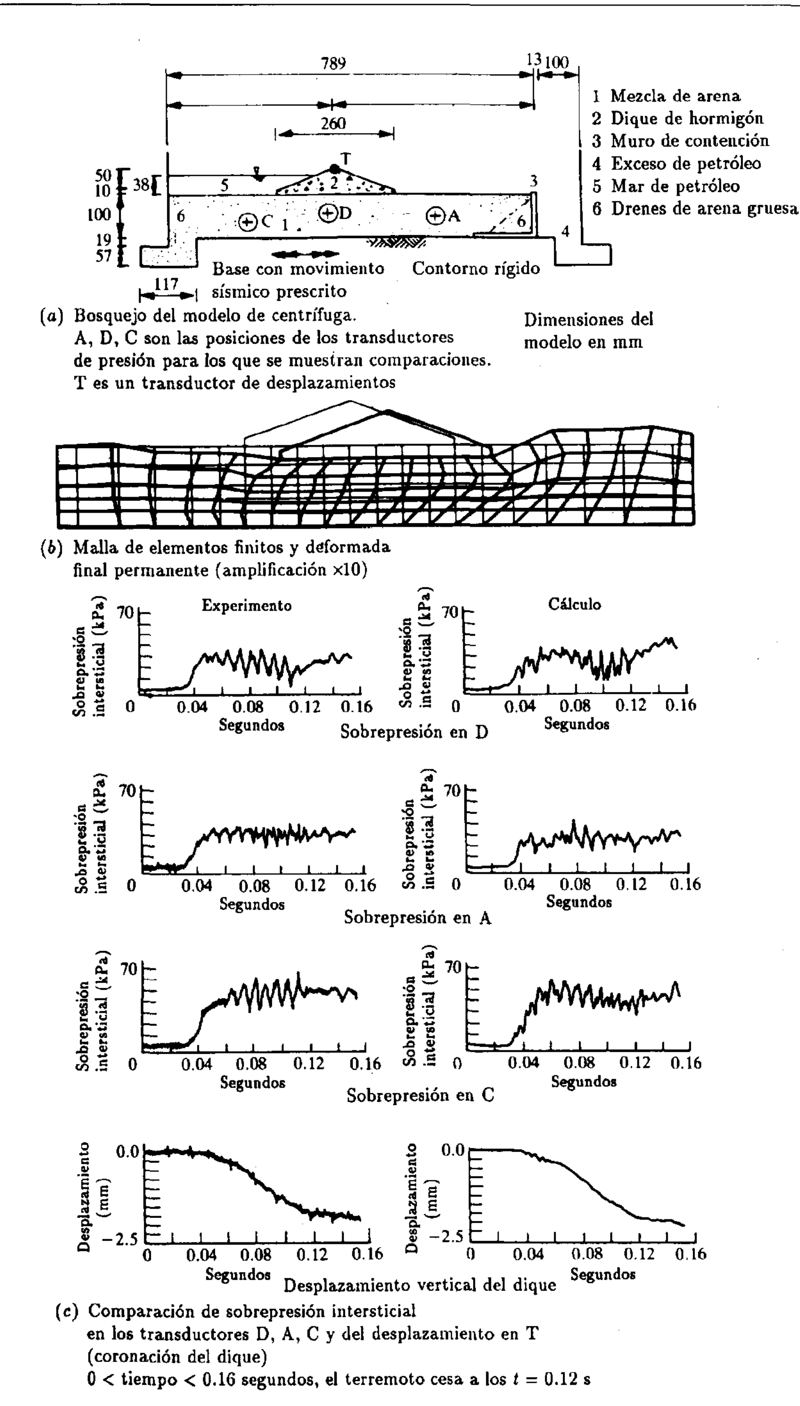
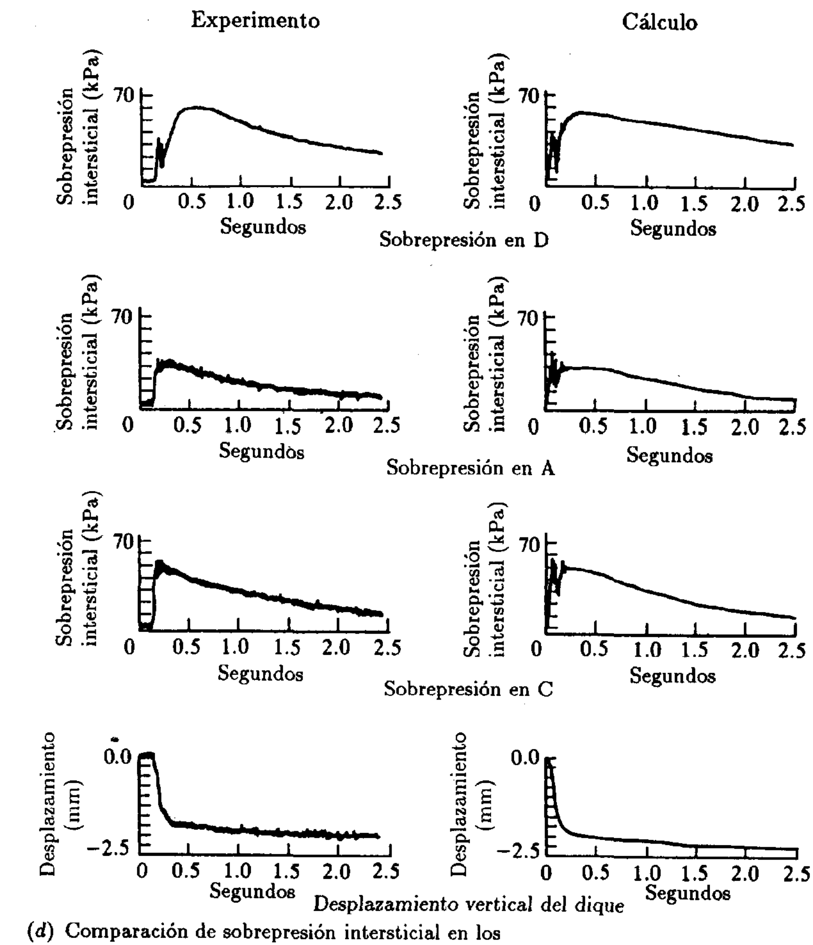


Figura 11.7 Interacción suelo-agua intersticial. Resultados del cálculo y del modelo en una máquina centrífuga comparados para el problema de la cimentación de un dique sometida a un terremoto simulado.



(*d*) Comparación de sobrepresión intersticial en los transductores D, C, A y del desplazamiento en T (coronación del dique)
0 < tiempo < 2.5 segundos.
Nótese el proceso de consolidación

Figura 11.7 (*continuación*).

Aquí consideramos únicamente un problema de primer orden (pero puede extenderse a un procedimiento similar para el sistema dinámico de segundo orden):

$$\mathbf{C\dot{a}} + \mathbf{Ka} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{11.57}$$

que puede ser partido en dos (o más) componentes, escribiendo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_1 \\ \dot{\mathbf{a}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{11.58}$$

Por varias razones puede ser deseable usar en cada partición un algoritmo diferente de avance en el tiempo. Aquí supondremos la misma estructura del algoritmo (SS11) y el mismo paso de tiempo (Δt), pero simplemente un parámetro Θ distinto en cada uno. Procediendo, por tanto, como en los otros análisis acoplados

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_{1n} + \boldsymbol{\alpha}_1 \tau \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_{2n} + \boldsymbol{\alpha}_2 \tau \end{aligned} \tag{11.59}$$

Sustituyendo lo anterior en cada una de las particiones y utilizando diferentes funciones de ponderación, obtenemos

$$\mathbf{C}_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{C}_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \mathbf{K}_{11}(\mathbf{a}_{1n} + \Theta\boldsymbol{\alpha}_1\Delta t) + \mathbf{K}_{12}(\mathbf{a}_{2n} + \Theta\boldsymbol{\alpha}_2\Delta t) + \mathbf{f}_1 = \mathbf{0} \tag{11.60a}$$

$$\mathbf{C}_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{C}_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \mathbf{K}_{21}(\mathbf{a}_{1n} + \bar{\Theta}\boldsymbol{\alpha}_1\Delta t) + \mathbf{K}_{22}(\mathbf{a}_{2n} + \bar{\Theta}\boldsymbol{\alpha}_2\Delta t) + \mathbf{f}_2 = \mathbf{0} \tag{11.60b}$$

Este sistema puede resolverse de la forma usual para obtener $\boldsymbol{\alpha}_1$ y $\boldsymbol{\alpha}_2$, y obtener relaciones de recurrencia incluso si Θ y $\bar{\Theta}$ son diferentes. Los restantes detalles de los cálculos paso a paso siguen el esquema obvio, pero la cuestión de la estabilidad acoplada debe discutirse. No se darán aquí[47] detalles de tales evaluaciones de estabilidad, pero el resultado es interesante.

1. Se obtiene estabilidad incondicional del sistema completo si

$$\Theta \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \bar{\Theta} \geq \frac{1}{2}$$

2. La estabilidad condicional requiere que

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit}$$

donde la condición Δt_{crit} es la que corresponde a cada partición del sistema considerado *sin los términos de acoplamiento.*

De hecho, se obtienen resultados similares para sistemas de segundo orden

$$\mathbf{M\ddot{a}} + \mathbf{C\dot{a}} + \mathbf{Ka} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{11.61}$$

partidos de una forma similar y utilizando SS22 ó GN22 en cada uno de ellos.

El lector podría preguntar por qué deben utilizarse diferentes esquemas en cada partición del dominio. La respuesta en el caso de los esquemas *implícitos-implícitos* puede ser simplemente el deseo de introducir diferentes grados de amortiguamiento algorítmico. Sin embargo, es mucho más importante el uso de particiones *explícitas-implícitas*. Como ya se ha mostrado, tanto en problemas "térmicos" como dinámicos, el paso de tiempo crítico es directamente proporcional a h^2 o h (el tamaño del elemento), respectivamente. Claramente, si se utilizase un único esquema explícito con elementos muy pequeños presentes en una de las particiones, este paso de tiempo podría ser demasiado pequeño para que su uso resultase económico. En tales casos puede ser ventajoso utilizar un esquema *explícito* (con $\Theta = 0$ en un problema de primer orden y $\Theta_2 = 0$ en uno dinámico) para una parte del dominio con los elementos más grandes, mientras se mantiene estabilidad incondicional con $\bar{\Theta} > 1/2$, utilizando el mismo paso de tiempo en la partición en la que los elementos son pequeños. Por esta razón tales particiones explícitas-implícitas son usadas frecuentemente en la práctica.

Ciertamente, con una representación diagonal (concentrada) de las matrices **C** o **M** tales esquemas son de hecho *por bloques* ("staggered"), ya que la parte explícita puede avanzarse independientemente de la implícita y proveer inmediatamente los valores de contorno para la partición implícita. Volveremos a estas soluciones por bloques en la siguiente sección.

El primer uso de la partición explícita-implícita fue en 1978.[48,49] En la primera referencia el proceso se daba en una partición idéntica a la presentada aquí. En la segunda, los diferentes algoritmos se asociaban con elementos que necesitaban una partición ligeramente aumentada.

11.5 Procesos de solución por bloques

11.5.1 *Observaciones generales.* Acabamos de observar que en la partición explícita-implícita del avance en el tiempo es posible proceder de una forma *por bloques ("staggered")*, consiguiendo la solución completa del esquema explícito independientemente del implícito y entonces utizando los resultados para progresar con éste. Es tentador examinar la posibilidad de tales procedimientos por bloques de forma general incluso si cada uno utiliza un algoritmo independiente.

En tales procedimientos la primera ecuación debería ser resuelta con algunos valores supuestos (predichos) para las variables de la segunda. Una vez que se ha obtenido la solución del primer sistema, sus valores pueden ser sustituidos en el segundo, permitiendo de nuevo un tratamiento independiente. Si se puede conseguir que tales procedimientos sean estables y razonablemente precisos se abren inmediatamente muchas posibilidades, por ejemplo:

1. Se podrían usar metodologías completamente diferentes en cada parte del sistema acoplado.
2. Se podrían combinar programas desarrollados independientemente que tratasen eficientemente con sistemas individuales.
3. Se podría utilizar cálculo paralelo con sus ventajas inherentes.
4. Finalmente, en sistemas con el mismo fenómeno físico, se podrían desarrollar fácilmente métodos de solución iterativos eficientes.

Los problemas asociados a tales soluciones por bloques han sido discutidos frecuentemente[29,50–53] y en ocasiones no se ha podido conseguir estabilidad incondicional sin modificaciones sustanciales. En lo que sigue se indican algunas de las opciones existentes.

11.5.2 *Procesos de solución por bloques en sistemas de una sola fase.* Examinaremos primero esta posibilidad, habiéndola ya mencionado como una forma especial que surge de forma natural de los procesos explícitos-implícitos de la Sección 11.4. Volvemos aquí a considerar el problema de la Ec. (11.57) y la partición dada en la Ec. (11.58). Además, por simplicidad, supondremos una forma diagonal de la matriz **C**, esto es, que el problema se escribe de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_1 \\ \dot{\mathbf{a}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{11.62}$$

Como ya hemos advertido, el uso de $\Theta = 0$ en la primera ecuación y $\Theta \geq 1/2$ en la segunda [véase Ecs. (11.60)] permitía que la parte explícita se resolviese independientemente de la implícita. Ahora, sin embargo, usaremos la misma Θ en ambas ecuaciones, pero en la primera de las aproximaciones, análoga a la Ec. (11.60a), utilizaremos un valor de predicción para la segunda variable:

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2^p = \mathbf{a}_{2n} \tag{11.63}$$

Esto conduce, en lugar de la primera ecuación de (11.60), a

$$\mathbf{C}_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{K}_{11}(\mathbf{a}_{1n} + \Theta\boldsymbol{\alpha}_1\Delta t) = -\mathbf{K}_{12}\mathbf{a}_{2n} - \mathbf{f}_1 \tag{11.64a}$$

lo que permite la solución directa para $\boldsymbol{\alpha}_1$.

Siguiendo este paso, la segunda ecuación se puede resolver, naturalmente, para $\boldsymbol{\alpha}_2$ sustituyendo el valor previo de $\boldsymbol{\alpha}_1$, esto es

$$\mathbf{C}_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \mathbf{K}_{22}(\mathbf{a}_{2n} + \Theta\boldsymbol{\alpha}_2\Delta t) = -\mathbf{K}_{21}(\mathbf{a}_{1n} + \Theta\boldsymbol{\alpha}_1\Delta t) - \mathbf{f}_2 \tag{11.64b}$$

Resulta que este esquema es incondicionalmente estable si $\Theta \geq 1/2$, o sea, como antes, su estabilidad es incondicional siempre que cada

componente sea estable. Resulta también que se obtienen condiciones similares en los problems dinámicos de segundo orden.

Obviamente, sin embargo, se pierde algo de precisión ya que la aproximación de la Ec. (11.64a) es explícita en $\mathbf{a}_2$, pero la aproximación es consistente y, por tanto, convergente.

La ventaja de utilizar el procedimento por bloques anterior es clara, ya que ahora la solución de las ecuaciones, aunque no sea explícita, está limitada al tamaño de cada una de las particiones con la consiguiente economía computacional.

Además, es obvio que pueden utilizarse exactamente los mismos procedimientos para cualquier número de particiones y que de nuevo se tendrán las mismas condiciones de estabilidad. Considérese una partición de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & & & & \\ & \mathbf{C}_{22} & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{ii} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mathbf{C}_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_1 \\ \dot{\mathbf{a}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{a}}_i \\ \dot{\mathbf{a}}_k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \cdots & & \\ \mathbf{K}_{22} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{K}_{ii} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_k \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (11.65)$$

Ahora al aproximar la primera ecuación es necesario usar valores de predicción para $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \cdots, \mathbf{a}_k$, escribiendo en lugar de la Ec. (11.64a),

$$\mathbf{C}_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{K}_{11}(\mathbf{a}_{1n} + \Theta\boldsymbol{\alpha}_1\Delta t) = -\mathbf{K}_{12}\mathbf{a}_{2n} - \mathbf{K}_{13}\mathbf{a}_{3n} - \cdots - \mathbf{f}_1 \qquad (11.66)$$

y continuar de forma similar a (11.64b), con los valores de predicción siendo continuamente reemplazados por mejores aproximaciones a medida que la solución progresa.

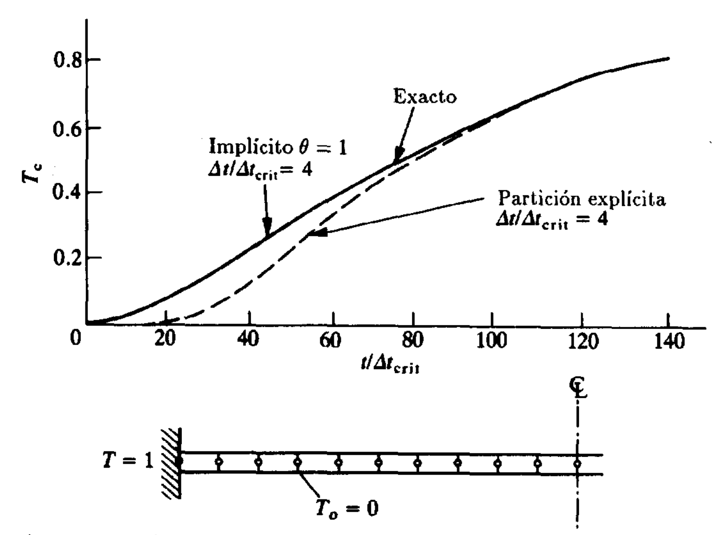
La partición de la Ec. (11.65) puede continuar hasta que cada una de ellas incluya solamente un grado de libertad. Entonces, para cada paso la ecuación que precisa resolverse para α_i es de la forma

$$(C_{ii} + \Theta\Delta t K_{ii})\alpha_i = F_i \qquad (11.67)$$

Esto es una ecuación escalar y, por tanto, el cálculo es *completamente explícito y aún así mantiene estabilidad incondicional* para $\Theta \geq 1/2$. Este

tipo de partición y la derivación de un esquema explícito incondicionalmente estable fue primeramente propuesto por Zienkiewicz *et al.*[53] Un esquema alternativo similar algo más limitado fue propuesto por Trujillo.[54]

Claramente el error en la aproximación en el paso de tiempo decrece a medida que la solución progresa en forma de barrido a través de las particiones y es, por tanto, recomendable alternar las direcciones de barrido durante el cálculo. Por ejemplo, en la Figura 11.8 se muestra una precisión bastante razonable para un problema unidimensional de transmisión del calor en el cual el proceso de *partición explícita* se usa con direcciones alternadas de barrido. Naturalmente la precisión es muy inferior a la de cualquier esquema estándar implícito con el mismo paso de tiempo, aunque el proceso puede usarse de forma efectiva como una forma iterativa de obtener soluciones estacionarias. Aquí son posibles muchas opciones.



Δt_{crit} = paso de tiempo crítico para la forma explícita estándar
T_c = temperatura en el centro

Figura 11.8 Precisión de un procedimiento de partición explícita comparado con un procedimiento estándar implícito para transmisión del calor en una barra.

Es de interés, por ejemplo, considerar el sistema de ecuaciones dado en la Ec. (11.65) como proveniente de una sencilla aproximación por diferencias finitas a, digamos, la ecuación de transmisión de calor en una malla rectangular, como la de la Figura 11.9.

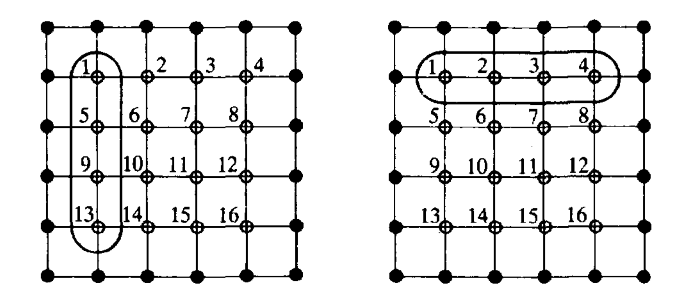


Figura 11.9 Particiones correspondientes con el conocido esquema de diferencias finitas IDA (implícito de direcciones alternadas).

Es bien conocido que el llamado esquema implícito de direcciones alternadas (IDA)[55] representa una solución eficiente tanto para problemas transitorios como estacionarios. Es bastante obvio que este esquema simplemente representa el procedimiento que acabamos de esbozar con particiones representando las líneas de nodos, tales como (1, 5, 9, 13), (2, 6, 10, 14), etc., de la Figura 11.9, alternando con particiones (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), etc.

Obviamente, cuanto mayor sea la partición más preciso resulta el esquema, aunque naturalmente a expensas del coste computacional. El concepto de partición por bloques claramente permite la fácil adopción de tales procedimientos en el contexto de elementos finitos. Aquí se pueden hacer particiones irregulares arbitrariamente elegidas, pero hasta ahora las aplicaciones presentadas solamente trabajan con subdivisiones en mallas regulares.[56] El campo de posibilidades es obviamente grande y está aún por explorar. El uso de cálculo paralelo en tales procedimientos es obvio.

Otra posibilidad añadida que tiene muchas ventajas es el uso de variables jeráquicas basadas en, por ejemplo, series lineales, cuadráticas y de mayor orden, y considerar cada conjunto de estas variables como una partición.[57] Tales procedimientos son particularmente eficientes de forma iterativa si se acoplan con precondicionadores adecuados[58] y forman la base de *los métodos de multimalla.*

11.5.3 *Esquemas por bloques en sistemas fluido-estructura y procedimientos de estabilización.* La aplicación de los métodos de solución por bloques en problemas acoplados representando diferentes fenómenos es más obvia, aunque de hecho resulta más difícil.

Por ejemplo, consideremos las ecuaciones discretas linealizadas estructura-fluido (omitiendo el amortiguamiento) escritas de la forma

[véase Ecs. (11.17) y (11.19)]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{11.68}$$

donde se ha omitido la barra sobre las variables por simplicidad.

Para mayor sencillez utilizaremos el tipo de aproximación GN22 en ambas variables y escribimos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \beta_1 \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n \Delta t = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^p + \beta_1 \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n \Delta t \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{u}}_n \Delta t^2}{2} + \beta_2 \frac{\Delta \ddot{\mathbf{u}}_n \Delta t^2}{2} = \mathbf{u}_{n+1}^p + \frac{\beta_2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n \Delta t^2}{2} \\ \dot{\mathbf{p}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{p}}_n + \ddot{\mathbf{p}}_n \Delta t + \beta_1 \Delta \ddot{\mathbf{p}}_n \Delta t = \dot{\mathbf{p}}_{n+1}^p + \beta_1 \Delta \ddot{\mathbf{p}}_n \Delta t \\ \mathbf{p}_{n+1} &= \mathbf{p}_n + \dot{\mathbf{p}}_n \Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{p}}_n \Delta t^2}{2} + \beta_2 \frac{\Delta \ddot{\mathbf{p}}_n \Delta t^2}{2} = \mathbf{p}_{n+1}^p + \frac{\beta_2 \Delta \ddot{\mathbf{p}}_n \Delta t^2}{2} \end{aligned} \tag{11.69}$$

que juntamente con la Ec. (11.68) escrita en $t = t_{n+1}$ completa el sistema de ecuaciones que requieren solución simultánea para obtener $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_n$ y $\Delta \ddot{\mathbf{p}}_n$.

Ahora una solución por bloques de un tipo bastante obvio sería escribir el primer conjunto de Ecs. (11.68) correspondiente al comportamiento estructural con un valor de predicción (aproximado) para $\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}^p$, ya que esto permitirá la solución independiente para $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_n$ escribiendo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = -\mathbf{f}_{1,n+1} + \mathbf{Q}\mathbf{p}_{n+1}^p \tag{11.70}$$

A esto le seguiría la solución del problema del fluido para $\Delta \ddot{\mathbf{p}}_n$, escribiendo

$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{p}}_{n+1} + \mathbf{H}\mathbf{p}_{n+1} = -\mathbf{q} - \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \tag{11.71}$$

Este esquema resulta, sin embargo, ser únicamente condicionalmente estable,[47] incluso si β_1 y β_2 se eligen de tal forma que una solución simultánea sea incondicionalmente estable. (El límite de estabilidad es, de hecho, el mismo que si se utilizara para la *fase fluida* un esquema completamente explícito).

Se pueden utilizar aquí varios esquemas de estabilización.[20;47] Uno de éstos se da a continuación. En éste, la Ec. (11.70) se aumenta a

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_{n+1} + (\mathbf{K} + \mathbf{Q}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}^T)\mathbf{u}_{n+1} = -\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{Q}\mathbf{p}_{n+1}^p + \mathbf{Q}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{u}_{n+1}^p \tag{11.72}$$

antes de resolver para $\mathbf{u}_{n+1}$. Resulta que el esquema es ahora incondi-

cionalmente estable siempre que se satisfagan las condiciones usuales

$$\beta_2 \geq \bar{\beta}_1 \qquad \beta_1 \geq \frac{1}{2}$$

Tal estabilización precisa la inversa de **S**, pero de nuevo debe advertirse que ésta debe obtenerse sólo para los nodos de acoplamiento en la interfase. Otro esquema estable requiere una inversión similar de **H** y es útil ya que el comportamiento incompresible se satisface de forma automática.

Otros procesos de estabilización similares pueden ser y han sido aplicados con éxito a sistemas suelo-fluido.[59,60]

Referencias

1. O.C. ZIENKIEWICZ, "Coupled problems and their numerical solution", en *Numerical Methods in Coupled sytems*, (eds. R.W. Lewis, P. Bettes y E. Hinton), cap. 1, pp. 35–68, Wiley, Chichester, 1984.
2. O.C. ZIENKIEWICZ, E. OÑATE y J.C. HEINRICH, "A general formulation for coupled thermal flow of metals using finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**, 1497–514, 1981.
3. R.W. LEWIS, P. BETTES y E. HINTON (Eds.), *Numerical Methods in Coupled Systems*, Wiley, Chichester, 1987.
4. R.W. LEWIS, E. HINTON, P. BETTES y B.A. SCHREFLER (eds.), *Numerical Methods in Transient and Coupled Problems*, Wiley, Chichester, 1987.
5. O.C. ZIENKIEWICZ y R.E. NEWTON, "Coupled vibration of a structure submerged in a compressible fluid", en *Proc. Int. Symp. on Finite Elements Techniqes*, Stuttgart, 1–15, May, 1969.
6. P. BETTES y O.C. ZIENKIEWICZ, "Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 1271–90, 1977.
7. O.Z. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY y P. BETTESS, "The Sommerfield (radiation) condition on infinite domains and its modelling in numerical procedures", *Proc. IRIA 3rd Int. Symp. on Computing Methods in Applied Science and Engineering*, Versailles, December, 1977.
8. O.C. ZIENKIEWICZ, P. BETTES y D.W. KELLY, "The finite element method for determining fluid loadings on rigid structures. Two- and three- dimensional formulation", en *Numerical Methods in Offshore Engineering*, (eds. O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis y K.G. Stagg), cap. 4 pp. 141–83, Wiley, Chichester, 1978.
9. O.C. ZIENKIEWICZ y P. BETTESS, "Dynamic fluid-structure interaction. Numerical modelling of the coupled problem", en *Numerical Methods in Offshore Engineering* (eds. O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis y K.G. Stagg), cap. 5, pp. 185–93, wiley, Chichester, 1978.

10. O.C. ZIENKIEWICZ y P. BETTESS, "Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **13**, 1–16, 1978.
11. O.C. ZIENKIEWICZ, H. HARA y P. BETTESS, "Application of finite elements to determination of wave effects on offshore structures", en *BOSS*, (Proc. 2nd Int. Conf. Behaviour of Offshore Structures), pp. 383–90, 1979.
12. O.C. ZIENKIEWICZ y P. BETTES, "Fluid structure dynamic interaction and some "unified" approximation processes", en *5th Int. Symp. on Unification of Finite Elements, Finite Differences and Calculus of Variations*, University of Connecticut, Mayo, 1980.
13. O.C. ZIENKIEWICZ y P. BETTESS, "Fluid structure interaction", en *Proc. Ocean Structural Dynamics Symp.*, Oregon State University, pp. 65–102, September, 1982.
14. R. OHAYON y R. VALID, "The symmetric formulation of free vibration for fluid-structure interaction in bounded media", en *Numerical Methods in Coupled Systems*, (eds. R.W. Lewis, P. Bettess y E. Hinton), Wiley, Chichester, 1984.
15. R. OHAYON, "Symmetric variational formulation for harmonic vibration problems by coupling primal and dual variables–aplications to fluid-structure coupled systems", *La Recherche Aerospatiale*, **3**, 69–77, 1979.
16. M. GERADIN, G. ROBERTS y J. HUCK, "Eigenvalue analysis and transient response of fluid structure interaction problems", *Eng. Comp.*, **1**, 152–60, 1984.
17. Q. SANDBERG y P. GORENSSON, "A symmetric finite element formulation of acoustic fluid-structure interaction analysis", *J. Sound Vibr.*, **213**, 507–15, 1988.
18. K.K. GUPTA, "On a numerical solution of the supersonic panel flutter eigen problem", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 637–45, 1976.
19. B.M. IRONS, "The role of part inversion in fluid-structure problems with mixed variables", *JAIAA*, **7**, 568, 1970.
20. W.J.T DANIEL, "Model methods in finite element fluid-structure eigenvalue problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **15**, 1161-75, 1980.
21. C. FELIPPA, "Symmetrization of coupled eigenproblems by eigenvector augmentation", *Comm. Appli. Num. Meth.*, **4**, 561–3, 1988.
22. R. OHAYON, comunicación personal, 1990.
23. J. HOLBECHE, Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1971.
24. A.K. CHOPRA y S. GUPTA, "Hydrodynamic and foundation interaction effects in earthquake response of a concrete gravity dam", *J. Struct. Div. Am. Soc. Civ, Eng.*, **578**, 1399–412, 1981.

25. J.F. HALL y A.K. CHOPRA, "Hydrodinamic effects in the dynamic response of concrete gravity dams", *J. Earthquake Eng. Struct. Dynam.*, **10**, 333–95, 1982.
26. O.C. ZIENKIEWICZ y R.L. TAYLOR, "Coupled problems-a simple time- stepping procedure", *Comm. Appl. Num. Meth.*, **1**, 233–9, 1985.
27. O.C. ZIENKIEWICZ, R.N. CLOUGH y H.R. SEED, "Earthquake analysis procedures for concrete and earth dams-state of the art", Int. Commission on Large Dams, Bulletin **32**, Paris, 1986.
28. R.E. NEWTON, "Finite element study of shock induced cavitation", *ASCE Spring Convection*, Portland, Oregon, 1980.
29. O.C. ZIENKIEWICZ, D.K. PAUL y E. HINTON, "Cavitation in fluid-structure response (with particular reference to dams under earthquake loading)", *J. Earthquake Eng. Struct. Dynam*, **11**, 463–81, 1983.
30. M.A. BIOT, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous medium, Part I: low frequency range; Part II: high frequency range", *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 168–91, 1956.
31. O.C. ZIENKIEWICZ, C.T. CHANG y P. BETTESS, "Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils. Limits of validity", *Geotechnique*, **30**, 385–95, 1980.
32. O.C. ZIENKIEWICZ, C.T. CHANG, E. HINTON y K.H. LEUNG, "Earth dam analysis for earthquakes. Numerical solution and constitutive relations for non-linear (damage) analysis", en *Dams and Engineering*, pp. 170–94, Institute of Civil Engineering, 1980.
33. O.C. ZIENKIEWICZ y T. SHIOMI, "Dynamic behaviour of saturated porous media, the generalised Biot formulation and its numerical solution", *Int. J. Num. Anal. Geomech.*, **8**, 71–96, 1984.
34. O.C. ZIENKIEWICZ, C.T. CHANG y E. HINTON, "Non linear seismic response and liquefaction", *Int. J. Num. Anal. meth. Geomech.*, **2**, 381–404, 1978.
35. O.C. ZIENKIEWICZ, "Non linear problems of soil statics and dynamics", en *Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, (eds. W. Wunderlich, E. Stein y K.J. Batthe), pp. 259–73, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
36. O.C. ZIENKIEWICZ, K.H. LEUNG y M. PASTOR, "Simple model for transient soil loading in earthquake analysis: Part I–basic model and its application", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, **9**, 453–76, 1985.
37. O.C. ZIENKIEWICZ, K.H. LEUNG y M. PASTOR, "Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. Part II–non associative models for sands", *Int. J. Anal. Meth. Geomech.*, **19**, 477–98, 1985.

38. M. PASTOR y O.C. ZIENKIEWICZ, "A generalised plasticity, hierachical model for sand under monotonic and cyclic loading", en *Proc. Int. symp. on Numerical Models in Geomechanics*, (eds. G.N. Pande y W.F. Van Impe), Ghent, pp. 131–50, Jackson , England, 1986.
39. O.C. ZIENKIEWICZ, A.H.C. CHAN, M. PASTOR y T. SHIOMI, "Computational approach to soil dyamics", en *Soil Dynamics and Liquefaction*, (eds. A.S. Czamak), Developments in Geotechnical Engineering 42, Elsevier, Amsterdam, 1987.
40. O.C. ZIENKIEWICZ, M. PASTOR y A.H.C. CHAN, "Simple models for soil behaviour and applications to problems of soil liquefaction", en *Inst. Num. Meth. Eng.*, report CR/598/87, University College of Swansea, Diciembre 1987.
41. O.C. ZIENKIEWICZ, A.H.C. CHAN, M. PASTOR, D.K. PAUL y T. SHIOMI, "Static and dynamic bahaviour of soils: a rational approach to quatitative solutions: Part I–fully saturated problems", *Proc. Roy. Soc. A.*, **429**, 285–309, 1990.
42. O.C. ZIENKIEWICZ, Y.M. XIE, B.A. SCHREFLER, A. LEDESMA y N. BIĈANIĈ, "Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions: Part II–semi saturated problems", *Proc. Roy. Soc. A.*, **429**, 311–21, 1990.
43. B.R. SIMON, J.S-S. WU, M.W. CARLTON, L.E. KAZARIAN, E.P. FRANCE, J.H. EVANS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Poroelastic dynamic structural models of rhesus spinal motion segments", *Spine*, **10**(6), 494–507, 1985.
44. B.R. SIMON, J.S-S. WU y O.C. ZIENKIEWICZ, "Higher order, mixed and Hermitean finite element procedures for dynamic analysis of saturated porous media", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, **10**, 483–99, 1986.
45. R.L. LEWIS y B.A. SCHREFLER, *The Finite Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*, Wiley, Chichester, 1987.
46. X.K. LI, O.C. ZIENKIEWICZ y Y.M. XIE, "A numerical model for immiscible two-phase fluid flow in porous medium and its time domain solution ", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **30**, 1195–212, 1990.
47. O.C. ZIENKIEWICZ y A.H.C. CHAN, "Coupled problems and their numerical solution", en *Advances in Computational Non Linear Mechanics*, (ed. I.S. Doltsinis), cap. 3, pp. 109–76, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
48. T. BELYTCHKO y R. MULLEN, "Stability of explicit-implicit time integration", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **12**, 1575–1586, 1978.
49. T.J.R. HUGHES y W.K. LIU, "Implicit-explicit finite elements in transient analysis", *J. Appl. Mech.*, pt. I, **45**, 371–4, pt. II, **45**, 375–8, 1978.

50. C.A. FELIPPA y K.C. PARK, "Staggered transient analysis procedures for coupled mechanics systems; formulation", *Comp. Meth. Apl. Mech. Eng.*, **324**, 61–111, 1980.
51. K.C. PARK, "Partitioned transient analysis procedures for coupled field problems: stability analysis", *J. Appl. Mech.*, **47**, 370–6, 1980.
52. K.D. PARK y C.A. FELIPPA, "Partitioned transient analysis procedures for coupled field problems: accuracy analysis", *J. Appl. Mech.*, **47**, 919–26, 1980.
53. O.C. ZIENKIEWICZ, E. HINTON, K.H. LEUNG y R.L. TAYLOR, "Staggered, time marching schemes in dynamic soil analysis and selective explicit extrapolations algorithms", en *Proc. Conf. on Innovative Numerical Analysis for the Engineering Sciences*, (eds. R. Shaw *et al.*), University of Virginia Press, 1980.
54. D.M. TRUJILLO, "An unconditionally stable explicit scheme of structural dynamics", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 1579–92, 1977.
55. A.R. MITCHELL, *Computational Methods in Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1969.
56. L.J. HAYES, "Implementation of finite element alternating-direction methods on non-rectangular regions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **16**, 35–49, 1980.
57. A.W. CRAIG y O.C. ZIENKIEWICZ, "A multigrid algorithm using a hierarchical finite element basis", en *Multigrid Methods in Integral and Differential Equations*, (eds. D.J. Pedolon y H. Holstein), pp. 310–12, Clarendon Press, Oxford, 1985.
58. I. BABUSKA, A.W. CRAIG, J. MANDEL y J. PITKÄRANTA, "Efficient preconditioning for the *p*-inversion finite element method in two dimensions", a ser publicado en *SIAM J. Num. Anal.*
59. K.C. PARK, "Stabilization of partitioned solution procedures for pore fluid-soil interaction analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **19**, 1669–73, 1983.
60. O.C. ZIENKIEWICZ, D.K. PAUL y A.H.C. CHAN, "Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **26**, 1039–55, 1988.

Capítulo 12

PROBLEMAS DE CONVECCIÓN DOMINANTE

12.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos las soluciones estacionaria y transitoria de ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q} = 0 \qquad (12.1)$$

donde, en general, $\mathbf{U}$ es el vector de variables básicas dependientes, el vector $\mathbf{Q}$ es un término de fuente y las matrices de flujo $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son tales que

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) \qquad (12.2a)$$

y, en general

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}\right) \qquad (12.2b)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(x_i, \mathbf{U})$$

En lo anterior, x_i e i indican las coordenadas cartesianas y cantidades asociadas con ellas (ver Capítulo 6 del Volumen 1 para más detalles).

Las Ecs. (12.1) y (12.2) son *ecuaciones de conservación* y surgen del equilibrio de la cantidad $\mathbf{U}$, cuyos flujos $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ entran en un volumen de control. Estas ecuaciones son típicas de mecánica de fluidos y constituyen la base de los Capítulos 13 al 15 que tratan de aplicaciones específicas. Como dichas ecuaciones pueden también surgir en otros problemas de la física, este capítulo se dedica a la discusión general de su solución aproximada.

La forma más simple de las Ecs. (12.1) y (12.2) es aquélla en la cual $\mathbf{U}$ es un escalar y los flujos son funciones lineales. Si

$$\mathbf{U} = U \qquad \mathbf{Q} = Q$$
$$\mathbf{F}_i = F_i = A_i U \qquad \mathbf{G}_i = -k\frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (12.3)$$

tenemos ahora en coordenadas cartesianas una ecuación escalar de la forma

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(A_iU)}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)+Q$$
$$\equiv\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(A_xU)}{\partial x}+\frac{\partial(A_yU)}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial U}{\partial y}\right)+Q=0 \tag{12.4}$$

que nos servirá como modelo básico para la mayor parte del presente capítulo.

La ecuación anterior puede también escribirse como

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A_x\frac{\partial U}{\partial x}+A_y\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial U}{\partial y}\right)+Q=0 \tag{12.5}$$

si A_x y A_y son tales que

$$\nabla^T\left\{\begin{matrix}A_x\\A_y\end{matrix}\right\}\equiv 0$$

que es más restrictiva, pero que generalmente se asocia con el transporte de la cantidad U por convección en un campo de velocidades con componentes A_x y A_y en dos dimensiones (aunque naturalmente las ecuaciones son similares para problemas en una o tres dimensiones).

Hemos encontrado esta ecuación en el Volumen 1 [Ec. (9.11), Sección 9.1], en relación con el transporte de calor y ciertamente la ecuación general (12.1) puede denominarse *ecuación de transporte*, siendo **F** y **G** las cantidades *convectivas* y *difusivas*, respectivamente. Dicha ecuación es aplicable a problemas de muy diverso tipo tales como el transporte de polución, etc.

Aproximando la variable **U** en la forma usual

$$\mathbf{U}\approx\hat{\mathbf{U}}=\mathbf{N}\bar{\mathbf{U}}=\sum\mathbf{N}_k\bar{\mathbf{U}}_k \tag{12.6}$$

se puede presentar el problema siguiendo el proceso de semidiscretización típico (residuos ponderados) como

$$\mathbf{M}\dot{\bar{\mathbf{U}}}+\mathbf{H}\bar{\mathbf{U}}+\mathbf{f}=0 \tag{12.7}$$

pero ahora incluso con ponderación estándar de Galerkin (Bubnov) la matriz **H** no será simétrica. Sin embargo, éste es un problema computacional relativamente menor comparado con las inexactitudes e inestabilidades en la solución que se obtienen utilizando de forma arbitraria esta función de ponderación.

En este capítulo se discutirá la forma en que pueden superarse estas dificultades y la correspondiente mejora en la aproximación.

En general abordaremos el problema de resolver la Ec. (12.4), es decir, la forma escalar, y para simplificar más el tema empezaremos generalmente con la ecuación idealizada unidimensional

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}-k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+Q=0 \tag{12.8}$$

que se reduce en régimen estacionario a la ecuación diferencial ordinaria

$$A\frac{dU}{dx}-k\frac{d^2U}{dx^2}+Q=0 \tag{12.9}$$

en la que supondremos que A, k y Q son constantes. La simple forma anterior bastará para evidenciar los conceptos básicos y será más tarde extendida a problemas multidimensionales, todavía considerando U como una variable escalar.

Ciertamente la metodología para tratar las derivadas primeras espaciales que aparecen en las ecuaciones diferenciales de un problema, que como se mostró en el Capítulo 8 del Volumen 1 conduce a situaciones no autoadjuntas, abre el camino para tratar muchos nuevos problemas de la física.

El presente capítulo se dividirá en dos partes. La Parte I trata las *situaciones estacionarias* comenzando por la Ec. (12.9), y la Parte II con las *soluciones transitorias* comenzando por la Ec. (12.8). Aunque principalmente estudiaremos con detalle el problema escalar, la discusión de los procedimientos adoptados puede indicar la selección de los métodos óptimos que tendrán mayor aplicabilidad en la solución del caso general de la Ec. (12.1). Ciertamente discutiremos la forma completa de esta ecuación al introducir ciertos procedimientos de solución, de manera que dispongamos de la base para abordar todos los problemas de los Capítulos 13 al 15.

PARTE I : RÉGIMEN ESTACIONARIO

12.2 Problema estacionario en una dimension –preliminares y métodos de Petrov-Galerkin–

Consideraremos la discretización de la Ec. (12.9) con

$$U\approx\sum N_ia_i=\mathbf{Na} \tag{12.10}$$

donde N_i son funciones de forma y **a** representa un conjunto de parámetros incógnita. Tomaremos aquí estos parámetros coincidentes con los valores nodales de U y escribiremos

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{U}} \qquad\qquad U = \mathbf{N}\bar{\mathbf{U}} \tag{12.11}$$

utilizando un procedimiento de ponderación general (Sección 9.2 del Capítulo 9 del Volumen 1). Esto conduce para un nodo interno típico i a la ecuación de aproximación

$$K_{ij}\bar{U}_j + f_i = 0 \tag{12.12}$$

donde

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_0^L W_i A \frac{\partial N_j}{\partial x}\,dx + \int_0^L \frac{\partial W_i}{\partial x} k \frac{\partial N_j}{\partial x}\,dx \\ f_i &= \int_0^L W_i Q\,dx \end{aligned} \tag{12.13}$$

y el dominio del problema es $0 \le x \le L$.

Para funciones de forma lineales, ponderación de Galerkin ($W_i = N_i$) y elementos iguales de tamaño h, se tiene para valores constantes de A, k y Q (Figura 12.1) una ecuación ensamblada típica como

$$(-Pe - 1)\bar{U}_{i-1} + 2\bar{U}_i + (Pe - 1)\bar{U}_{i+1} + \frac{Qh^2}{k} = 0 \tag{12.14}$$

donde

$$Pe = \frac{Ah}{2k} \tag{12.15}$$

es el *número de Peclet* de la malla.

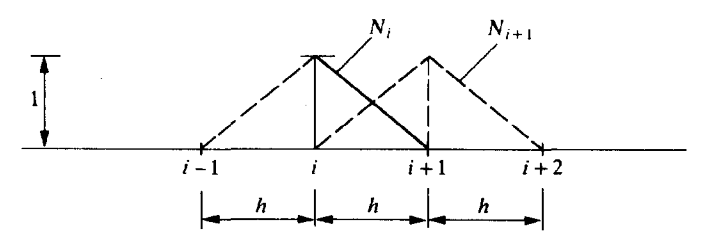


Figura 12.1 Funciones de forma para problemas unidimensionales.

Incidentalmente, la Ec. (12.14) es idéntica a la aproximación usual de diferencias finitas centrales obtenida haciendo

$$\frac{dU}{dx} \approx \frac{\bar{U}_{i+1} - \bar{U}_{i-1}}{2h} \tag{12.16a}$$

y

$$\frac{d^2U}{dx} \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} \tag{12.16b}$$

Las ecuaciones algebraicas son obviamente no simétricas y adicionalmente su precisión empeora al aumentar el valor del parámetro P_e. Ciertamente, cuando $P_e \to \infty$, es decir, cuando sólo son importantes los términos convectivos, la solución es puramente oscilatoria y no guarda relación con el problema real, como se muestra en las curvas para $\alpha = 0$ del simple ejemplo de la Figura 12.2. (en efecto, la solución para este problema sólo es posible ahora para un número impar de elementos y no para uno par).

Naturalmente lo anterior es parcialmente un problema de condiciones de contorno. Cuando se omite la difusión sólo puede imponerse una única condición de contorno, y cuando la difusión es pequeña advertimos que la condición de contorno "corriente" abajo ($U = 1$) sólo afecta a una pequeña región de una *capa límite*, como se desprende de la solución exacta[1]

$$U = \frac{1 - e^{Ax/k}}{1 - e^{AL/k}} \tag{12.17}$$

Motivados por el hecho de que la propagación de la información es en la dirección de la velocidad A, los usuarios del método de diferencias finitas fueron los primeros en mejorar la mala aproximación utilizando diferencias finitas *descentradas* para aproximar la primera derivada.[2-5] Así, en lugar de la Ec. (12.16a) y siendo A positiva la aproximación utilizada fue

$$\frac{dU}{dx} \approx \frac{\bar{U}_i - \bar{U}_{i-1}}{h} \tag{12.18}$$

cambiando la forma de diferencias finitas centrales de la aproximación de la Ec. (12.4) por

$$(-2Pe - 1)\bar{U}_{i-1} + (2 + 2Pe)\bar{U}_i - \bar{U}_{i+1} + \frac{Qh^2}{k} = 0 \tag{12.19}$$

Con esta aproximación de diferencias *corriente arriba* (también denominada aquí "contracorriente") pueden obtenerse soluciones realistas (aunque no siempre precisas) en todo el rango de números P_e del ejemplo de la Figura 12.2, como se observa en las curvas para $\alpha = 1$. Sin embargo, se obtienen ahora soluciones nodales exactas para el caso de convección pura ($P_e = \infty$), como se muestra en la Figura 12.2, de manera similar a como la forma de Galerkin en elementos finitos proporciona resultados nodales exactos para el caso de difusión pura. ¿Cómo pueden introducirse esquemas de diferencias "contracorriente" en el contexto del método de elementos finitos y generalizarlos a situaciones más complejas? Este es el problema que ahora abordaremos, y ciertamente mostraremos

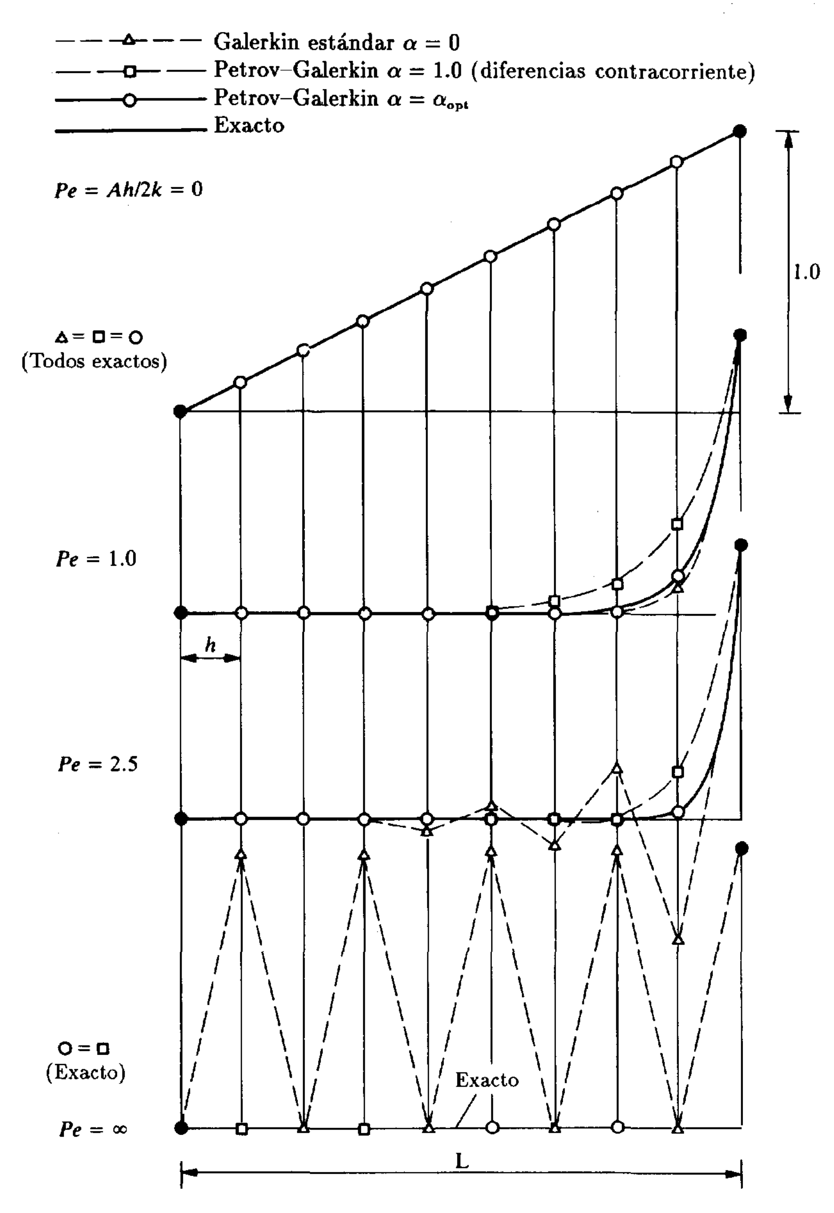


Figura 12.2 Aproximaciones a $dU/dx + kd^2U/dx^2 = 0$ para $U = 0,\ x = 0$ y $U = 1,\ x = L$ para varios números de Peclet.

que, de nuevo, como en las ecuaciones autoadjuntas, la solución de elementos finitos puede proporcionar valores nodales exactos en la aproximación unidimensional para todos los números de Peclet.

La primera posibilidad es la de utilizar un tipo de ponderación de Petrov-Galerkin en la que $W_i \neq N_i$.[6–9] En particular, para elementos con funciones de forma lineales N_i como los de la Figura 12.3, tomaremos de nuevo funciones de peso construidas de la forma

$$W_i = N_i + \alpha \tilde{W}_i \tag{12.20}$$

donde $\tilde{W}_i$ es tal que

$$\int_{\Omega_e} \tilde{W}_i dx = \pm \frac{h}{2} \tag{12.21}$$

dependiendo el signo de si A es una velocidad dirigida hacia el nodo o en dirección contraria.

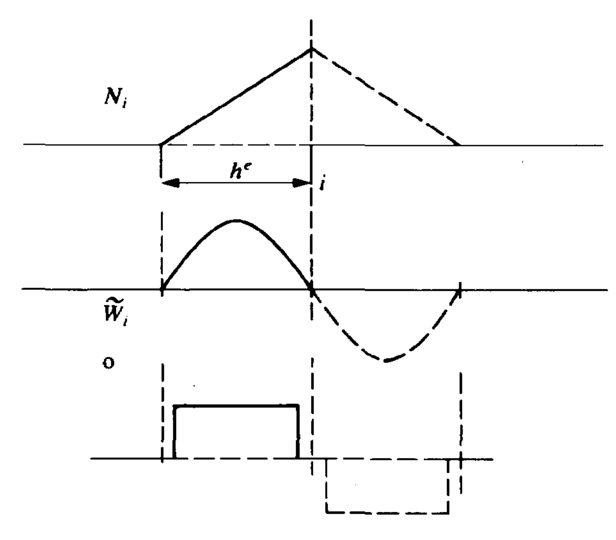


Figura 12.3 Función de peso de Petrov-Galerkin $W_i = N_i + \alpha \tilde{W}_i$. Definiciones continuas y discontinuas.

Son posibles varias formas de $\tilde{W}_i$, pero la más conveniente es la simple definición siguiente que, por supuesto, es una función discontinua (ver la aclaración al final de este apartado):

$$\alpha \tilde{W}_i = \alpha \frac{h}{2} \frac{dN_i}{dx} \text{ (signo de } A) \tag{12.22}$$

Con las funciones de peso anteriores la aproximación equivalente a la de la Ec. (12.14) es

$$[-Pe(\alpha+1)-1]\bar{U}_{i-1}+[2+2\alpha(Pe)]\bar{U}_i$$
$$+[-P_e(\alpha-1)-1]\bar{U}_{i+1}+\frac{Qh^2}{k}=0 \qquad (12.23)$$

Inmediatamente observamos que con $\alpha = 0$ se recupera la aproximación de Galerkin [Ec. (12.14)] y con $\alpha = 1$ se tiene la ecuación discreta de diferencias corriente arriba completa (12.19), cada una dando valores nodales exactos para los casos puramente difusivo o puramente convectivo.

Si se escoge ahora el valor de α como

$$|\alpha| = \alpha_{opt} = \coth|Pe| - \frac{1}{|Pe|} \qquad (12.24)$$

se obtienen valores nodales exactos *para todos los valores* de P_e. En la referencia 7 se encuentra la demostración de ello para este caso unidimensional, demostrándose también que si

$$|\alpha| > \alpha_{crit} = 1 - \frac{1}{|Pe|} \qquad (12.25)$$

nunca se obtendrán soluciones oscilatorias. Los resultados de la Figura 12.3 muestran ciertamente que con $\alpha = 0$, es decir, el método de Galerkin, se obtendrán oscilaciones cuando

$$Pe > 1 \qquad (12.26)$$

La Figura 12.4 muestra la variación de α_{opt} y α_{crit} con P_e.

Aunque la búsqueda del parámetro "contracorriente" óptimo se ha limitado al caso de coeficientes constantes y elementos de igual tamaño, se obtienen también valores nodalmente exactos si se escoge $\alpha = \alpha_{opt}$ individualmente para cada elemento. En la Figura 12.5[10] se muestran algunas soluciones típicas para un término de fuente variable $Q = Q(x)$, coeficientes de convección $A = A(x)$ y varios tamaños de elemento. Cada una de ellas se compara con una solución estándar de Galerkin, mostrándose que se mejora la aproximación incluso cuando el procedimiento no conduce a oscilaciones. Naturalmente, en estos ejemplos debe aplicarse la ponderación de Petrov-Galerkin a todos los términos de la ecuación. Cuando no se hace esto (como en la ponderación corriente arriba de diferencias finitas) se obtienen resultados completamente erróneos, como se muestra en el ejemplo de la Figura 12.6 que fue utilizado en la referencia 11 para desacreditar los métodos contracorriente. El efecto de α en el término de fuente no es aparente en la Ec. 12.23, donde Q es constante en todo el dominio, pero su influencia es muy importante cuando $Q = Q(x)$.

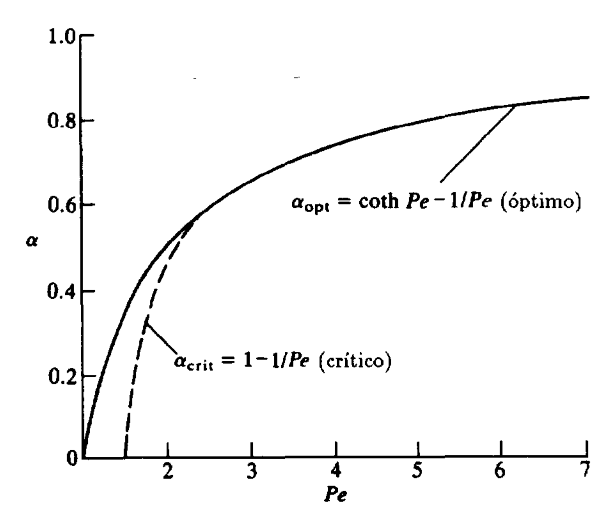


Figura 12.4 Valores crítico (estable) y óptimo del parámetro "contracorriente" α para diferentes valores de $Pe = Ah/2k$.

Requisitos de continuidad para las soluciones de peso. La función de peso W_i (o $\tilde{W}_i$) introducida en la Figura 12.3 puede naturalmente ser discontinua por lo que respecta a las contribuciones en los términos convectivos [ver Ec. (12.13)], es decir

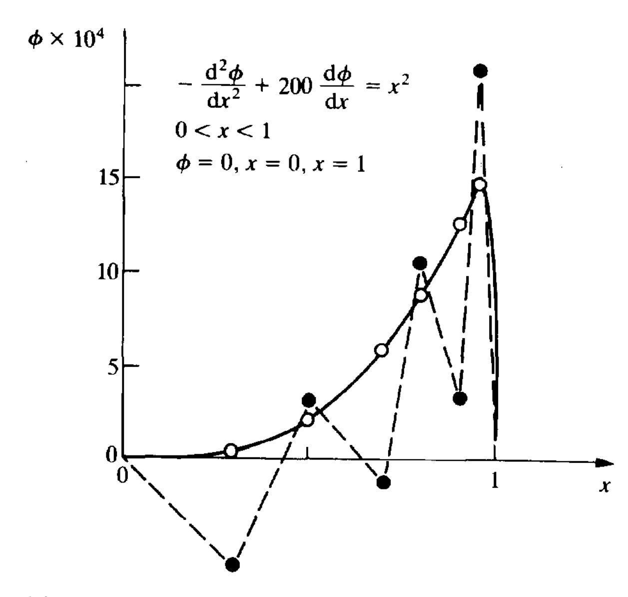
$$\int_0^L W_i \frac{\partial F}{\partial x}\, dx \qquad \text{o} \qquad \int_0^L W_i A \frac{\partial N_i}{\partial x}\, dx$$

Claramente no surgen dificultades en el cálculo de dichas integrales en la discontinuidad. Sin embargo, al evaluar el término difusivo se utiliza la integración por partes y se calculan dichos términos como

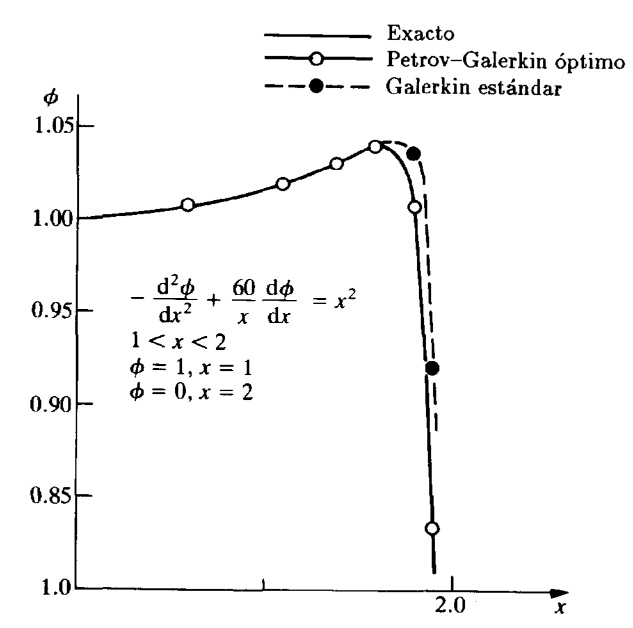
$$\int \frac{\partial W_i}{\partial x} k \frac{\partial N_j}{\partial x}\, dx$$

en lugar de la forma

$$\int W_i \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial N_j}{\partial x}\right) dx$$



(*a*) Ecuación del término de fuente con un coeficiente constante



(*b*) Ecuación del término de fuente variable con un coeficiente variable

Figura 12.5 Aplicación de la aproximación estándar de Galerkin y de Petrov-Galerkin (óptima).

Aquí aparecerá un infinito local al utilizar funciones W_i discontinuas. Para evitar esta dificultad consideramos que la discontinuidad de la parte $\tilde{W}_i$ de la función de peso ocurre *dentro* del elemento[1] y no en los nodos, tal como se muestra en la Figura 12.3. Ahora puede utilizarse integración directa, lo que conduce a contribuciones nulas del término difusivo, como ciertamente ocurre al escoger funciones de continuidad C_0 para $\tilde{W}$, muy utilizadas en diversos trabajos previos.

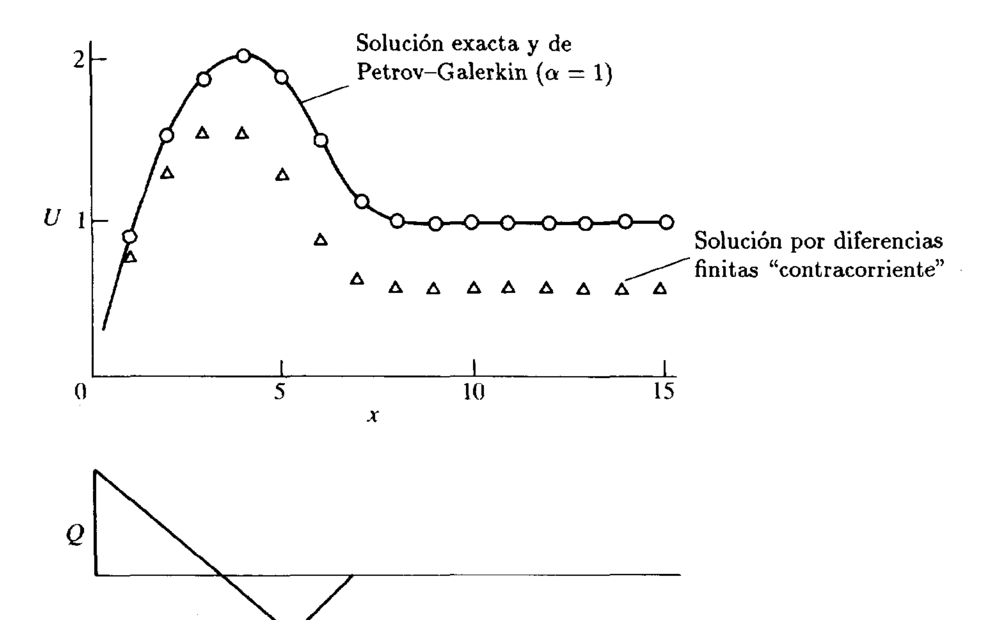


Figura 12.6 Un problema de convección unidimensional con un término de fuente variable Q. El procedimiento de Petrov-Galerkin conduce a la solución exacta, pero la ponderación contracorriente en diferencias finitas tiene un error importante.

12.3 El problema estacionario en una dimensión –difusión equilibradora–

La comparación de las ecuaciones nodales (12.14) y (12.23) obtenidas para una malla uniforme y para un valor de Q constante muestra que el efecto de la ponderación de Petrov-Galerkin es equivalente a utilizar el proceso de Galerkin estándar con la adición de una difusión

$$k_b = \frac{1}{2}\alpha A h \qquad (12.27)$$

a la ecuación diferencial original (12.9).

El lector puede verificar fácilmente que sustituyendo esta expresión en la ecuación original, es decir, escribiendo ahora en lugar de la Ec. (12.9),

$$A\frac{dU}{dx} - (k + k_b)\frac{d^2U}{dx^2} + Q = 0 \tag{12.28}$$

se obtiene una expresión idéntica a la (12.23) siempre que Q sea constante y se utilice un procedimiento estándar de Galerkin.

Dicha *difusión equilibradora* es más fácil de implementar que la ponderación de Petrov-Galerkin, particularmente en dos o tres dimensiones, y contribuye a dar una interpretación física a los métodos de Petrov-Galerkin. Sin embargo, no proporciona la modificación de los términos de fuentes requerida y, por tanto, en el ejemplo de la Figura 12.6 conducirá a resultados erróneos idénticos a los que se obtienen con la aproximación de diferencias finitas.

El concepto de *difusión artificial* introducido frecuentemente en los modelos de diferencias finitas tiene naturalmente los mismos inconvenientes y, además, adicionalmente no puede justificarse de forma lógica.

Es interesante observar que al aplicar una aproximación de diferencias finitas centrales a las ecuaciones originales (o al utilizar el proceso de Galerkin estándar) se obtienen resultados erróneos debido a la introducción de una *difusión negativa* en las ecuaciones; esta difusión "negativa" se contrarresta por la difusión equilibradora mencionada.

12.4 El problema estacionario en una dimensión –un principio variacional–

La Ec. (12.9) considerada aquí no es autoadjunta y por consiguiente no puede derivarse de ningún principio variacional. Sin embargo, Guymon *et al.*[12] demostraron que es sencillo obtener un principio variacional (o asegurar que es autoadjunta, lo que es equivalente) si se premultiplica el operador por una función adecuada p. Así la forma débil de la Ec. (12.9) puede escribirse como

$$\int_0^L Wp\left[A\frac{dU}{dx} - \frac{d}{dx}\left(k\frac{dU}{dx}\right) + Q\right]\, dx = 0 \tag{12.29}$$

donde $p = p(x)$ es una función incógnita. Esto conduce, tras integrar por partes, a

$$\int_0^L \left[W\frac{dU}{dx}\left(pA + k\frac{dp}{dx}\right) + \frac{dW}{dx}(kp)\frac{dU}{dx} + WpQ\right]\, dx + \left|Wpk\frac{dU}{dx}\right|_0^L = 0 \tag{12.30}$$

Inmediatamente vemos que el operador puede hacerse autoadjunto y alcanzarse una aproximación simétrica si se hace cero el primer término entre corchetes (ver también el Capítulo 9 del Volumen 1, Sección 9.11.2, para esta demostración). Esto requiere que la función p sea tal que

$$pA + k\frac{dp}{dx} = 0 \tag{12.31a}$$

o que

$$p = \text{constante} \times e^{-Ax/k} = \text{constante} \times e^{-2(Pe)x/h} \tag{12.31b}$$

Para dicha forma, que corresponde a la existencia de un principio variacional, la mejor aproximación es la del método de Galerkin con

$$W = N_i \qquad\qquad U = \sum N_j U_j \tag{12.32}$$

Ciertamente, como se muestra en el Volumen 1, dicha formulación proporciona, en una dimensión, resultados exactos en los nodos (ver Apéndice 7 del Volumen 1) y, por tanto, es equivalente a la obtenida antes mediante la ponderación de Petrov-Galerkin. Sustituyendo la aproximación de la Ec. (12.32) en la Ec. (12.30), y utilizando las Ecs. (12.31) que definen p tomando el origen en $x = x_i$, tenemos para la ecuación i-ésima de la malla uniforme

$$\int_{-h}^h \left[\frac{dN_i}{dx}(ke^{-2(Pe)x/h})\frac{dN_j}{dx}\bar{U}_j + N_i e^{-2(Pe)x/h}Q\right]\, dx = 0 \tag{12.33}$$

con $j = i-1,\ i,\ i+1$. Esto conduce, después de algunas operaciones, a una típica ecuación nodal como

$$(1 - e^{-2(Pe)})\bar{U}_{i+1} + (e^{-2(Pe)} - e^{-2(Pe)})\bar{U}_i - (1 - e^{-2(Pe)})\bar{U}_{i+1}$$
$$-\frac{Qh^2}{2(Pe)k}(e^{Pe} - e^{-Pe})^2 = 0 \tag{12.34}$$

que puede demostrarse es idéntica a la expresión (12.23) en la que se ha insertado el valor $\alpha = \alpha_{opt}$ de la Ec. (12.24).

Tenemos aquí una prueba algo más convincente de la optimación del procedimiento de ponderación de Petrov-Galerkin propuesto.[13–14] Sin embargo, existen serios inconvenientes. La evaluación numérica de las integrales es difícil y el sistema de ecuaciones, aunque de forma simétrica, no está bien condicionado si se toma p como una función continua de x en todo el dominio. El segundo punto se resuelve fácilmente tomando p

de forma discontinua, por ejemplo, tomando el origen de x en el punto i para todos los *ensamblajes*, como hicimos al obtener la Ec. (12.34). Esto es permisible por los razonamientos dados en la Sección 12.2, página 497, y es equivalente a escalar fila a fila el sistema completo de ecuaciones.[13] Ahora naturalmente dicho sistema pierde la simetría.

Las dificultades de integración numérica desaparecen, ciertamente, si se utilizan las simples funciones de ponderación previamente obtenidas. Sin embargo, la demostración de la equivalencia es importante ya que aparece el problema de determinar la ponderación óptima.

Una alternativa interesante al uso de funciones exponenciales locales ha sido propuesta recientemente por Idelsohn.[15] En este trabajo advertimos que la ponderación de Galerkin de la forma dada por la Ec. (12.29) es autoadjunta en el sentido *discreto*, para cualquier función $\hat{p}$ definida localmente que dé [ver Ec. (12.30)]

$$\int_{-h}^{h} N_i \frac{dU}{dx} \left(A\hat{p} + k\frac{d\hat{p}}{dx} \right) dx = 0$$

para el ensamblaje de elementos.

Si se supone que dU/dx tiene localmente un valor constante (medio) podemos requerir simplemente que

$$\int_{-h}^{h} N_i \left(A\hat{p} + k\frac{d\hat{p}}{dx} \right) dx = 0$$

donde $\hat{p}$ es cualquier función continua en el *dominio de ensamblaje*. Por ejemplo, si tomamos una distribución lineal como se muestra en la Figura 12.7

$$\hat{p} = 1 + \gamma\frac{x}{h}$$

se deduce inmediatamente que

$$\gamma = -\frac{Ah}{k}$$

satisface el requisito anterior, pero, desde luego, la definición de $\hat{p}$ no es única. Puede utilizarse casi cualquier función de un solo parámetro para satisfacer las ecuaciones anteriores.

Más aún, los resultados de esta aproximación son desalentadores. Si

$$\frac{Ah}{k} \equiv 2Pe > 1$$

la función $\hat{p}$ se hace negativa sobre parte del dominio y se pierde la definición positiva. Sampaio[16] sugiere un procedimiento alternativo en el que introduce funciones de peso constantes por intervalos para aproximar $\hat{p}$ de manera que

$$\int_{-h}^{h} N_i(p - \hat{p})dx = \int_{-h}^{h} N_i(e^{-2(Pe)x/h} - \hat{p})dx = 0$$

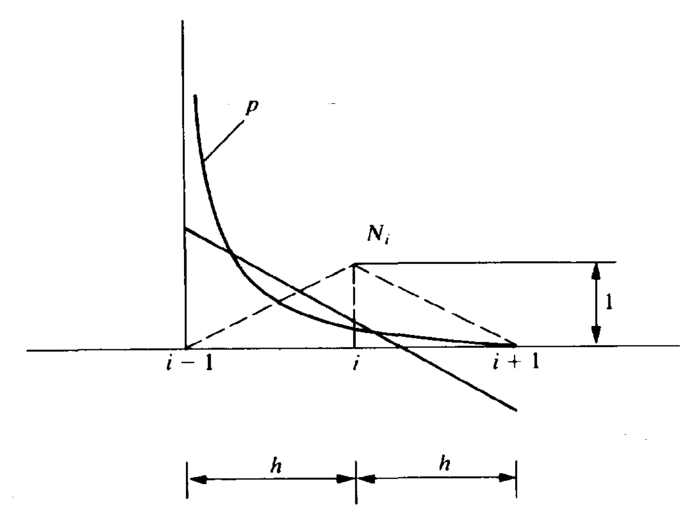


Figura 12.7 Una aproximación local lineal para modificar la función p en la forma $\hat{p} = 1 + \gamma x/h$.

Esto conduce, como se muestra en la Figura 12.8, a

$$\hat{p} = 1 \pm \alpha$$

donde α se determina por la expresión (12.24).

No es sorprendente que esta aproximación conduzca en el caso sencillo exactamente a la expresión óptima. Sin embargo, la utilización de funciones sencillas es ventajosa si los tamaños de los elementos no son idénticos, y éste es un procedimiento fácilmente extendible a dos o tres dimensiones.

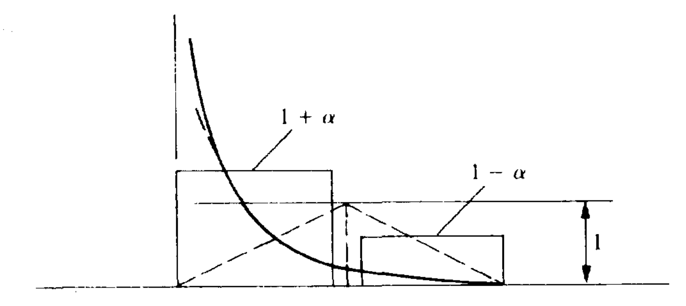


Figura 12.8 Aproximación local constante por intervalos de la función modificada.

12.5 Aproximación de mínimos cuadrados de Galerkin

En los apartados precedentes hemos mostrado que diversos procedimientos aparentemente diferentes conducen a aproximaciones idénticas (o casi idénticas). Presentamos aquí un nuevo procedimiento que puede interpretarse como una combinación de las aproximaciones estándar de Galerkin y de mínimos cuadrados y que de nuevo conduce a resultados similares. El método se basa en combinar la aproximación de Galerkin estándar con otra de mínimos cuadrados.[17,18]

Si la Ec. (12.9) se reescribe como

$$LU + Q = 0 \qquad U \approx \hat{U} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{U}} \tag{12.35a}$$

con

$$L = A\frac{d}{dx} - k\frac{d^2}{dx^2} \tag{12.35b}$$

la aproximación estándar de Galerkin da para la ecuación k-ésima

$$\int_0^L N_k L(\mathbf{N})\bar{\mathbf{U}}dx + \int_0^L N_k Q dx = 0 \tag{12.36}$$

en la que se omiten las condiciones de contorno por claridad.

Similarmente, una minimización del residuo por mínimos cuadrados (ver Capítulo 9 del Volumen 1, Sección 9.14.2) resulta en

$$R = L\hat{U} + Q$$

y

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\bar{U}_k}\int_0^L R^2 dx = \int_0^L \frac{d(L\hat{U})}{d\bar{U}_i}(L\hat{U} + Q)\,dx = 0 \tag{12.37}$$

o

$$\int_0^L \left(A\frac{dN_k}{dx} - k\frac{d^2}{dx^2}N_k\right)(L\hat{U} + Q)\,dx = 0 \tag{12.38}$$

Escribiendo la aproximación final como una combinación lineal de las Ecs. (12.36) y (12.38) se tiene

$$\int_0^L \left(N_k + \lambda A\frac{dN_k}{dx} - \lambda k\frac{d^2}{dx^2}N_k\right)(L\hat{U} + Q)dx = 0 \tag{12.39}$$

Esto es, por supuesto, una aproximación de Petrov-Galerkin con un parámetro indeterminado λ. Si se omite el término de segundo orden (como podría hacerse escogiendo funciones N_k lineales) y si además tomamos

$$\lambda = \frac{|\alpha|h}{2|A|} \tag{12.40}$$

la aproximación es idéntica a la del método de Petrov-Galerkin con los pesos dados por las Ecs. (12.20) y (12.22).

De nuevo vemos que una forma de Petrov-Galerkin escrita como

$$\int_0^L \left(N_i + \frac{|\alpha|}{2}\frac{Ah}{|A|}\frac{dN_k}{dx}\right)\left(A\frac{d\hat{U}}{dx} - k\frac{d^2\hat{U}}{dx^2} + Q\right)dx = 0 \tag{12.41}$$

es un resultado al que se llega por diversos procedimientos, aunque únicamente la forma variacional de la Sección 12.4 determina explícitamente el valor de α que debería utilizarse de forma óptima. En todos los otros procedimientos este valor se determina por un análisis *a posteriori*.

12.6 Aproximaciones de mayor orden

La obtención de procedimientos precisos de Petrov-Galerkin para la ecuación de convección-difusión es naturalmente posible para cualquier orden de los desarrollos de elementos finitos. En la referencia 9, Heinrich y Zienkiewicz muestran como el procedimiento de estudiar las soluciones exactas discretas puede conducir a parámetros contracorriente óptimos para funciones de forma cuadrática. Sin embargo, aquí el procedimiento más sencillo involucra las técnicas de la Sección 12.4, que naturalmente están disponibles para cualquier desarrollo de elementos finitos y que como se ha mostrado antes, siempre conducen a una aproximación óptima.

Se recomienda al lector que repita el ejemplo que se discute en esta sección y, mediante la extensión de la Ec. (12.33), que obtenga una ecuación que relacione los dos elementos cuadráticos de la Figura 12.9.

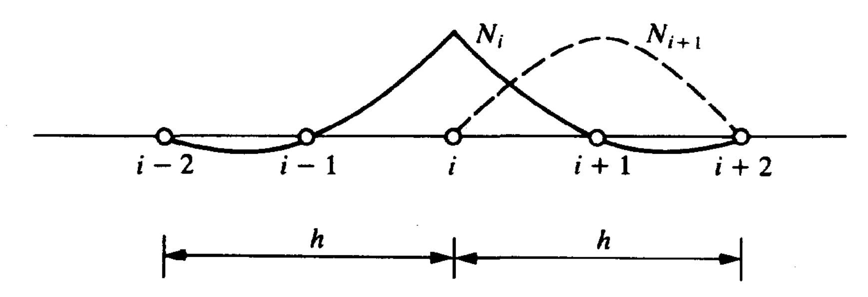


Figura 12.9 Ensamblaje de elementos cuadráticos unidimensionales.

Para la utilización práctica de dichos elementos es posible ampliar la ponderación de Petrov-Galerkin del tipo dado en las Ecs. (12.20) a (12.22) utilizando ahora

$$\alpha_{opt} = \coth Pe - \frac{1}{Pe}$$

y

$$\alpha \tilde{W}_i = \alpha \frac{h}{4}\frac{dN_i}{dx} \qquad \text{(signo de A)} \tag{12.42}$$

Este procedimiento, aunque no tan exacto como el utilizado para elementos lineales, es muy efectivo y ha sido utilizado con éxito para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes.[19]

12.7 Ampliación a dos (o tres) dimensiones

12.7.1 *Consideraciones generales.* Es claro que la aplicación de la discretización estándar de Galerkin a la ecuación escalar estacionaria de convección-difusión en varias dimensiones del espacio, es similar al problema discutido previamente en una dimensión y conducirá de nuevo a soluciones poco satisfactorias con altas oscilaciones para números locales de Peclet mayores que la unidad.

La ecuación considerada ahora es la versión estacionaria de la Ec. (12.5), es decir

$$A_x\frac{\partial U}{\partial x} + A_y\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial U}{\partial y}\right) + Q = 0 \tag{12.43}$$

en dos dimensiones (con la adición de los términos apropiados con derivadas con respecto a z para el caso tridimensional).

Obviamente, el problema es ahora de mayor interés práctico que el caso unidimensional discutido hasta este momento, y la obtención de una solución satisfactoria es muy importante. De nuevo todos los procedimientos que se han discutido hasta ahora son aplicables.

12.7.2 *Ponderación de Petrov-Galerkin sobre líneas de corriente.* El procedimiento más obvio es utilizar de nuevo algún tipo de método de Petrov-Galerkin similar al introducido en la Sección 12.2 y las Ecs. (12.20) a (12.24), buscando la optimación de α de forma heurística. Se advierte inmediatamente que el parámetro de Peclet

$$\mathbf{Pe} = \frac{\mathbf{A}h}{2k} \qquad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix} \tag{12.44}$$

es ahora una cantidad "vectorial" y, por tanto, la ponderación corriente arriba necesita ser "direccional".

El primer intento razonablemente satisfactorio para hacer esto consistió en determinar la formulación de Petrov-Galerkin óptima utilizando funciones $\alpha\tilde{W}$ basadas en componentes de $\mathbf{A}$ asociadas a los *lados de los elementos* y obteniendo las funciones de peso finales mediante un procedimiento de mezcla.[8,9]

Pronto se descubrió un método mejor una vez que se estableció la analogía entre la difusión equilibradora y el procedimiento contracorriente, como se ha mostrado en el Sección 12.3. En dos (o tres) dimensiones la convección sólo es activa en la dirección de la velocidad resultante del elemento $\mathbf{A}$, y por tanto la ***difusión equilibradora***, o correctora, introducida por la técnica contracorriente debería ser anisótropa, con un coeficiente distinto de cero solamente en la dirección de la velocidad resultante. Esta innovación introducida simultáneamente por Hughes y Brooks[20] y Kelly *et al.*[10] puede efectuarse fácilmente tomando las funciones de peso individuales como

$$\begin{aligned} W_k &= N_k + \alpha\tilde{W}_k = N_k + \frac{\alpha h}{2}\frac{A_x\,(\partial N_k/\partial x) + A_y\,(\partial N_k/\partial y)}{|\mathbf{A}|} \\ &\equiv N_k + \frac{\alpha h}{2}\frac{A_i}{|\mathbf{A}|}\frac{\partial N_k}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{12.45}$$

donde α se determina para cada elemento por la expresión (12.21) antes encontrada, escrita ahora como

$$\alpha = \alpha_{opt} = \coth Pe - \frac{1}{Pe} \tag{12.46}$$

con

$$Pe = \frac{|\mathbf{A}|h}{2k} \tag{12.47a}$$

y

$$|\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2)^{1/2} \tag{12.47b}$$

Las expresiones anteriores presuponen que las componentes de la velocidad A_x y A_y en un elemento particular son básicamente constantes y que el tamaño del elemento h puede definirse razonablemente.

La Figura 12.10 muestra un ensamblaje de triángulos lineales y cuadriláteros bilineales indicando para cada uno de ellos la velocidad media resultante $\mathbf{A}$. La determinación del tamaño del elemento h para uso en la expresión (12.47) es generalmente un poco arbitraria. En la Figura 12.10 se muestra dicho valor como simplemente la máxima dimensión en la dirección del vector de velocidad.

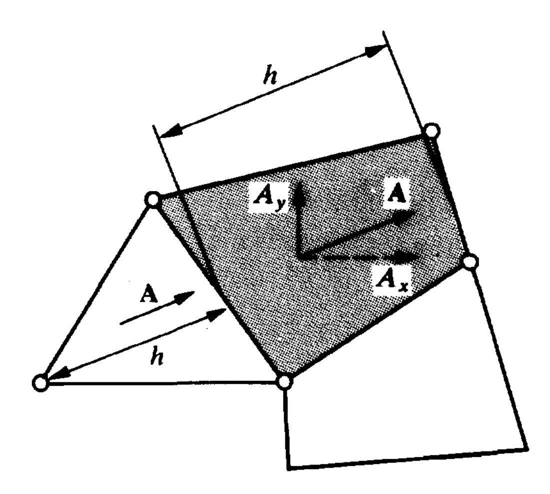


Figura 12.10 Tamaño del elemento h y direcciones de líneas de corriente en un ensamblaje bidimensional.

La forma de la Ec. (12.45) es tal que la ponderación "no estándar" $\tilde{W}$ tiene un efecto nulo en la dirección en la cual la componente de velocidad es nula. Así, la difusión equilibradora sólo se introduce en la dirección del vector de velocidad resultante (convectivo) **A**. Esto puede comprobarse si se escribe la Ec. (12.43) en notación tensorial como

$$A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) + Q = 0 \tag{12.48a}$$

En la forma discretizada, el término de "difusión equilibradora" [obtenido de la ponderación del primer término de la ecuación anterior utilizando W de la Ec. (12.45)] se hace

$$\int_\Omega \frac{\partial N}{\partial x_i} \tilde{k}_{ij} \frac{\partial N}{\partial x_j} d\Omega \tag{12.48b}$$

con

$$\tilde{k}_{ij} = \frac{\alpha A_i A_j}{|\mathbf{A}|} \tag{12.48c}$$

Esto indica una difusión altamente anisotrópica con coeficientes nulos normales a las direcciones del vector de velocidad convectiva. Este proceso se denomina, por tanto, difusión equilibradora a lo largo de las *líneas de corriente*,[12,20,21] o método de Petrov-Galerkin sobre las líneas de corriente.

La validez matemática de los procedimientos que se presentan en esta sección ha sido establecida por Johnson *et al.*[22] para $\alpha = 1$, quienes mejoran la convergencia sobre el proceso estándar de Galerkin.

Sin embargo, la demostración no incluye la selección óptima de los valores de α, como se muestra en la Ec. (12.46).

La Figura 12.11 muestra una solución típica de la Ec. (12.43), indicando la pequeña cantidad de "difusión transversal", es decir, permitiendo la propagación de las discontinuidades en la dirección del flujo sin una dispersión sustancial.[23]

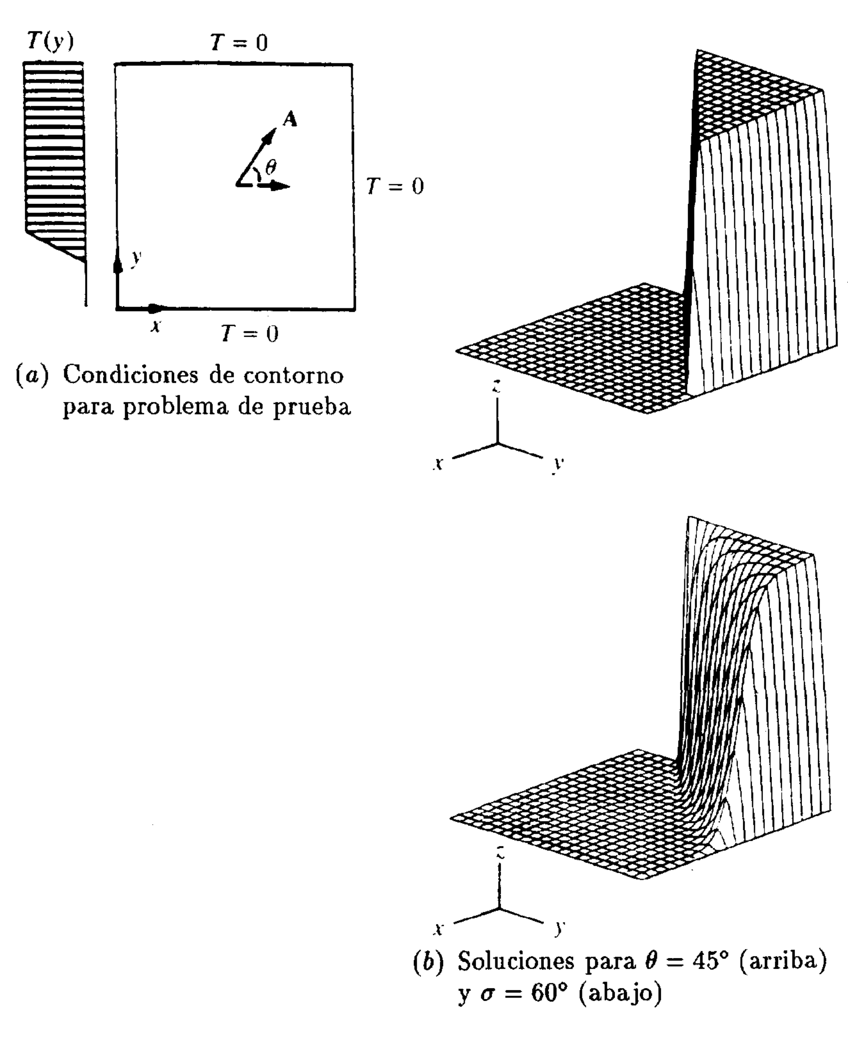


Figura 12.11 Procedimientos sobre las "líneas de corriente" en un problema bidimensional de convección pura. Elementos bilineales.[23]

Se puede obtener una "optimación" más convincente aplicando la

función exponencial modificada de manera que el problema se haga autoadjunto. Esto naturalmente sigue las pautas explicadas en la Sección 12.4 y es fácil de llevar a cabo si las velocidades son constantes en todo el dominio. Si las velocidades varían de elemento a elemento, de nuevo pueden utilizarse las funciones exponenciales

$$p = e^{-Ax'/k} \tag{12.49}$$

con x' orientado en la dirección de la velocidad en cada elemento. Este procedimiento parece que fue implementado por primera vez por Sampaio[23] pero hay que tener en cuenta de nuevo los problemas relacionados con el origen de coordenadas, etc. Sin embargo, los resultados son esencialmente similares a los obtenidos mediante técnicas de Petrov-Galerkin.

Es interesante observar que el procedimiento intuitivo para generar funciones de ponderación de Petrov-Galerkin a lo largo de las "líneas de corriente" de la Ec. (12.45) puede evitarse si se amplían los procedimientos de mínimos cuadrados de Galerkin de la Sección 12.4 al caso multidimensional. La simple extensión de los razonamientos dados entre las Ecs. (12.35) a (12.41) conduce inmediatamente a la ponderación de la Ec. (12.45), como puede verificar el lector de forma sencilla.

12.8 Comentarios finales sobre el caso estacionario

En las Secciones 12.2 a 12.7 se han presentado diversos procedimientos comúnmente utilizados para tratar la ecuación de convección-difusión estacionaria con una variable escalar. Todos se reducen esencialmente a la utilización de la discretización de Petrov-Galerkin a lo largo de las líneas de corriente, aunque naturalmente la modificación de las ecuaciones básicas a una forma autoadjunta dada en la Sección 12.4 produce la "justificación completa" de la ponderación especial. Cuál de estos procedimientos es más adecuado para su utilización práctica es en gran manera un problema de gustos, ya que todos proporcionan excelentes resultados. Sin embargo, veremos en la segunda parte de este capítulo, en la que trataremos problemas transitorios, que pueden adoptarse otros métodos si se utilizan procedimientos de integración en el tiempo como una técnica iterativa para obtener la solución estacionaria. Sin embargo, la analogía entre estos procedimientos en caso de que el vector $\mathbf{U}$ tenga varias componentes no parece existir y ciertamente algunas de estas técnicas no son aplicables. Aplazaremos la consideración de estos aspectos hasta más adelante. En este contexto, es interesante considerar la ecuación original aumentada por un término de fuente proporcional a la variable U, esto es, escribiendo la ecuación unidimensional como

$$A\frac{dU}{dx} - k\frac{d^2U}{dx^2} + mU + Q = 0 \tag{12.50}$$

Las ecuaciones de este tipo se desprenden naturalmente del caso transitorio de la Ec. (12.8) si suponemos la solución descompuesta en sus componentes de Fourier, escribiendo para cada componente

$$Q = \tilde{Q}e^{i\omega t} \qquad\qquad U = \tilde{U}e^{i\omega t} \tag{12.51}$$

que tras sustituir da

$$A\frac{d\tilde{U}}{dx} - k\frac{d^2\tilde{U}}{dx^2} + i\omega\tilde{U} + \tilde{Q} = 0 \tag{12.52}$$

en la cual $\tilde{U}$ puede ser una función compleja.

De nuevo pueden utilizarse los procedimientos de Petrov-Galerkin o variacionales para las Ecs. (12.50) o (12.52). Si seguimos la línea propuesta en la Sección 12.4 se advierte que

a) la función p requerida para obtener el caso autoadjunto permanece inalterada;

y por consiguiente

b) la ponderación aplicada para alcanzar resultados óptimos (ver Sección 12.3) es de nuevo la misma –naturalmente a condición de que se aplique a todos los términos–.

Aunque el resultado anterior es alentador, ya que permite la solución en el dominio de la frecuencia para problemas transitorios, no puede "transplantarse" automáticamente a los problemas en los que se requiere integración temporal.

En este punto hay que mencionar algunas otras aclaraciones. Estas son:

1. Cuando se considera el caso de convección pura (esto es, $k = 0$) sólo hay que definir una condición de contorno –generalmente la que proporciona el valor de U en la entrada– y en dicho caso no ocurrirán las oscilaciones violentas que se observan en la Figura 12.2 utilizando los procedimientos estándar de Galerkin.
2. La no definición de la condición de contorno a la salida en el caso de que $k > 0$, lo cual es equivalente a imponer un flujo por conducción nulo en ese borde, generalmente conduce a soluciones bastante aceptables con ponderaciones de Galerkin estándar, incluso para números de Peclet razonablemente altos.

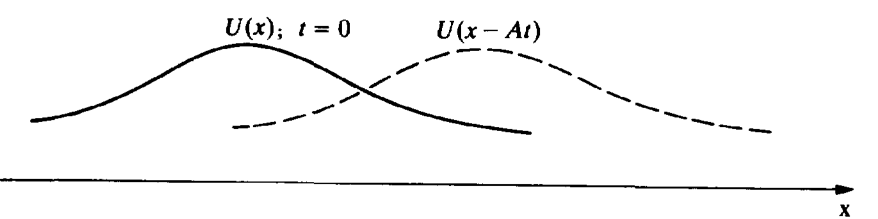


Figura 12.12 Naturaleza ondulatoria de la solución sin conducción. Velocidad constante de onda A.

PARTE II : PROBLEMAS TRANSITORIOS

12.9 Problemas transitorios –introducción–

El objetivo de esta sección es desarrollar procedimientos de aplicabilidad general para la solución mediante métodos de integración en el tiempo de la Ec. (12.1) escrita para valores escalares de U, F_i y G_i como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} + Q = 0 \tag{12.53}$$

La extensión de las técnicas propuestas al caso de funciones vectoriales se tratará en la Sección 12.13. Sin embargo, para permitir una interpretación sencilla de los diversos métodos así como de su comportamiento se considerará la ecuación escalar en una dimensión [ver Ec. (12.8)], o sea

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) + Q = 0 \tag{12.54a}$$

esto es, naturalmente, un caso particular de la Ec. (12.53), con $F = F(U)$, $A = \partial F/\partial U$ y $Q = Q(U, x)$ y por consiguiente

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x} = A\frac{\partial U}{\partial x} \tag{54b}$$

El problema así definido es no lineal a menos que A sea constante. Sin embargo, las ecuaciones no conservativas (12.54) admiten una variación espacial de A y son bastante generales.

El comportamiento esencial de las ecuaciones anteriores puede determinarse mediante un cambio de la variable independiente x a x' tal que

$$dx'_i = dx_i - A_i dt \tag{12.55}$$

Advirtiendo que para $U = U(x'_i, t)$, se tiene

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{x\ const} = \frac{\partial U}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial t} + \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{x'\ const} = -A_i\frac{\partial U}{\partial x'_i} + \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{x'\ const} \tag{12.56}$$

La ecuación unidimensional (12.54a) se transforma ahora simplemente en

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x'}\left(k\frac{\partial U}{\partial x'}\right) + Q = 0 \tag{12.57}$$

Las ecuaciones de este tipo con operadores espaciales autoadjuntos pueden discretizarse fácilmente y resolverse por los procedimientos desarrollados previamente (ver Capítulo 10).

El sistema de coordenadas de la Ec. (12.55) describe las *direcciones características* y debe advertirse la naturaleza del movimiento de las coordenadas. Un corolario adicional del cambio de coordenadas es que en caso de que no existan términos de conducción o de generación del calor, es decir, cuando $k = 0$ y $Q = 0$, se tiene simplemente

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

o

$$U(x') = U(x - At) = \text{constante} \tag{12.58}$$

a lo largo de una característica [suponiendo A constante, lo que ocurrirá si $A = A(U)$]. Esto es una ecuación típica de propagación de ondas con una velocidad A en la dirección x como se muestra en la Figura 12.12. La naturaleza ondulatoria es evidente en el problema, incluso si la conducción (difusión) no es nula, y en este caso obtendremos soluciones que muestran una onda que se amortigua con la distancia recorrida.

Los procedimientos de discretización y solución disponibles para la solución de este problema deben incluir la naturaleza característica de las ondas del problema, pero adicionalmente deberían permitir el mismo tipo de aproximación que hemos tratado en la primera parte del capítulo ya que, obviamente, el estado estacionario es un caso particular del transitorio. Ciertamente, las soluciones transitorias son frecuentemente utilizadas simplemente como un proceso iterativo para llegar a la solución estacionaria, como ilustraremos al tratar la mecánica de fluidos en los Capítulos 13 al 15. Allí, obviamente, un procedimiento de integración temporal de tipo explícito será de gran interés.

La obtención simultánea de todos los objetivos de la discretización es difícil y desgraciadamente es necesario llegar a un compromiso. En lo que sigue describiremos las principales lineas de ataque que son abordables y discutiremos sus méritos y desventajas. Éstas son:

1. *Métodos de Petrov-Galerkin* (Sección 12.10) en los que se procede a la discretización espacial de acuerdo con los métodos desarrollados en la Parte I de este capítulo, y se sigue con una aproximación en el tiempo estándar como la del Capítulo 10.
2. *Métodos de mínimos cuadrados y de Petrov-Galerkin espacio-tiempo* (Sección 12.11) en los que se intenta combinar (con limitaciones severas) los procedimientos de aproximación óptimos.
3. *Métodos basados en las líneas características* (Sección 12.12) en los que se tiene en cuenta *a priori* la naturaleza ondulatoria de las ecuaciones.
4. *Esquema de integración en el tiempo de mayor orden seguido de aproximaciones de Galerkin estándar.* Aunque dichos procedimientos no tienen en cuenta la naturaleza ondulatoria del problema se encontrará que reproducen a menudo otros métodos de una manera más simple y general (Sección 12.13). Aquí las soluciones estacionarias dependerán del tamaño del incremento de tiempo Δt utilizado que actúa como un parámetro contracorriente.

12.10 Formulación transitoria de los procedimientos variacionales y de Petrov-Galerkin

12.10.1 *Expresiones generales.* En las Secciones 12.2 y 12.4 se ha mostrado que en ausencia de derivadas temporales la aproximación obtenida mediante una utilización heurística de las funciones de ponderación *contracorriente* y la basada en el principio variacional obtenido premultiplicando la Ec. (12.3) por una función exponencial, conducían a idénticos resultados. Es lógico, por consiguiente, considerar primero la extensión de este último procedimiento al problema transitorio.

Así, si se multiplica la Ec. (12.54) por la función p dada por la Ec. (12.31) y se utiliza una aproximación de Galerkin estándar en el espacio, se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{N}^T p \left[\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + A\frac{\partial \hat{U}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} k \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right) + Q \right] d\Omega \\
&\equiv \left(\int_\Omega \mathbf{N}^T p \mathbf{N}\, d\Omega \right) \dot{\bar{\mathbf{U}}} + \left(\int_\Omega (\nabla \mathbf{N})^T k p \nabla \mathbf{N}\, d\Omega \right) \bar{\mathbf{U}} + \int_\Omega p \mathbf{N}^T Q \, d\Omega \\
&\equiv \tilde{\mathbf{M}} \dot{\bar{\mathbf{U}}} + \tilde{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{f}} = 0 \qquad (12.59)
\end{aligned}
$$

En (12.54) se aproxima la distribución espacial de U en la forma usual como

$$U \approx \hat{U} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{U}} \qquad (12.60)$$

El sistema de ecuaciones anterior es simétrico y capaz de ser resuelto en el dominio del tiempo por cualquiera de los métodos descritos en el Capítulo 10. Podemos obviamente escalar cada ecuación cambiando el origen de la función

$$p = e^{-2(Pe)x/h} \qquad (12.61)$$

de la misma manera que se hizo en la Sección 2.4 para evitar dificultades en el condicionamiento de las ecuaciones, pero ahora perdiendo la simetría. Con dicho escalado se añaden términos en derivadas temporales a la ecuación típica nodal obtenida para las condiciones estacionarias. Estas derivadas contribuyen al primer miembro de la Ec. (12.34) en los siguientes términos:

$$
\begin{aligned}
&h/A[(1-1/Pe)e^{2Pe} + 1 + 1/Pe]\dot{\bar{U}}_{i-1} \\
&+h/A[1/(Pe)e^{2Pe} - 4 - 1/(Pe)e^{-2Pe}]\dot{\bar{U}}_i \\
&+h/A[1 - 1/Pe + (1+1/Pe)e^{-2Pe}]\dot{\bar{U}}_{i+1} \qquad (12.62)
\end{aligned}
$$

Aunque la aplicación del procedimiento de Petrov-Galerkin con ponderación contracorriente óptima en la Ec. (12.54a) proporciona términos idénticos en el caso estacionario, los términos transitorios son diferentes e iguales a

$$
\begin{aligned}
&h/A[(\frac{5}{12} - \frac{1}{4}Pe)e^{2Pe} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}Pe - (\frac{1}{12} + \frac{1}{4}Pe)e^{-2Pe}]\dot{\bar{U}}_{i-1} \\
&+ \frac{2}{3}h/A[e^{Pe} - e^{-Pe}]^2\dot{\bar{U}}_i + h/A[(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4}Pe)e^{2Pe} \\
&- \frac{1}{3} - \frac{1}{2}Pe + (\frac{5}{12} + \frac{1}{4}Pe)e^{-2Pe}]\dot{\bar{U}}_{i-1} \qquad (12.63)
\end{aligned}
$$

Como se observará más tarde, el comportamiento de ambos esquemas es diferente.

Se presenta seguidamente para comparación la expresión que se obtiene utilizando el procedimiento estándar de Galerkin aplicado a la Ec. (12.54):

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{h}{6k}\right)(\dot{\bar{U}}_{i-1} + 4\dot{\bar{U}}_i + \dot{\bar{U}}_{i+1}) - (1+Pe)\bar{U}_{i-1} \\
&\qquad +2\bar{U}_i - (1-Pe)\bar{U}_{i+1} + \frac{Qh^2}{k} = 0 \quad (12.64)
\end{aligned}
$$

Cada una de las Ecs. (12.62), (12.63) y (12.64) podrían resolverse en el dominio del tiempo utilizando procedimientos de integración temporal estándar. Escribiendo dichas ecuaciones en la forma

$$\tilde{\mathbf{M}}\dot{\bar{\mathbf{U}}} + \tilde{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{f}} = 0 \qquad (12.65)$$

se puede, por ejemplo, efectuar la aproximación en el tiempo como [Ec. (10.11) del Capítulo 10]

$$\frac{\tilde{\mathbf{M}}[\bar{\mathbf{U}}^{n+1} - \bar{\mathbf{U}}^n]}{\Delta t} + \tilde{\mathbf{H}}[(1-\Theta)\bar{\mathbf{U}}^n + \Theta\bar{\mathbf{U}}^{n+1}] + \mathbf{f}^n = 0 \qquad (12.66)$$

y resolver para $\bar{\mathbf{U}}^{n+1}$. Se podría esperar que, como es usual, $\Theta \geq 1/2$ daría una estabilidad incondicional y que con $\Theta = 0$ y substitución de una matriz diagonal

$$\tilde{\mathbf{M}} \approx \tilde{\mathbf{M}}_L \qquad (12.67)$$

se dispondría de un procedimiento explícito. Sin embargo, éste no es el caso generalmente ya que las demostraciones de estabilidad (ver Capítulo 10) se han restringido a situaciones que surgen de problemas autoadjuntos en los cuales las matrices del tipo de las que aparecen en la Ec. (12.65) eran simétricas y definidas positivas. Con términos convectivos dominando el problema se necesitan procedimientos más elaborados para comprobar la estabilidad y el comportamiento del algoritmo de integración temporal. Un procedimiento muy conveniente es el de comparar las soluciones exacta y numérica en una malla uniforme y obtener lo que se denominan cocientes de *amplitud* y de *celeridad relativa*. Este proceso se describe a continuación.

Consideremos una ecuación típica

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad (A)$$

que surge de la Ec. (12.54) con $k = 0$ y $Q = 0$. Ésta tiene una solución analítica general

$$U = Ue^{i\sigma(x-At)} \qquad (B)$$

donde U y σ son constantes arbitrarias.

Para un valor real de σ, la solución anterior es periódica con una longitud de onda

$$L = \frac{2\pi}{\sigma} \qquad (C)$$

y esto permite utilizar espacialmente un desarrollo de Fourier adecuado.

Para una cierta coordenada x es interesante comprobar el "cociente de crecimiento" o de *amplitud*

$$\lambda = \frac{U(t+\Delta t)}{U(t)} = e^{-iA\sigma\Delta t} \qquad (D)$$

éste tiene un módulo $|\lambda|$ tal que

$$|\lambda| = 1$$

y un argumento β

$$\arg \equiv \beta = A\sigma\Delta t \equiv pC$$

donde se define

$$p \equiv \sigma\Delta x \qquad C \equiv A\frac{\Delta t}{\Delta x} \equiv \text{número de Courant} \qquad (E)$$

Se puede obtener ahora un cociente similar, λ^*, para cualquier esquema numérico que relacione valores discretos de U en dos niveles de tiempo t y $t + \Delta t$, suponiendo que se satisface en x la solución exacta, o sea que

$$\frac{U_{i+1}}{U_i} = \frac{U_i}{U_{i-1}} = e^{i\sigma\Delta x}$$

donde $\Delta x = h$ es la distancia entre dos nodos.

Para comprobación de la solución numérica, el cociente

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda^*}{\lambda} \qquad (F)$$

tiene particular importancia. El módulo de $\bar{\lambda}$ se denomina *cociente de amplitud* y la *celeridad relativa* es el cociente de los argumentos de λ^* y λ. Ambos determinan el tipo de comportamiento que podemos esperar del esquema numérico. Así, el módulo de $\bar{\lambda}$ debe ser próximo a la unidad para obtener más precisión, y en el caso presente nunca debería exceder dicho valor si queremos mantener una solución estable. Similarmente la celeridad relativa debería ser cercana a la unidad para un buen comportamiento.

Para ilustrar este procedimiento consideremos la aproximación discreta utilizando el método de Galerkin estándar dada por la Ec. (12.64), pero reducida al caso puramente convectivo y utilizando la aproximación temporal de la Ec. (12.66).

El lector puede ahora comprobar que se llega a

$$\frac{1}{6C}(\bar{U}_{i-1}^{n+1} + 4\bar{U}_i^{n+1} + \bar{U}_{i+1}^{n+1}) - \frac{1}{6C}(\bar{U}_{i-1}^n + 4\bar{U}_i^n + \bar{U}_{i+1}^n)$$
$$+\frac{1-\Theta}{2}(-\bar{U}_{i+1}^n + \bar{U}_{i-1}^n) + \frac{\Theta}{2}(-\bar{U}_{i+1}^n + \bar{U}_{i-1}^{n+1}) = 0$$

siendo $C = A\Delta t/h$ el número de Courant. Haciendo

$$\bar{U}^n_{i+1} = \bar{U}^n_i e^{i\sigma h} = \bar{U}^n_i e^{ip} , \qquad \text{etc.}$$

e insertando en la ecuación anterior se obtiene el cociente λ^* como

$$\lambda^* \equiv \frac{\bar{U}^{n+1}_i}{\bar{U}^n_i} = \frac{(\cos p + 2) - 3Ci(1+\Theta)\text{sen } p}{(\cos p + 2) + 3Ci\Theta\text{sen } p}$$

advirtiendo que

$$\frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2} \equiv \cos p \qquad \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i} \equiv \text{sen } p$$

De lo anterior y la ecuación (D) se obtienen el módulo y el argumento de $\bar{\lambda}$, proporcionando la amplitud y los cocientes de amplitud y celeridad deseados para este esquema.

12.10.2 *Estudio del comportamiento de las aproximaciones variacionales de Petrov-Galerkin y de Galerkin.* En las Figuras 12.13 (*a*), (*b*) y (*c*) se muestra el comportamiento característico, esto es, los cocientes de amplitud y celeridad para los tres esquemas dados por las Ec. (12.62) a (12.64) combinados con el algoritmo de integración temporal de la Ec. (12.66). Sólo se considera el caso de convección pura ($k = 0$) para mayor simplicidad.

Estas gráficas de los cocientes de amplitud y celeridad deberían ser en el caso ideal una línea recta horizontal de ordenada unidad; como se ha mencionado antes, los valores del coeficiente de amplitud que excedan de la unidad conducirán a inestabilidades o crecimientos progresivos de los errores y, por consiguiente, no son aceptables.

Los parámetros utilizados en las gráficas mencionadas son el número de Courant

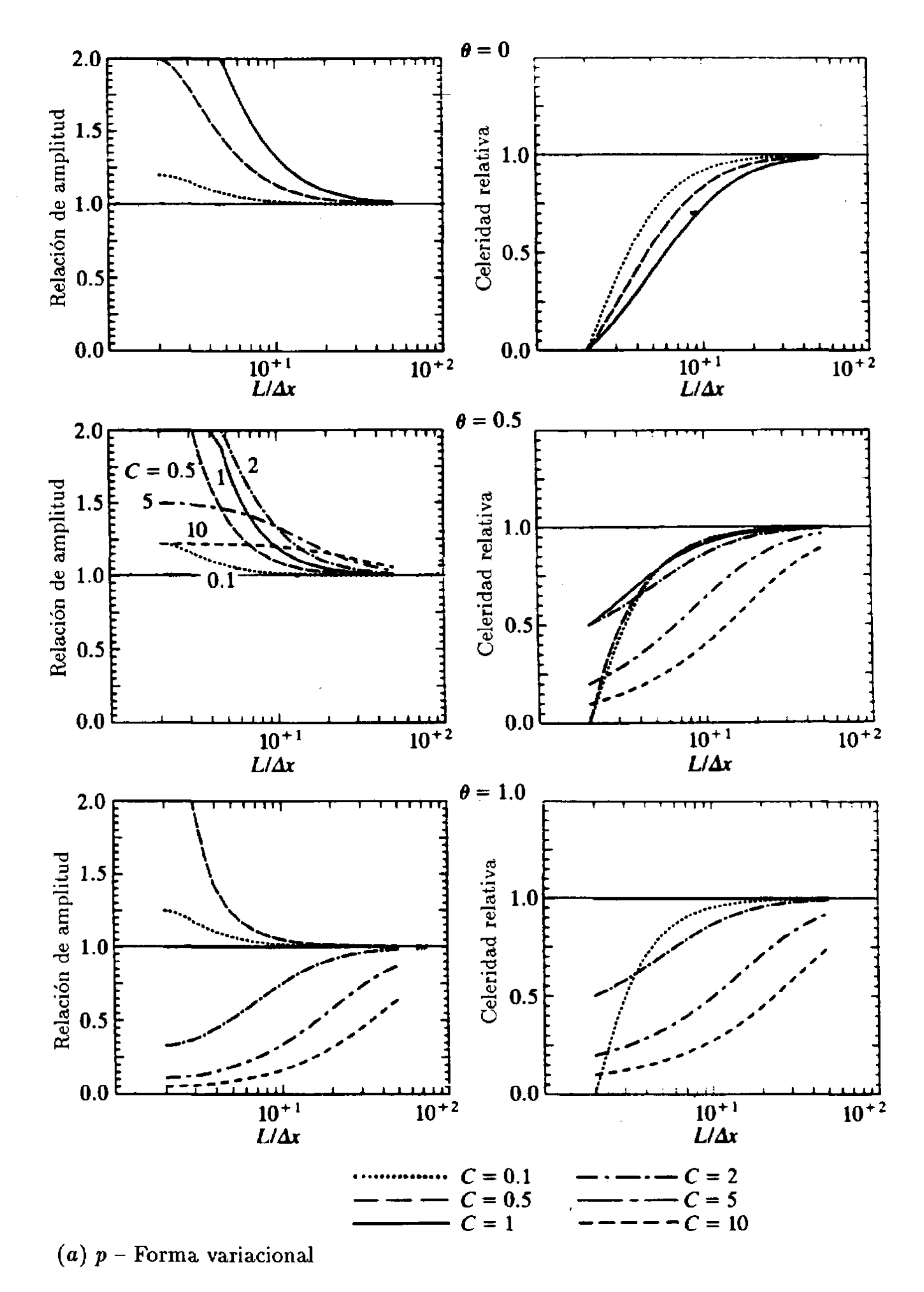
$$C = A\frac{\Delta t}{\Delta x} \equiv A\frac{\Delta t}{h} \tag{12.68}$$

y el valor de Θ utilizado en la integración temporal.

Es inmediatamente evidente que:

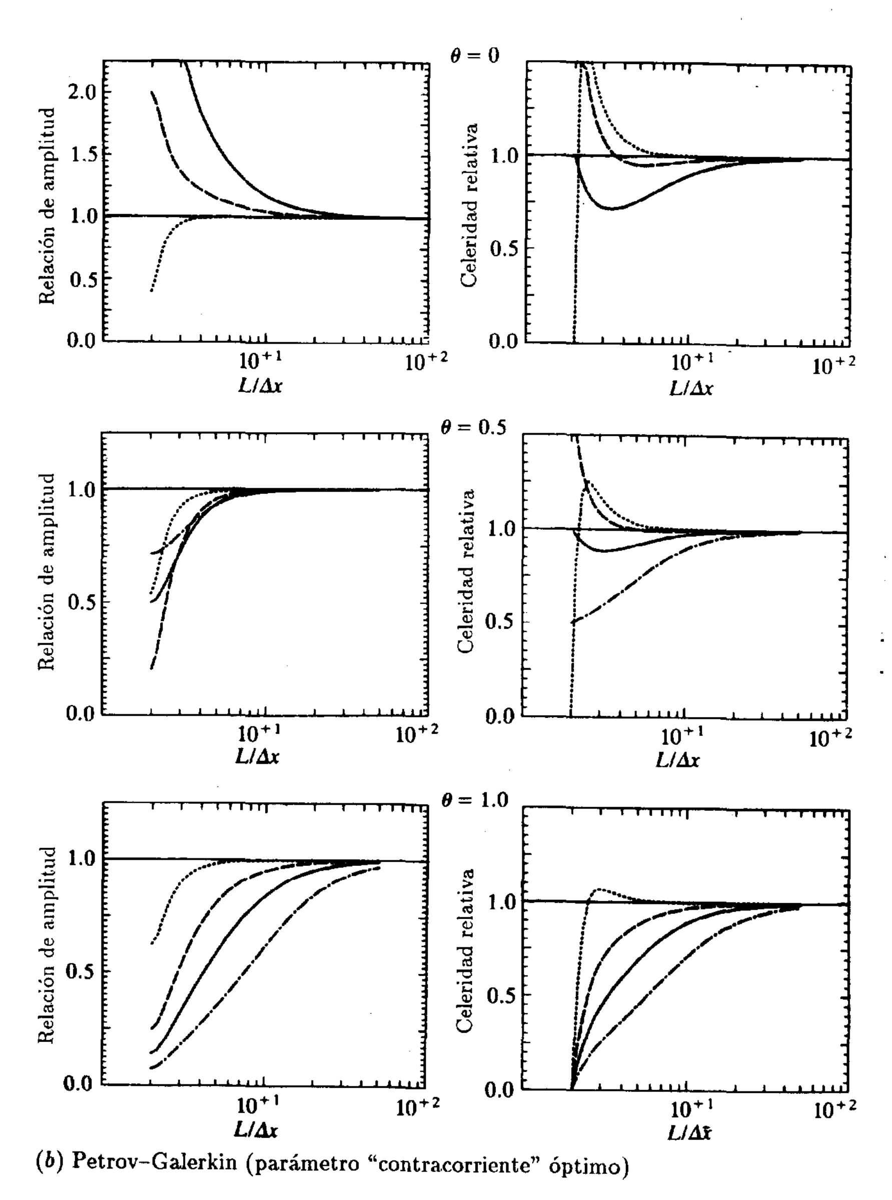
1. La forma variacional es generalmente inestable.
2. El método de Petrov-Galerkin es incondicionalmente estable para $\Theta \geq 1/2$, pero la estabilidad condicional para $\Theta = 0$ es bastante limitada.
3. El proceso estándar de Galerkin (Bubnov) con $\Theta = 0.5$ es estable y preciso, pero es incondicionalmente estable para $\Theta = 0$.

El último resultado no es sorprendente ya que hemos demostrado que el método estándar de Galerkin no es aplicable para el régimen estacionario.



(*a*) *p* – Forma variacional

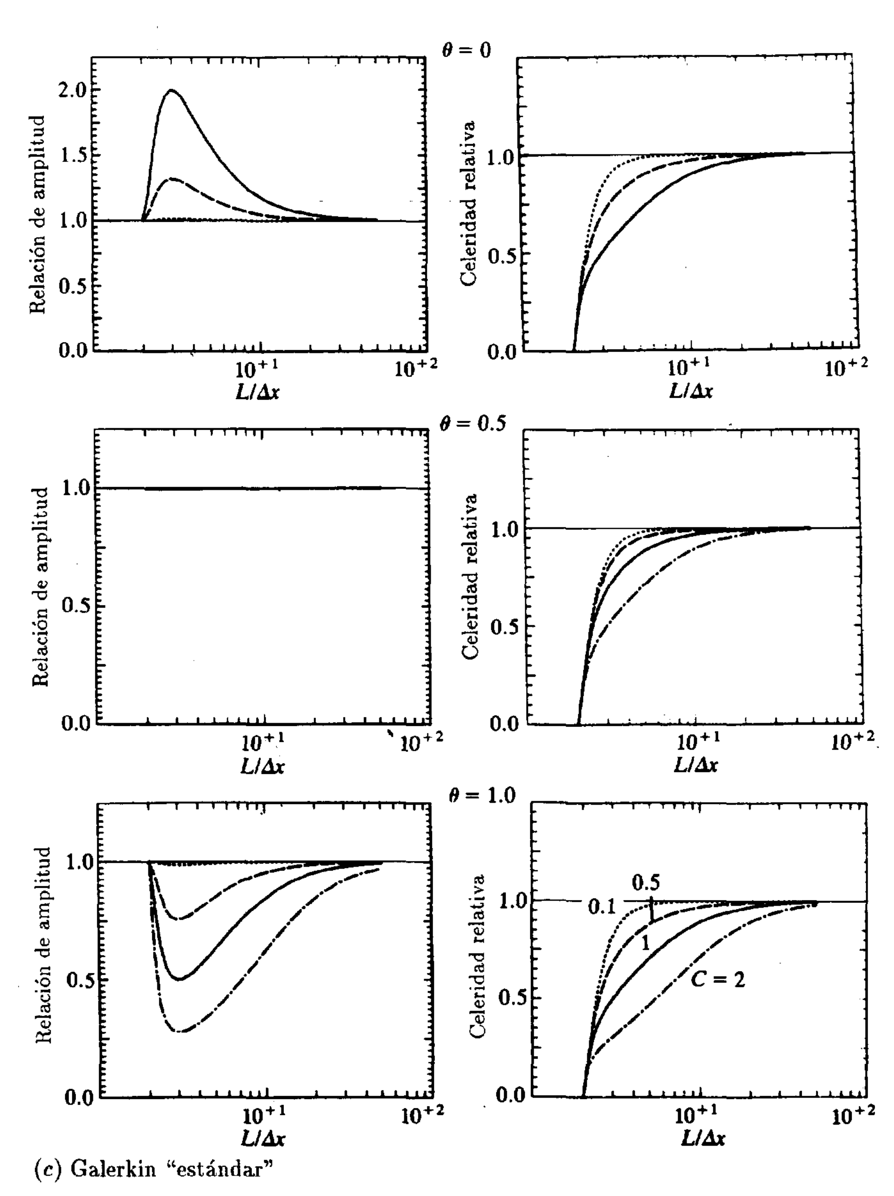
Figura 12.13 Cocientes de amplitud y celeridad relativa para varios algoritmos. Convección pura para varios números de Courant.



(*b*) Petrov–Galerkin (parámetro “contracorriente” óptimo)

Figura 12.13 (*continuación*).

En la Figura 12.14 se estudia la propagación de una onda gaussiana utilizando algunos de los algoritmos implícitos descritos en este capítulo. El comportamiento de los métodos descritos hasta ahora es pobre, excepto para números de Courant muy pequeños ($C = 0.1$), mostrando en estos casos un amortiguamiento excesivo.



(*c*) Galerkin “estándar”

Figura 12.13 (*continuación*).

12.11 Métodos espacio-tiempo de mínimos cuadrados de Petrov-Galerkin

La aplicación con éxito y de manera sencilla del proceso de minimización de mínimos cuadrados de Galerkin para el problema estacionario de la Sección 12.5 sugiere que quizás este procedimiento podría ser de nuevo

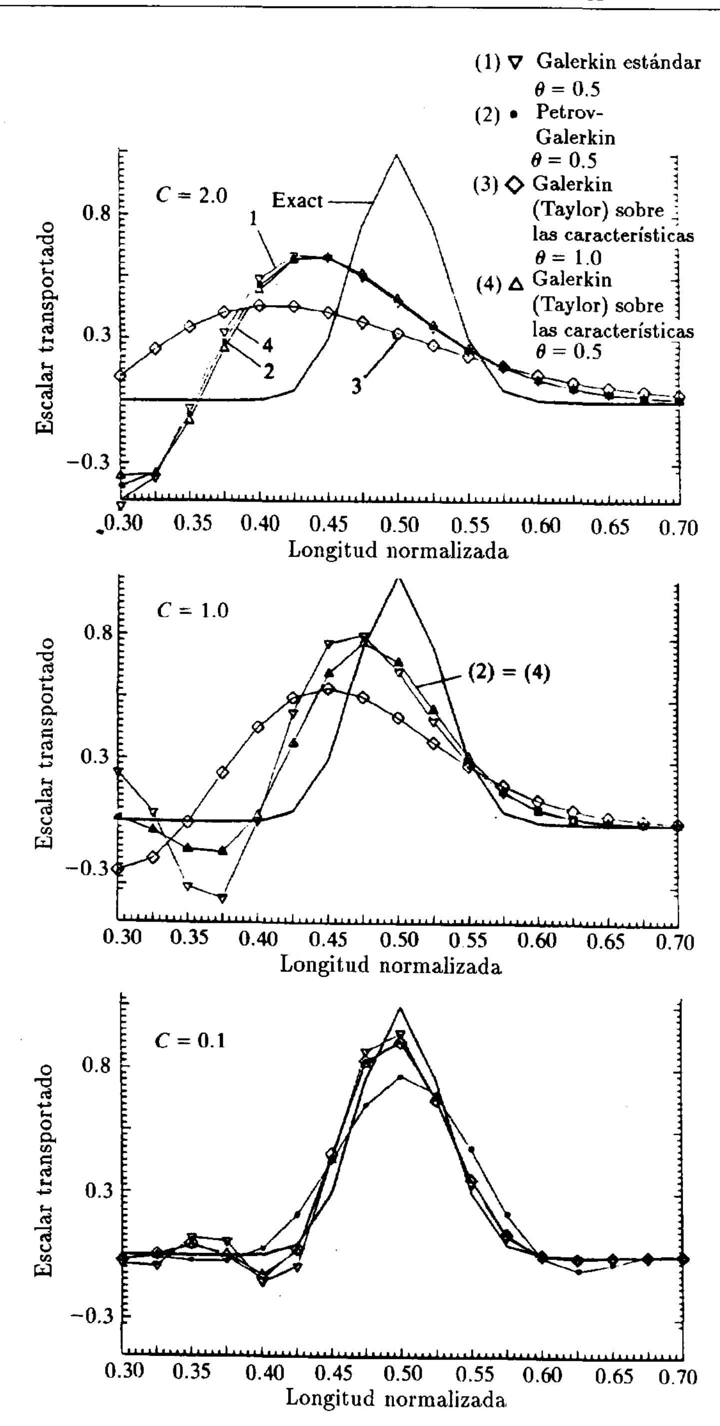


Figura 12.14 Propagación de una onda gaussiana. Perfil para $t = 0.5$ ($A = 1.0$), $h = 0.025$ (20 incrementos de $C = 1.0$), integración implícita.

útil ahora en su aplicación al dominio espacio-tiempo de la Figura 12.15. Esto es cierto como demostraremos a continuación.

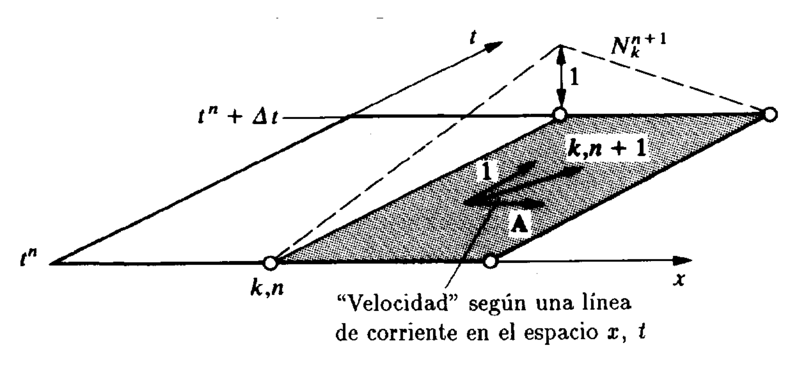


Figura 12.15 Elementos espacio-tiempo en una aproximación de Petrov-Galerkin a lo largo de las líneas de corriente.

Consideremos el problema de la Ec. (12.53) en el que se intenta aproximar U en el dominio espacio-tiempo, escribiendo

$$U \approx \hat{U} = \tilde{\mathbf{N}}^n(x_i, t)\bar{\mathbf{U}}_n + \tilde{\mathbf{N}}^{n+1}(x_i, t)\bar{\mathbf{U}}_{n+1} \tag{12.69}$$

donde los índices n y $n+1$ indican los tiempos t y $t + \Delta t$, respectivamente. Se define el residuo R por

$$R \equiv \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{G}_i}{\partial x_i} + Q \tag{12.70}$$

e intentaremos minimizar el siguiente funcional con respecto a $\bar{\mathbf{U}}_{n+1}$:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_t^{t+\Delta t}\int_\Omega R^2 \, d\Omega \, dt \tag{12.71}$$

es decir, utilizando ahora un procedimiento de mínimos cuadrados puro.[24]

En este momento es conveniente efectuar una nueva aproximación para eliminar la integración en el tiempo y escribir

$$\begin{aligned} R \approx \tilde{R} \equiv \frac{\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n}{\Delta t} &+ \left(A_i \frac{\partial \hat{U}_{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{G}_i^{n+1}}{\partial x_i} \right) \Theta \\ &+ \left(A_i \frac{\partial \hat{U}_n}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{G}_i^n}{\partial x_i} \right)(1 - \Theta) + Q^{n+\theta} \end{aligned} \tag{12.72}$$

donde

$$\hat{U}_{n+1} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{U}}_{n+1}$$
$$\hat{U}_n = \mathbf{N}\bar{\mathbf{U}}_n$$
$$G_i^{n+1} = -k\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\bar{\mathbf{U}}_{n+1}$$
$$G_i^n = -k\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\bar{\mathbf{U}}_n$$

Aquí $\mathbf{N}$ son las funciones de forma espaciales y el funcional de la Ec. (12.71) se escribe simplemente como

$$\Pi = \frac{1}{2}\Delta t \int_\Omega \tilde{R}^2\, d\Omega \tag{12.73}$$

La minimización de éste con respecto a $\bar{\mathbf{U}}_{n+1}$ da

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{U}}_{n+1}} = \Delta t \int_\Omega \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \bar{\mathbf{U}}_{n+1}} \tilde{R}\, d\Omega = 0 \tag{12.74}$$

o

$$\int_\Omega \left[\mathbf{N}^T + \Theta \Delta t A_i \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\right)^T - \Theta \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\right)^T \right] \tilde{R}\, d\Omega = 0 \tag{12.75}$$

Esta expresión introduce algunas dificultades debido al término de segundo orden en la función de peso. Sin embargo, si se omite este término la expresión es similar a la que se obtendría utilizando el procedimiento de Petrov-Galerkin tal y como ocurría en la Sección 12.10 con el sencillo esquema de integración temporal de la Ec. (12.66).

Si se escoge Δt de manera que el número de Courant sea la unidad, o sea

$$C = |A|\frac{\Delta t}{h} = 1 \tag{12.76}$$

y $\Theta = 1/2$, entonces el coeficiente del segundo término de la Ec. (12.75) se hace

$$\Theta \Delta t A_i = \frac{1}{2} h \frac{A_i}{|A|} \tag{12.77}$$

obteniéndose la coincidencia entre este procedimiento y el de Petrov-Galerkin con $\alpha = 1$.

Ciertamente uno podría argumentar que este esquema es de alguna manera óptimo, ya que corresponde a incrementos de tiempo necesarios para que la perturbación se propague a través de los elementos de forma "natural" aunque, naturalmente, en un problema multidimensional real cumplir la condición de la Ec. (12.76) sería en general imposible.

Es interesante observar que en el caso estacionario, es decir, cuando $\bar{\mathbf{U}}_n = \bar{\mathbf{U}}_{n+1}$, la Ec. (12.75) se reduce a

$$\int_\Omega \left(\mathbf{N}^T + \Theta \Delta t A_i \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i}\right)\left(A_i \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial x_i} + Q\right) d\Omega \tag{12.78}$$

y coincide con la ponderación de Petrov-Galerkin, que es idéntica a la de la Ec. (12.45) si se escoge el Δt independientemente para cada elemento de manera que se satisfaga la Ec. (12.77).

El esquema de integración temporal y la aproximación aquí descrita sigue las ideas seguidas por Carey y Jiang.[25,26] El esquema de las Ecs. (12.72) y (12.75) no es aplicable en su modo explícito ($\Theta = 0$) ya que en este caso es simplemente idéntico al esquema estándar de Galerkin de la Ec. (12.64), que como vimos es incondicionalmente inestable. Sin embargo, para $\Theta \geq 1/2$ el proceso es incondicionalmente estable y ha demostrado ser razonablemente preciso en muchos problemas transitorios con valores de C en el rango de 0.5–20.[25,26]

Johnson *et al.*[22,27,28] y más tarde Yu y Heinrich[29–30] propusieron un procedimiento algo más complejo involucrando elementos tiempo-espacio. Aquí se observa que el problema transitorio de la Ec. (12.53) guarda mucha similitud con el caso estacionario multidimensional si se considera el tiempo simplemente como una coordenada más. Los procedimientos de las Secciones 12.2 a 12.8 son, por consiguiente, aplicables aquí de manera natural. Por ejemplo, utilizando el procedimiento de mínimos cuadrados de Galerkin de la Sección 12.5 y funciones de forma definidas por la Ec. (12.69) se podría escribir en el dominio espacio-tiempo la siguiente forma integral [análoga a la Ec. (12.39)]

$$\int_0^t \int_\Omega \left[\tilde{\mathbf{N}}^T + \lambda\left(-\frac{\partial \tilde{\mathbf{N}}^T}{\partial t} + A_i \frac{\partial \tilde{\mathbf{N}}}{\partial x_i}\right)\right] R\, d\Omega\, dt = 0 \tag{12.79}$$

donde R es el residuo definido en la Ec. (12.70).

Existe una cierta ambigüedad en la determinación del valor de λ óptimo ya que el "tamaño" del elemento en el dominio espacio-tiempo no puede definirse fácilmente. Se sugiere, por consiguiente, que se utilice la expresión (12.40) con $\alpha = 1$ y una dimensión espacial h, tal que

$$\lambda = \frac{h}{2|A|} \tag{12.80}$$

En este procedimiento se preserva todavía la naturaleza de "línea de corriente" de la difusión efectiva en el dominio tiempo-espacio.

El algoritmo que resulta de la Ec. (12.79) es, como el de la Ec. (12.75), siempre implícito y se reduce en el caso estacionario a la aproximación de Petrov-Galerkin para todos los valores de Δt. Esto no ocurre así con la aproximación de mínimos cuadrados de la Ec. (12.75), que da la difusión correcta estacionaria solamente para $C = 1$. Ciertamente, de todos los algoritmos presentados aquí, éste es el único que tiene esa deseable propiedad.

12.12 Métodos basados en las líneas características

12.12.1 *Métodos de interpolación y actualización de mallas.* Ya hemos observado que si se transportan de manera convectiva las coordenadas espaciales en la forma que se detalla en la Ec. (12.55), es decir, a lo largo de las *líneas características* del problema, los términos convectivos de primer orden desaparecen y el problema restante es el de la simple difusión, para el que pueden utilizarse procedimientos estándar con la aproximación espacial de Galerkin.

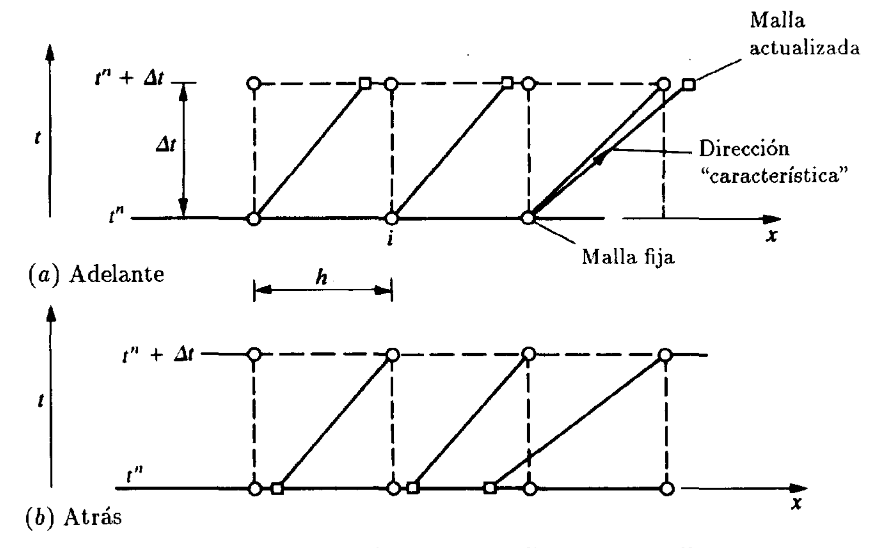


Figura 12.16 Interpolación y actualización de mallas.

La utilización más obvia de este procedimiento en el contexto de elementos finitos es actualizar la posición de los puntos de la malla en una forma lagrangiana. En la Figura 12.16(a) se muestra dicha actualización para el problema unidimensional de la Ec. (12.54) en el caso de un intervalo de tiempo Δt.

Para una coordenada x' constante

$$dx = A\,dt \tag{12.81}$$

y para un punto nodal típico i, se obtiene

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \int_0^t A\,dt \tag{12.82}$$

donde en general la "velocidad A" puede ser dependiente de x. Sin embargo, si $F = F(U)$ y $A = \partial F/\partial U = A(U)$ entonces la velocidad de la onda es constante a lo largo de una característica en ausencia de difusión o términos de fuente [en virtud de la Ec. (12.58)] y las líneas características son rectas.

Para dicho valor constante de A se tiene simplemente

$$x_i^{n+1} = x_i^n + A\Delta t \tag{12.83}$$

para la posición actualizada de la malla.

En la malla actualizada sólo es necesario resolver el problema de difusión transitorio, utilizando los métodos del Capítulo 10. Este caso no es necesario discutirlo con detalle aquí.

El problema de actualizar continuamente la malla y resolver el problema de difusión sobre la nueva malla es, naturalmente, impracticable. Cuando se aplica a configuraciones bi o tridimensionales se obtienen elementos muy distorsionados y surgirían dificultades en los contornos del dominio. Por esta razón, parece obvio que después de una etapa completa debería volverse a la malla original interpolando los valores actualizados como se muestra en la Figura 12.16(a).

Este procedimiento puede utilizarse de forma inversa buscando hacia atrás el origen de las líneas características, como se muestra en la Figura 12.16(b), utilizando valores iniciales de la interpolación apropiados.

El método descrito es algo intuitivo pero ha sido utilizado con éxito por Adye y Brebbia[31] y otros para la solución de las ecuaciones de transporte. El procedimiento puede formalizarse y presentarse de manera más general, lo que da origen a los llamados métodos de Galerkin a lo largo de las líneas características.[32]

La parte difusiva de los cálculos se efectúa sobre la malla original o la final, cada una representando una cierta aproximación. Intuitivamente imaginemos en el esquema de actualización que el *operador se desdobla* con los cambios de difusión ocurriendo de manera independiente que los de convección. Esta idea se explica en las técnicas que se presentan en la sección siguiente.

12.12.2 *Procedimientos de Galerkin a lo largo de las líneas características.* Consideraremos que la ecuación de convección-difusión en su forma unidimensional (12.54) se separa en dos partes de manera que

$$U = U^* + U^{**} \tag{12.84}$$

y

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{12.85a}$$

es un sistema puramente convectivo, mientras que

$$\frac{\partial U^{**}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) + Q = 0 \tag{12.85b}$$

representa la difusión.

Ambos U^* y U^{**} se aproximan por desarrollos estándar

$$\hat{U}^* = \mathbf{N}\bar{\mathbf{U}}^* \qquad \hat{U}^{**} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{U}}^{**} \tag{12.86}$$

y en un incremento de tiempo de t^n a $t^n + \Delta t = t^{n+1}$ supondremos que las condiciones iniciales son

$$t = t^n \qquad U^* = 0 \qquad U^{**} = U^n \tag{12.87}$$

La discretización estándar de Galerkin de la ecuación de difusión permite determinar $\bar{U}^{**}_{n+1}$ sobre la malla fija resolviendo una ecuación de la forma

$$\mathbf{M}\Delta\bar{\mathbf{U}}^{**}_n = \Delta t\mathbf{H}(\bar{\mathbf{U}}_n + \Delta\bar{\mathbf{U}}^{**}_n\Theta) + \mathbf{f} \tag{12.88}$$

con

$$\bar{\mathbf{U}}^{**}_{n+1} = \bar{\mathbf{U}}^{**}_n + \Delta\bar{\mathbf{U}}^{**}_n$$

Al resolver el problema convectivo supondremos que U^* permanece inalterada a lo largo de las líneas características. Sin embargo, la Figura 12.17 muestra cómo el valor inicial de U^*_n interpolado por las soluciones de forma lineales estándar en el tiempo n [ver Ec. (12.86)] se traslada y distorsiona. El nuevo valor viene dado por

$$U^*_{n+1} = \mathbf{N}(y)\bar{\mathbf{U}}^*_n \qquad y = x + A\Delta t \tag{12.89}$$

Como se requiere aproximar U^*_{n+1} mediante funciones de forma estándar escribiremos una proyección para obtener un valor alisado sobre la malla como

$$\int_\Omega \mathbf{N}^T(\mathbf{N}\bar{\mathbf{U}}^*_{n+1} - \mathbf{N}(y)\bar{\mathbf{U}}^*_n)\,dx = 0 \tag{12.90}$$

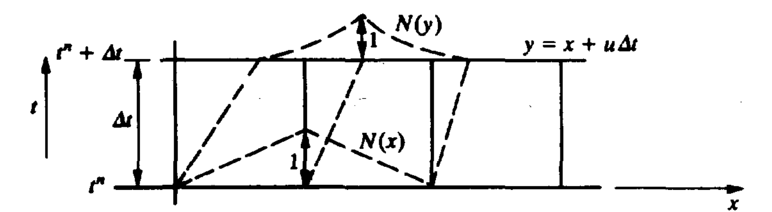


Figura 12.17 Distorsión de la función de forma convectiva.

dando

$$\mathbf{M}\bar{\mathbf{U}}^*_{n+1} = \int_\Omega [\mathbf{N}^T(y)\,dx]\bar{\mathbf{U}}^*_n \tag{12.91a}$$

donde $\mathbf{N} = \mathbf{N}(x)$ y $\mathbf{M}$ es

$$\mathbf{M} = \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{N}\,dx \tag{12.91b}$$

El cálculo de las integrales anteriores es todavía complejo, especialmente si el procedimiento se aplica a dos o tres dimensiones. Dicho cálculo se efectúa generalmente de forma numérica y la estabilidad de la solución depende de la precisión de dicha integración.[32] El esquema es estable y exacto en lo que respecta a los términos convectivos si se efectúa la integración exactamente (lo que naturalmente es un objetivo inalcanzable). Sin embargo, la estabilidad y ciertamente la precisión estarán todavía controladas por los términos de difusión, en los que se efectúan diversas aproximaciones.

12.12.3 *Un procedimiento de Galerkin a lo largo de las líneas características simple y explícito.* Son posibles muchas variaciones de los esquemas descritos en el apartado precedente y algunas se desarrollaron ya hace algunos años. En las referencias 31 a 40 se presentan algunas versiones de dichos métodos que funcionaron con éxito. Sin embargo, todos son algo complejos de programar y caros en su utilización. Por esta razón se desarrolló una alternativa más sencilla en la que las dificultades se evitaron a expensas de introducir una estabilidad condicional. Este método se publicó por primera vez en 1984[41] y está descrito en numerosas publicaciones.[42–45] Su obtención incorpora un desarrollo de Taylor local que se esquematiza en la Figura 12.18.

Discretizaremos aquí la Ec. (12.54) en el *tiempo* antes de intentar la discretización espacial. Utilizando un esquema explícito a lo largo de las

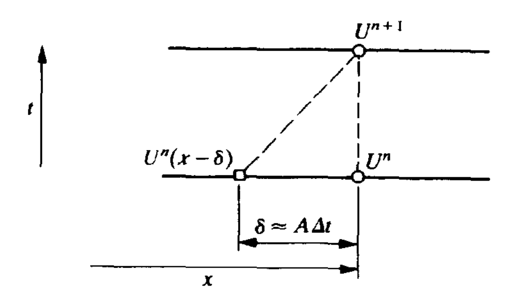


Figura 12.18 Un simple procedimiento de Galerkin a lo largo de las líneas características.

líneas características se puede escribir

$$U^{n+1}(x) - U^n(x-\delta) = \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}\right) - \tilde{Q}\right]_n \tag{12.92}$$

donde $(x-\delta)$ es el origen de las líneas características en la Figura 12.18 y $\tilde{U}$, $\tilde{Q}$ representan valores medios en el intervalo δ. Como antes, los términos convectivos se han eliminado, ya que éstos desaparecen a lo largo de las líneas características.

Se advierte ahora que utilizando desarrollos en serie de Taylor puede aproximarse U^n hasta el segundo orden utilizando valores definidos en el tiempo n:

$$U^n(x-\delta) \approx U^n - \delta\frac{\partial U^n}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} \tag{12.93a}$$

También aproximaremos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}\right) \approx \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right)^n \tag{12.93b}$$

$$\tilde{Q}^n(x-\delta) \approx Q^n - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^n \tag{12.93c}$$

donde $$\delta = \tilde{A}\Delta t$$

Similarmente se puede evaluar

$$\tilde{A} = \left[A - \delta\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \cdots\right]^n \approx \left[A - A\Delta t\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\right]^n \tag{12.94}$$

insertando (12.93) y (12.94) en (12.92) se tiene, despreciando los términos de mayor orden y las derivadas terceras,

$$\begin{aligned}\Delta U^n = U^{n+1} - U^n = \Delta t\Bigg[&-\left(A - A\Delta t\frac{\partial A}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^n + \frac{1}{2}\left(A^2\Delta t\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^n \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right)^n - Q^n + \left(\frac{A\Delta t}{2}\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^n\Bigg] \\ = -\Delta t\Bigg[&A\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A^2\Delta t}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\right) \\ &+ Q - \frac{A\Delta t}{2}\frac{\partial Q}{\partial x}\Bigg]^n\end{aligned} \tag{12.95}$$

Esto parece una aproximación temporal directa de la ecuación original (12.54) en la cual se ha añadido una difusión artificial $A^2\Delta t/2$, que recuerda los simples procedimientos de ponderación "contracorriente". En este momento se puede proceder a la discretización espacial utilizando un procedimiento estándar de Galerkin, ya que la ecuación es *autoadjunta a lo largo de las líneas características*. Aproximando, por tanto, en la forma usual de elementos finitos escribimos

$$U \approx \mathbf{N}\,\bar{\mathbf{U}} \tag{12.96}$$

y después de premultiplicar por $\mathbf{N}^T$ e integrar por partes se obtiene

$$\mathbf{M}\Delta\bar{\mathbf{U}}^n \equiv \mathbf{M}(\bar{\mathbf{U}}^{n+1} - \bar{\mathbf{U}}^n) = -\Delta t[(\mathbf{V} + \mathbf{H} + \mathbf{H}_D)\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{f}]^n \tag{12.97}$$

donde

$$\mathbf{M} = \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{N}\,d\Omega \tag{12.98a}$$

es la matriz de masa (consistente) estándar;

$$\mathbf{V} = \int_\Omega \mathbf{N}^T A\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\,d\Omega \tag{12.98b}$$

es la matriz no simétrica obtenida de los términos convectivos y la aproximación de Galerkin;

$$\mathbf{H}_D = \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x}\left(\frac{A^2\Delta t}{2}\right)\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\,d\Omega \tag{12.98c}$$

es un término de difusión equilibrador similar al que surge en problemas estacionarios debido a una aproximación de Petrov-Galerkin (ver Sección 12.2);

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x}\, k\, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\, d\Omega \tag{12.98d}$$

es la matriz de difusión estándar; y finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \left(Q - \frac{A\Delta t}{2} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\Omega + \text{ términos de contorno} \\ &= \int_{\Omega} \left(\mathbf{N}^T + \frac{A\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \right) Q\, d\Omega + \text{ términos de contorno} \end{aligned} \tag{12.98e}$$

da el vector de fuerzas modificado.

El algoritmo desarrollado es convectivamente estable y su incremento de tiempo crítico (o valor máximo de Δt permisible) exige que

$$C \le \sqrt{\frac{1}{Pe^2} + \frac{1}{3}} - \frac{1}{Pe} \tag{12.99a}$$

o, si $\mathbf{M}$ se reemplaza por $\mathbf{M}_L$

$$C \le \sqrt{\frac{1}{Pe^2} + 1} - \frac{1}{Pe} \tag{12.99b}$$

donde $\mathbf{M}_L$ es la forma diagonalizada o "concentrada" de $\mathbf{M}$.

En lo anterior, $C = A\Delta t/h$ es el número de Courant del elemento y $Pe = Ah/2k$ el número de Peclet del elemento [ver Ec. (12.15)]. En la Figura 12.19 se muestra la variación del límite de estabilidad descrito por la Ec. (12.99) utilizando una matriz de masa concentrada.

Es de considerable interés examinar el comportamiento de la solución cuando se alcanza el régimen estacionario –por ejemplo, si se utiliza el algoritmo de integración en el tiempo de la Ec. (12.97) como un procedimiento iterativo–. Ahora la solución final viene dada tomando

$$\bar{\mathbf{U}}^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}^{n} = \mathbf{U}$$

lo que conduce a

$$(\mathbf{V} + \mathbf{H}_D + \mathbf{H})\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{f} = 0 \tag{12.100}$$

Una revisión de las Secciones 12.2 y 12.3 muestra que la forma anterior es idéntica a la obtenida utilizando la aproximación de Petrov-Galerkin.

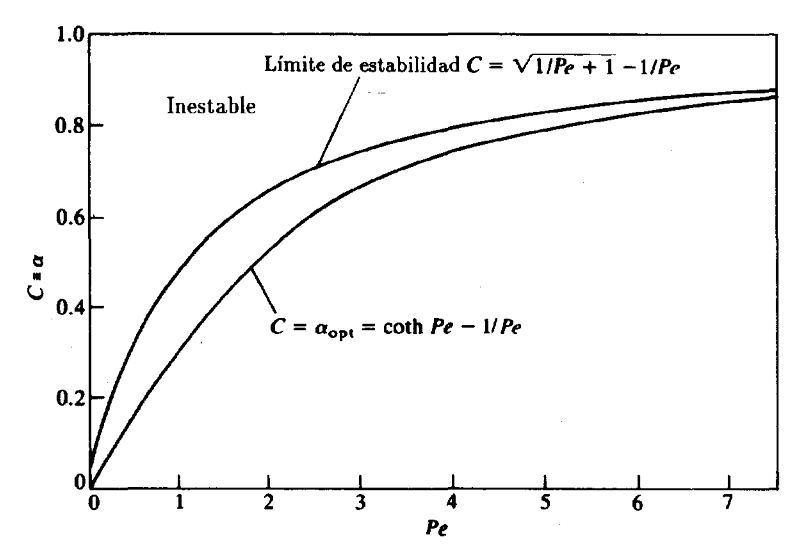


Figura 12.19 Límite de estabilidad para la aproximación con matriz de masa concentrada y parámetro contracorriente óptimo.

En este último método la matriz $\mathbf{V}$ es idéntica y la matriz $\mathbf{H}_T$ incluye la difusión equilibradora de valor $1/2\ \alpha Ah$. Sin embargo, si tomamos

$$\frac{1}{2}\alpha\, Ah = \frac{A^2\Delta t}{2} \tag{12.101}$$

los dos esquemas coinciden totalmente. Esto puede escribirse como una condición tal que

$$\alpha = \frac{A\Delta t}{h} = C \tag{12.102}$$

En la Figura 12.19 se dibuja el valor óptimo de α dado por la Ec. (12.24) en función de P_e. *Se advierte inmediatamente que si se utiliza el esquema de integración temporal en o cerca del límite de estabilidad crítico del esquema con masas concentradas, la solución estacionaria alcanzada será muy próxima a la que se obtiene utilizando el proceso de Petrov-Galerkin óptimo.* Sin embargo, si se utilizan incrementos de tiempo menores que el crítico, la solución final, aunque estable, tenderá hacia la discretización estándar de Galerkin estacionaria y en algunos casos se obtendrán oscilaciones si las condiciones de contorno son tales que aparezcan capas límites. No obstante, dichos incrementos de tiempo menores permiten reproducir de manera más precisa el proceso transitorio, por lo que se concluye que es imposible que puedan obtenerse simultáneamente la

solución óptima para los casos estacionario y transitorio.

Es importante ampliar el esquema desarrollado para el caso de una variable escalar U a más de una dimensión. Así, si comenzamos por la Ec. (12.53) y aplicamos precisamente razonamientos idénticos a los utilizados en una dimensión llegaremos a la forma de las Ecs. (12.97) y (12.98) en las cuales

$$\mathbf{V} = \int_\Omega \mathbf{N}^T A_i \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\, d\Omega \tag{12.103a}$$

$$\mathbf{H}_D = \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \left(\frac{A_i A_j \Delta t}{2}\right) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j}\, d\Omega \tag{12.103b}$$

$$\mathbf{H} = \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i}\, k\, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\, d\Omega \tag{12.103c}$$

$$\mathbf{f} = \int_\Omega \left(\mathbf{N}^T + \frac{A_i \Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i}\right) \mathbf{Q} + \text{términos de contorno} \tag{12.103d}$$

y, por consiguiente, la difusión equilibradora introducida por el esquema es de la forma

$$\frac{A_i A_j \Delta t}{2} \tag{12.104}$$

por tanto, es completamente análoga a la difusión a lo largo de las *líneas de corriente* de la Ec. (12.48).

Un exámen de las Ecs. (12.97), (12.98) y (12.103) muestra que el algoritmo de Galerkin a lo largo de las líneas características podría haberse obtenido aplicando una ponderación de Petrov-Galerkin

$$\mathbf{N}^T + \frac{\Delta t}{2} A_i \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i}$$

a los diversos términos de la Ec. (12.53) excluyendo la derivada con respecto al tiempo $\partial U/\partial t$ a la que se le aplicaría una ponderación estándar de Galerkin mediante $\mathbf{N}^T$. Comparando este caso con el problema estacionario y la ponderación utilizada en la Ec. (12.45) la conexión entre ambos procedimientos es obvia.

El proceso de Galerkin a lo largo de las *líneas características* introducido en esta sección es extremadamente versátil y presenta facetas de comportamiento casi óptimas. En las Figuras 12.20 y 12.21 se muestra su comportamiento en el problema unidimensional presentado previamente en las Figuras 12.13 y 12.14.

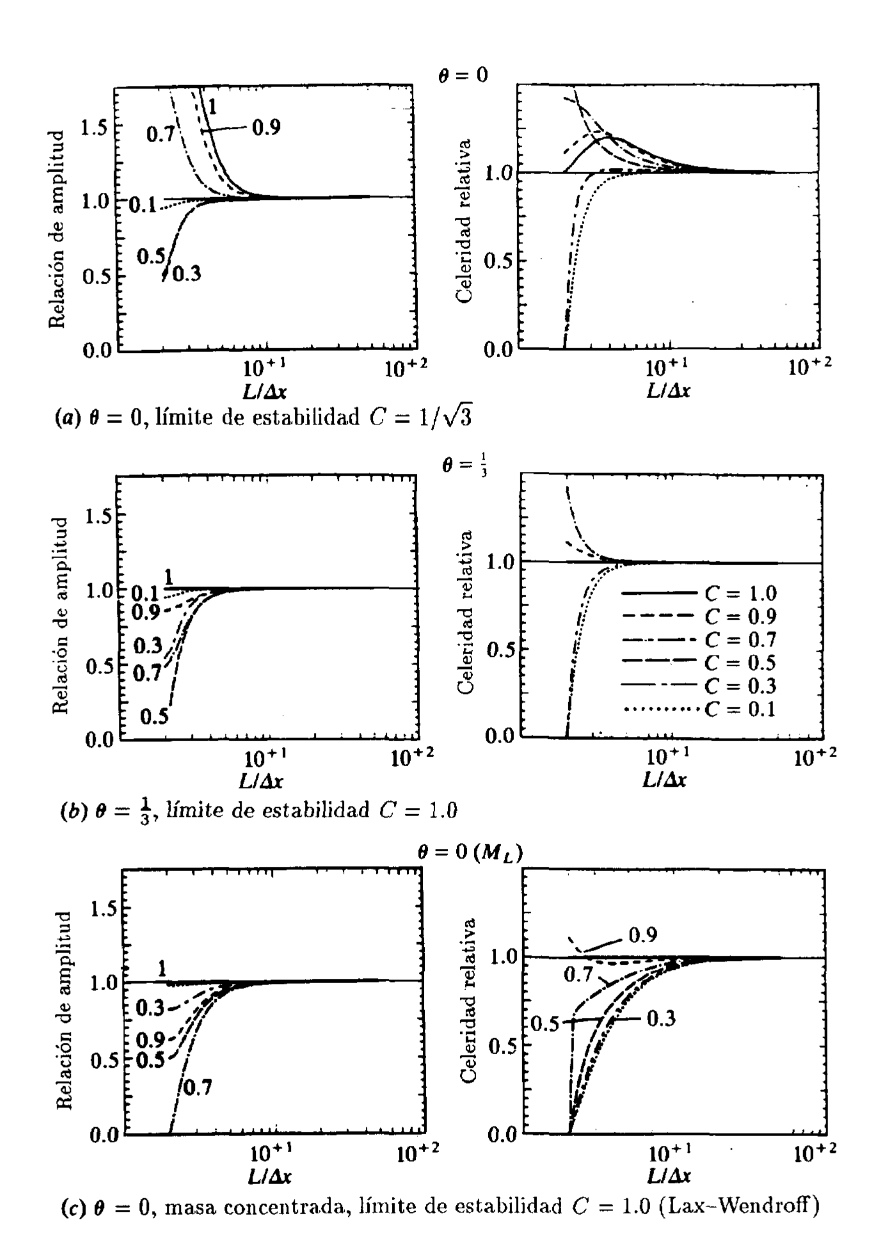
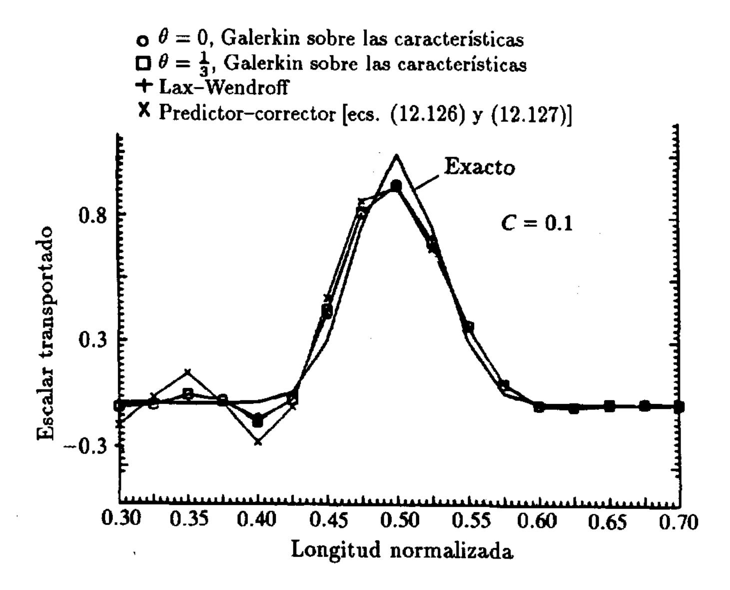


Figura 12.20 Métodos de Galerkin explícitos a lo largo de las líneas características. Cocientes de amplitud y celeridad relativa.



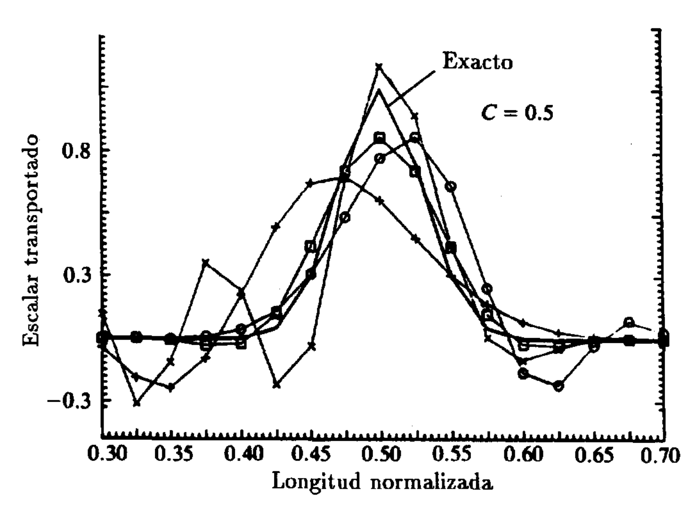
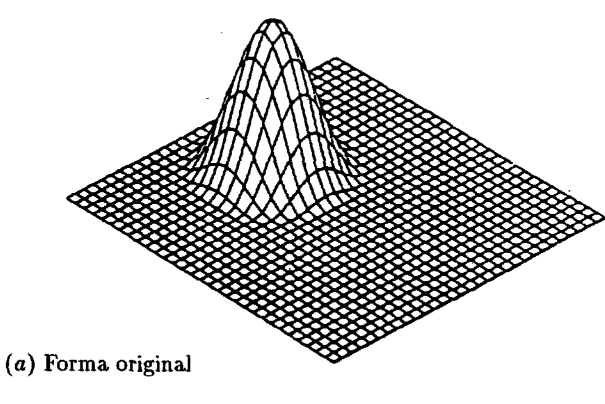


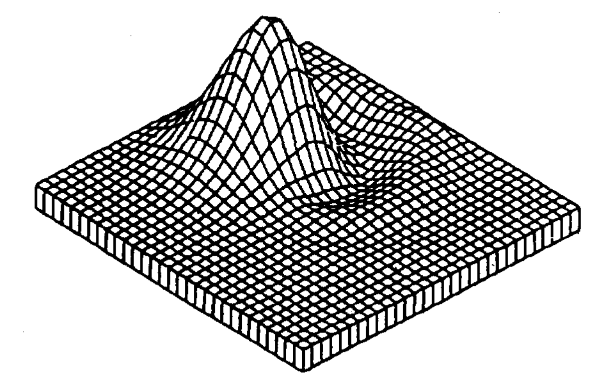
Figura 12.21 Propagación de una onda gaussiana. Perfil después de $t = 0.5$ ($A = 1.0$), $h = 0.025$, métodos explícitos.

En la Figura 12.22 se ilustra una aplicación bidimensional en la cual se muestra la convección pura de una perturbación en un flujo circular. Es remarcable advertir que casi no se introduce dispersión después de una revolución completa. El presente esquema se compara aquí con la solución



(*a*) Forma original

(*b*) Forma después de una vuelta usando la matriz **M** consistente



(*c*) Forma después de una vuelta usando masa concentrada (Lax–Wendroff)

Figura 12.22 Convección de un cono gaussiano en un flujo rotatorio utilizando un método de Galerkin a lo largo de las líneas características.

obtenida por un esquema de diferencias finitas de Lax y Wendroff,[46] que para una malla unidimensional regular conduce a un esquema idéntico al de Galerkin a lo largo de las líneas características, excepto para la matriz de masa, que en el esquema de diferencias finitas es siempre de forma concentrada.

Parece aquí que la diferencia entre ambos procedimientos se debe a la forma de la matriz de masa $\mathbf{M}$ utilizada y advertimos que para obtener la respuesta transitoria la importancia de la matriz de masa consistente es crucial. Sin embargo, la ventaja numérica de utilizar la forma concentrada es abrumadora en un esquema explícito. Es fácil también recuperar el comportamiento de la matriz de masa consistente utilizando un simple algoritmo iterativo. En éste se escribe la Ec. (12.97) como

$$\mathbf{M}\Delta\bar{\mathbf{U}}^n = \Delta t\mathbf{S}^n \tag{12.105}$$

con

$$\bar{\mathbf{U}}^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}^n + \Delta\bar{\mathbf{U}}^n$$

Sustituyendo una matriz de masas concentradas $\mathbf{M}_L$ para facilitar la solución podemos iterar como sigue:

$$(\Delta\bar{\mathbf{U}})^n_l = \mathbf{M}_L^{-1}[\Delta t\mathbf{S}^n - \mathbf{M}(\Delta\bar{\mathbf{U}})^n_{l-1}] + (\Delta\bar{\mathbf{U}})^n_{l-1} \tag{12.106}$$

donde l es el número de iteraciones. El proceso converge muy rápidamente y en la Figura 12.23 se muestra la mejora sustancial en los resultados de la solución de la propagación de una onda con tres de dichas iteraciones en cada incremento de tiempo.

12.12.4 *Condiciones de contorno de radiación.* Como ya se ha indicado el problema de convección-difusión permite una única condición de contorno del tipo

$$U = \overline{\overline{U}} \qquad \text{sobre} \qquad \Gamma_u \tag{12.107a}$$

y

$$-k\left(\frac{\partial U}{\partial h}\right) = \overline{\overline{q}} \qquad \text{sobre} \qquad \Gamma_q \tag{12.107b}$$

impuestas, si la ecuación es de segundo orden y existe difusión (donde $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$).

En el caso de convección pura esto ya no es así, ya que la ecuación diferencial es de primer orden. Ciertamente esto era la causa de las dificultades para obtener la solución en el ejemplo de la Figura 12.1, cuando $P_e \to \infty$ y se imponía una condición de contorno a la salida como la dada

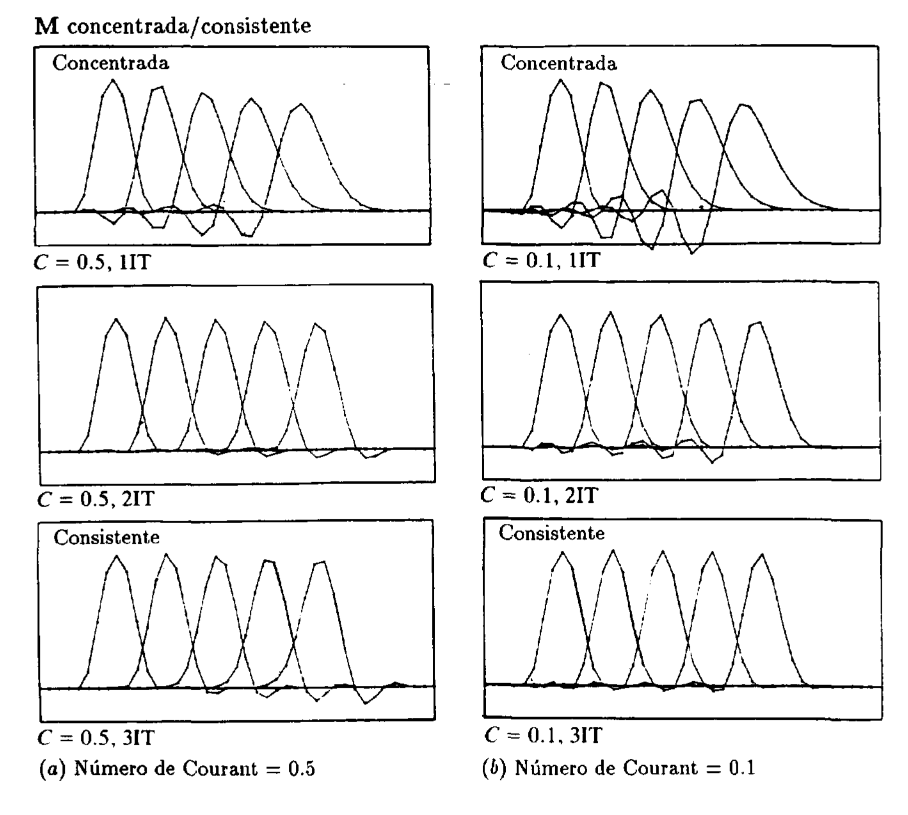


Figura 12.23 Método de Galerkin a lo largo de las líneas características en la solución de la progresión de una onda unidimensional. Efecto de utilizar una matriz de masa concentrada e iteración consistente.

por la Ec. (12.107a). En este caso unidimensional de convección pura sólo puede imponerse una condición de contorno en la entrada; en la salida no es necesario prescribir ninguna condición si A, la velocidad de onda, es positiva.

En problemas multidimensionales de convección pura la misma definición de la onda depende del valor de las componentes normales de A. Así, si

$$A_i n_i \geq 0 \tag{12.108}$$

donde n_i es el vector en dirección normal al contorno, la onda está saliendo del dominio y entonces no se define ninguna condición de contorno. Si el problema tiene algo de difusión, la misma definición de "no condición de

contorno" es equivalente a poner

$$-k\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)=0 \qquad (12.109)$$

en el contorno de salida.

En la Figura 12.24 se muestra, siguiendo el trabajo de Peraire,[47] como la misma onda que se especificaba en el problema de la Figura 12.22 deja limpiamente el dominio en el que se define un campo de velocidad uniforme cuando se impone la condición de contorno correcta.[45,47]

12.13 Aproximaciones de mayor orden en el tiempo y generalización a variables vectoriales

12.13.1 *Introducción.* En todos los apartados precedentes hemos tratado el caso de una variable escalar U y en problemas transitorios hemos considerado una única velocidad de propagación de onda $\mathbf{A}$ para describir el comportamiento de la solución. Sin embargo, en muchas situaciones reales es necesario volver al planteamiento original del problema de la Ec. (12.1) donde $\mathbf{U}$ puede ser una variable vectorial. Se repite aquí la Ec. (12.1)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i}+\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i}+\mathbf{Q}=0 \qquad (12.1)$$

y ésta puede escribirse de forma alternativa como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_i}+\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i}+\mathbf{Q}=0 \qquad (12.110)$$

donde $\mathbf{A}_i$ es una matriz del tamaño correspondiente a las variables en el vector $\mathbf{U}$. Éste es equivalente a la única componente de velocidad convectiva A_i en un problema escalar y viene dada por

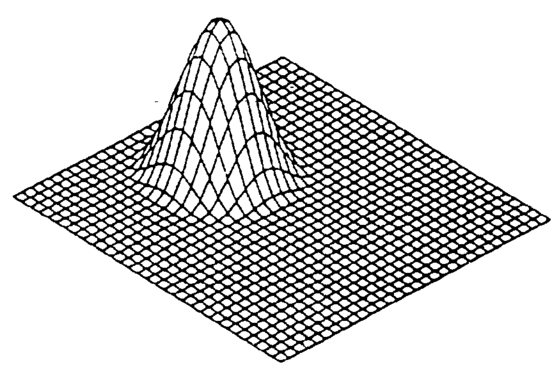
$$\mathbf{A}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}} \qquad (12.111)$$

Esto en general puede ser todavía una función de $\mathbf{U}$, destruyendo así la linealidad del problema.

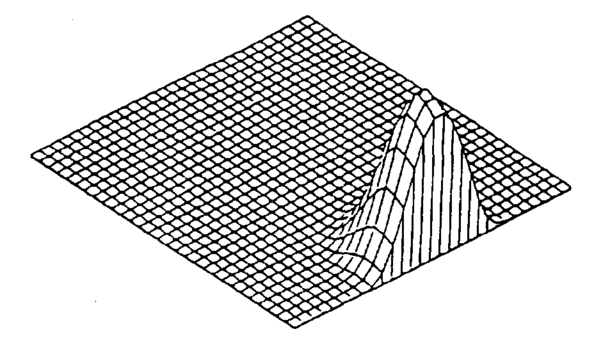
Antes de avanzar más, es interesante discutir el comportamiento general de la Ec. (12.1) en la ausencia de términos de difusión y de fuente. Se advierte que las matrices $\mathbf{A}_i$ pueden representarse por (ver Apéndice 1 del Volumen 1)

$$\mathbf{A}_i=\mathbf{X}_i\mathbf{\Lambda}_i\mathbf{X}_i^{-1} \qquad (12.112)$$

mediante un análisis de autovalores estándar en la que $\mathbf{\Lambda}_i$ es una matriz diagonal.



Configuración inicial



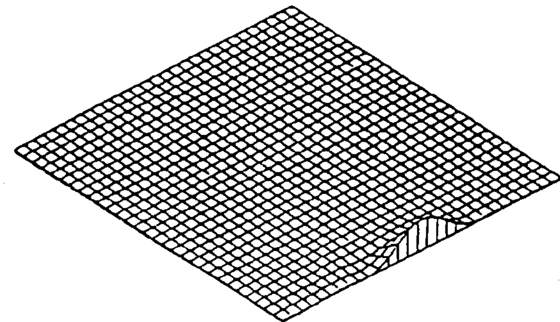


Figura 12.24 Distribución gaussiana transportada en un campo de velocidad constante. La condición de contorno no introduce ninguna reflexión.

Si las matrices $\mathbf{X}_i$ son tales que

$$\mathbf{X}_i=\mathbf{X}_j=\mathbf{X} \qquad (12.113)$$

lo que es siempre el caso en una única dimensión, entonces puede escribirse la Ec. (12.110) (en ausencia de términos de fuente–difusión) como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}_i\mathbf{X}^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = 0 \tag{12.114}$$

Premultiplicando por $\mathbf{X}^{-1}$ e introduciendo nuevas variables (llamadas invariantes de Riemann) tales que

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{U} \tag{12.115}$$

se puede escribir lo anterior como un sistema de ecuaciones desacoplado en las componentes ϕ del vector $\boldsymbol{\phi}$ y las correspondientes Λ del vector $\mathbf{\Lambda}$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Lambda_i\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \tag{12.116}$$

cada una de las cuales representa una ecuación de ondas típica como las que ya se han estudiado previamente. Un ejemplo de lo anterior resulta del problema de elasto-dinámica unidimensional que describe las ondas de tensión en una barra en función de las tensiones (σ) y velocidades (v) como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - E\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

Esto puede escribirse en la forma estándar de la Ec. (12.1) con

$$U = \begin{Bmatrix} \sigma \\ v \end{Bmatrix} \qquad F = \begin{Bmatrix} Ev \\ \sigma/g \end{Bmatrix}$$

Las dos variables de la Ec. (12.115) son ahora

$$\phi_1 = \sigma - cv \qquad \phi_2 = \sigma + cv$$

donde $c = \sqrt{E/\rho}$ y las ecuaciones correspondientes con las (12.116) son

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + c\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - c\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0$$

representando, respectivamente, dos ondas que se mueven con velocidades $\pm c$.

Desgraciadamente la condición de la Ec. (12.113) raramente se cumple y, por consiguiente, la determinación del desacoplamiento descrito no es usualmente posible para más de una dimensión en el espacio. Por esta razón estos procedimientos no son aplicables de forma obvia y hemos de proceder de manera diferente, como se discutirá más tarde en la Sección 12.13.4.[47]

12.13.2 *El método de Taylor-Galerkin.* Donea y colaboradores[48,49] introdujeron un procedimiento muy general que sigue la metodología desarrollada inicialmente por Lax y Wendroff[46]. La base de este método es combinar el desarrollo de alto orden en el tiempo de la variable $\mathbf{U}$ utilizando series de Taylor, con la aplicación de la discretización de elementos finitos estándar de Galerkin introducida sin ninguna consideración de optimación. El esquema resultante de *Taylor-Galerkin* es sencillo y, como demostraremos, recupera las técnicas de Galerkin a lo largo de las líneas características previamente presentadas [ver Ecs. (12.97) y (12.98)] como un caso especial para una variable escalar U.

El procedimiento se basa en las etapas siguientes. En primer lugar, se desarrolla la variable $\mathbf{U}$ de la Ec. (12.1) en serie de Taylor en el tiempo, reteniendo los términos de segundo orden, lo que proporciona en el intervalo Δt

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_n + \frac{\Delta t^2}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right|_{n+\Theta} \tag{12.117}$$

donde Θ es un número tal que $0 \le \Theta \le 1$.

De la Ec. (12.1)

$$\left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right]_n = -\left[\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q}\right]_n \tag{12.118a}$$

y diferenciando

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}\right]_{n+\Theta} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q}\right]_{n+\Theta} \tag{12.118b}$$

La expresión anterior puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mathbf{A}_i\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)\right] \tag{12.118c}$$

y si $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(U, x)$ y $\partial \mathbf{Q}/\partial U = \mathbf{S}$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q}\right) \tag{12.118d}$$

Puede por tanto aproximarse la Ec. (12.117) como

$$\Delta\mathbf{U}^n \equiv \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$$
$$= -\Delta t \left[\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q}\right]_n + \frac{\Delta t^2}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mathbf{A}_i\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)_{n+\Theta}\right\} \tag{12.119}$$

Omitiendo las segundas derivadas de $\mathbf{G}_i$ y aproximando los valores en $n + \Theta$ se obtiene

$$\Delta\mathbf{U}^n \equiv \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$$
$$= -\Delta t \left[\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q}\right]_n - \Delta t\left(\left[\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i}\right]_{n+1}\Theta + \left[\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i}\right]_n (1-\Theta)\right)$$
$$+ \frac{\Delta t^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\mathbf{A}_i\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)\right\} + \mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)\right]_{n+1}\Theta$$
$$+ \frac{\Delta t^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mathbf{A}_i\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)\right\} + \mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)\right]_n (1-\Theta) \tag{12.120}$$

En este momento se aplica una aproximación estándar de Galerkin, lo que conduce a un esquema discreto de integración en el tiempo implícito que es incondicionalmente estable si $\Theta \geq 1/2$. Como la forma explícita tiene un gran interés sólo daremos detalles del proceso de discretización para $\Theta = 0$. Escribiendo como es usual

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{N}\bar{\mathbf{U}}$$

se tiene

$$\left(\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{N}\, d\Omega\right)\Delta\bar{\mathbf{U}}^n = -\Delta t\left[\int_\Omega \mathbf{N}^T\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q}\right)d\Omega\right.$$
$$- \frac{\Delta t}{2}\int_\Omega \mathbf{N}^T\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\mathbf{A}_i\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)\right\}d\Omega$$
$$\left. - \frac{\Delta t}{2}\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)d\Omega\right]_n \tag{12.121}$$

Esta ecuación puede escribirse en forma matricial compacta similar a la Ec. (12.97) como

$$\mathbf{M}\Delta\bar{\mathbf{U}}^n = -\Delta t[(\mathbf{V} + \mathbf{H}_D + \mathbf{H})\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{f}]^n \tag{12.122a}$$

en la cual, denominando

$$\mathbf{G}_i = -k_{ij}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}$$

se obtienen matrices de la forma de la Ec. (12.103), (omitiendo los términos en derivadas terceras y el efecto de $\mathbf{S}$), es decir

$$\mathbf{V} = \int_\Omega \mathbf{N}^T A_i \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\, d\Omega$$
$$\mathbf{H}_D = \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i}\left(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j\frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j}\, d\Omega$$
$$\mathbf{H} = \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} k_{ij}\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j}\, d\Omega \tag{12.122b}$$
$$\mathbf{f} = \int_\Omega \left(\mathbf{N}^T + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i}\right)\mathbf{Q}\, d\Omega + \text{términos de contorno}$$
$$\mathbf{M} = \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{N}\, d\Omega$$

Claramente el algoritmo tiene una forma idéntica a la que se llega con el método de Galerkin a lo largo de las líneas características de la Ec. (12.97) para el caso particular en el que $\mathbf{U}$ sea un escalar, y de nuevo puede observarse la analogía con la ponderación de Petrov-Galerkin.

Es sorprendente que una simple mejora de la aproximación en el tiempo conduce a la expresión de la difusión correcta a lo largo de las líneas de corriente, obtenida previamente por métodos completamente diferentes que, sin embargo, justificaban la utilización de la discretización de Galerkin estándar. Dicha justificación falta en el método presente, pero tiene el mérito de permitir la extensión (con éxito) del mismo a problemas en los que no se dispone de líneas características.

El método de Taylor-Galerkin tiene otras ventajas. Para $\Theta = 1/3$ puede demostrarse que se incrementa el orden de aproximación y es posible disponer de una solución iterativa sencilla.[50] En la Figura 12.20 se muestran los coeficientes de amplitud y celeridad relativa en la solución de una ecuación puramente convectiva utilizando el método de Taylor-Galerkin con $\Theta = 0$ y $\Theta = 1/3$. Se advierte que con la matriz de masa consistente el límite de estabilidad para $\Theta = 1/3$ aumenta hasta $C = 1$.

La utilización de $\Theta = 1/3$ requiere aparentemente una solución implícita. Sin embargo, un esquema iterativo similar al utilizado en la Ec. (12.106) converge rápidamente y puede utilizarse de forma muy económica. En la Figura 12.1 se muestran los excelentes resultados que se obtienen para $\Theta = 1/3$ en la solución de la propagación de una onda gaussiana.

12.13.3 *Métodos predictor-corrector en dos etapas. Técnicas de Taylor-Galerkin de dos pasos.* Existen naturalmente diversos procedimientos alternativos para mejorar la aproximación temporal diferentes del desarrollo de Taylor utilizado en el apartado anterior. Dichos procedimientos serán particularmente útiles si puede evitarse el cálculo de la matriz de derivadas **A**. En este apartado consideraremos dos esquemas de predicción-corrección (del tipo Runge-Kutta) que evitan el cálculo de esta matriz y son explícitos.

El primero empieza con una aproximación en el espacio estándar de Galerkin aplicada a la ecuación básica (12.1). Esto conduce a la expresión

$$\mathbf{M}\frac{d\bar{\mathbf{U}}}{dt} \equiv \mathbf{M}\dot{\bar{\mathbf{U}}} = \mathbf{P}_C + \mathbf{P}_D + \mathbf{f} = \boldsymbol{\psi} \tag{12.123}$$

donde de nuevo **M** es la matriz de masa estándar, **f** son las fuerzas "prescritas" y

$$\mathbf{P}_C(\bar{\mathbf{U}}) = \int_\Omega \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i}\, d\Omega \tag{12.124a}$$

representan las fuerzas "convectivas", mientras que

$$\mathbf{P}_D(\bar{\mathbf{U}}) = \int_\Omega \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i}\, d\Omega \tag{12.124b}$$

son las fuerzas difusivas.

Si se utiliza un esquema de integración temporal explícito, es decir

$$\mathbf{M}\Delta\bar{\mathbf{U}}^n \equiv \mathbf{M}(\bar{\mathbf{U}}^{n+1} - \bar{\mathbf{U}}^n) = \Delta t \boldsymbol{\psi}^n(\bar{\mathbf{U}}^n) \tag{12.125}$$

el cálculo del segundo miembro no involucra ningún producto de matrices y no es necesario evaluar la matriz $\mathbf{A}_i$.

Naturalmente, el esquema presentado no es muy preciso por diversas razones previamente discutidas, y ciertamente se hace *incondicionalmente inestable* en ausencia de vectores de difusión y de fuerzas externas.

El lector puede comprobar fácilmente que en el caso del problema unidimensional, el segundo miembro es equivalente a un esquema de

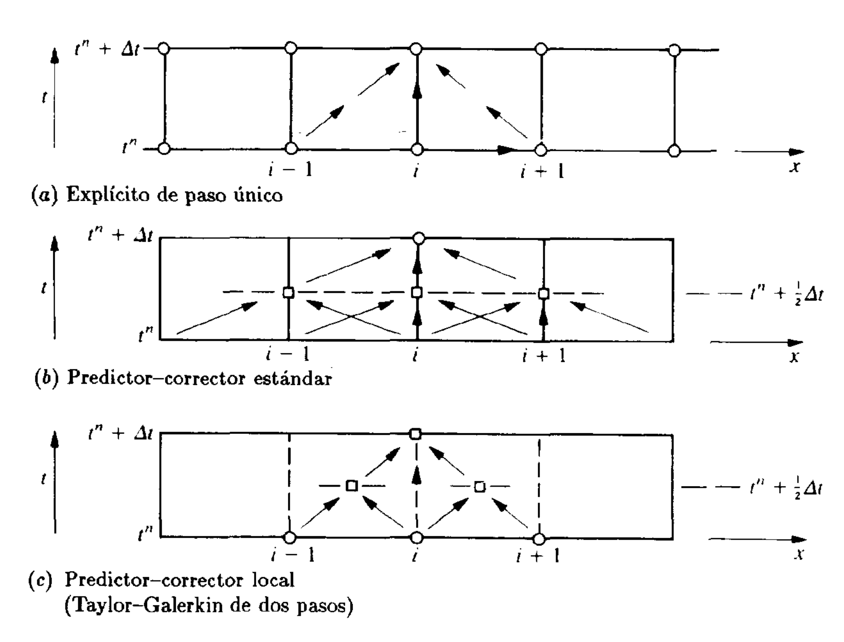


Figura 12.25 Propagación de la información en esquemas explícitos de uno y dos pasos.

diferencias centrales con $\bar{\mathbf{U}}^n_{i-1}$ y $\bar{\mathbf{U}}^n_{i+1}$ utilizados solamente para encontrar el valor de $\mathbf{U}^{n+1}$, como se muestra en la Figura 12.25(a).

Este esquema puede, sin embargo, reformularse como una operación de predicción-corrección en dos pasos, lo que permite recuperar la estabilidad condicional. Ahora se procede como sigue:

Paso 1. Calcular $\bar{\mathbf{U}}^{n+1/2}$ utilizando una aproximación explícita de la Ec. (12.125), o sea

$$\bar{\mathbf{U}}^{n+1/2} = \bar{\mathbf{U}}^n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\psi}^n \tag{12.126}$$

y

Paso 2. Calcular $\bar{\mathbf{U}}^{n+1}$ insertando el valor mejorado de $\bar{\mathbf{U}}^{n+1/2}$ en el segundo miembro de la Ec. (12.125), dando

$$\bar{\mathbf{U}}^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}^n + \Delta t \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\psi}^{n+1/2} \tag{12.127}$$

Esto es exactamente equivalente a aplicar el esquema de Runge-Kutta de segundo orden al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (12.123). La Figura 12.25(b) muestra como la información se "propaga" en un

problema unidimensional, es decir, que ahora $\bar{\mathbf{U}}_i^{n+1}$ dependerá de los valores en los nodos $i-2,\ldots,i+2$.

Se encuentra que este esquema, aunque estable, es sobredifusivo y los resultados numéricos son pobres (ver Figura 12.21).

Existe, sin embargo, una alternativa posible utilizando la técnica de Taylor-Galerkin en dos pasos. Aquí volvemos a la ecuación original (12.1) y procedemos como sigue:

Paso 1. Se encuentra un valor mejorado de $\mathbf{U}^{n+1/2}$ *utilizando sólo los términos convectivos y de fuente.* Así

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{U}^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} + \mathbf{Q}^n\right) \tag{12.128a}$$

lo que permite naturalmente evaluar $\mathbf{F}_i^{n+1/2}$.

Se advierte, sin embargo, que puede escribirse un desarrollo aproximado como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i^{n+1/2} &= \mathbf{F}_i^n + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial t} = \mathbf{F}_i^n - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}_i^n\frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t}\\ &= \mathbf{F}_i^n - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}_i^n\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)^n\end{aligned} \tag{12.128b}$$

o bien

$$\mathbf{A}_i^n\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q}\right)^n = -\frac{2}{\Delta t}(\mathbf{F}_i^{n+1/2} - \mathbf{F}_i^n) \tag{12.128c}$$

Paso 2. Sustituyendo la expresión anterior en la aproximación de Taylor-Galerkin de la Ec. (12.121) se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\Delta\bar{\mathbf{U}}^n = -\Delta t\Bigg[\int_\Omega \mathbf{N}^T\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q}\right)^n d\Omega + \int_\Omega \mathbf{N}^T\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{F}_i^{n+1/2} - \mathbf{F}_i^n)\, d\Omega\\ + \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{S}(\mathbf{F}_i^{n+1/2} - \mathbf{F}_i^n)\, d\Omega\Bigg]\end{aligned} \tag{12.128d}$$

y después de integrar por partes los términos en los que aparecen derivadas con respecto a x_i se obtiene simplemente

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\Delta\bar{\mathbf{U}}^n = -\Delta t\Bigg\{\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i}(\mathbf{F}_i^{n+1/2} + \mathbf{G}_i^n)\, d\Omega + \int_\Omega \mathbf{N}^T[\mathbf{Q} + \mathbf{S}(\mathbf{F}_i^{n+1/2} - \mathbf{F}_i^n)]\, d\Omega\\ + \int_\Gamma \mathbf{N}^T(\mathbf{F}_i^{n+1/2} + \mathbf{G}_i^n)\mathbf{n}_i\, d\Gamma\Bigg\}\end{aligned} \tag{12.129}$$

Se advierte inmediatamente que:

1. La expresión anterior es idéntica a utilizar una *aproximación de Galerkin estándar* en la Ec. (12.1) y una integración explícita con los valores de $\mathbf{F}_i$ actualizados por medio de la sencilla Ec. (12.128a).
2. La forma final de la Ec. (12.129) no requiere la evaluación de las matrices $\mathbf{A}_i$ lo que proporciona ahorros sustanciales en el cálculo, obteniéndose esencialmente los mismos resultados. Ciertamente, en este caso se han tenido en cuenta muchos términos que se omitieron en la obtención de las Ecs. (12.122) y presumiblemente esto debe conducir a una mejora en la precisión.

Debe advertirse un punto adicional de interés práctico:

3. En problemas no lineales es conveniente interpolar $\mathbf{F}_i$ directamente en la forma estándar de elementos finitos por

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{N}\bar{\mathbf{F}}_i$$

lo que es mejor que calcularlo como $\mathbf{F}_i(\bar{\mathbf{U}})$.

Así, la evaluación de $\mathbf{F}_i^{n+1/2}$ necesita sólo efectuarse en los puntos de integración numérica dentro de un elemento, y el cálculo de $\bar{\mathbf{U}}^{n+1/2}$ mediante la Ec. (12.128a) sólo se efectúa en dichos puntos. Para un elemento triangular lineal esto simplifica los cálculos a una única evaluación de $\mathbf{U}^{n+1/2}$ y $\mathbf{F}^{n+1/2}$ en el centro de cada elemento, tomando naturalmente el valor medio de $\mathbf{U}^n$ y $\mathbf{F}^n$ en dicho punto.

En el sencillo ejemplo unidimensional lineal la información progresa en la forma que se muestra en la Figura 12.25c. El esquema que se desarrolló originalmente en Swansea puede llamarse de manera apropiada *el método de dos pasos de Swansea*[41,47,51–55] y ha demostrado ser aplicable con éxito a un amplio rango de problemas, algunos de los cuales se discutirán en los capítulos siguientes.

Se concluye esta sección advirtiendo la situación algo desconcertante en la que diferentes esquemas computacionales propuestos basados en razonamientos diferentes convergen frecuentemente a una única fórmula. Siendo la simplicidad un mérito, al menos en opinión del autor, la obtención más directa es la que tiene un mérito más notorio.

12.13.4 *Condición de contorno de radiación en la ecuación generalizada.* En la Sección 12.12.4 discutimos la cuestión de las condiciones de contorno que pueden imponerse en problemas sencillos lineales con una variable escalar U. Para una variable vectorial $\mathbf{U}$ la naturaleza ondulatoria del problema es menos clara, e incluso si existe puede que nos encontremos con más de una velocidad de onda, como se muestra en la Sección 12.13.1.

El problema de determinar dicha velocidad de onda puede aproximarse en el caso multidimensional, para el que generalmente no es posible diagonalizar el sistema (ver Sección 12.13.1), considerando perturbaciones planas propagándose en dirección normal al contorno. Ahora la determinación de un vector $\mathbf{X}$ y de un único valor propio en la Ec. (12.112) es siempre posible. Así, comenzando con la ecuación general en la que las variables se suponen no dependientes de la dirección tangencial al contorno, se escribe (para la parte convectiva en la dirección de la normal exterior)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial x_n} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_n \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_n} = 0 \tag{12.130}$$

y utilizando las técnicas de las Ecs. (12.112) a (12.116) puede establecerse un conjunto de variables

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{U} \qquad \boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \cdots)^T \tag{12.131}$$

Pudiendo escribirse un sistema de ecuaciones desacopladas como

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = 0 \\ &\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{12.132}$$

Sobre un contorno de radiación abierto la únicas componentes de ϕ_k que pueden prescribirse son las que corresponden a *ondas entrantes*. Este procedimiento es de gran importancia para permitir la radiación libre de ondas y fue utilizado por Peraire[47] y otros en el contexto de las ecuaciones de flujo compresible. Necesita la determinación de valores propios locales y un cambio de variables en el contorno.

12.14 Ondas no lineales y ondas de choque

Los procedimientos desarrollados en las secciones precedentes son disponibles en principio para problemas lineales y no lineales (siendo los procedimientos de integración explícita particularmente eficientes para estos últimos). Generalmente la parte convectiva de la ecuación, es decir

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = 0 \tag{12.133}$$

tendrá la matriz $\mathbf{A}_i$ dependiente de $\mathbf{U}$. Si

$$\mathbf{A}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \tag{12.134}$$

En el caso unidimensional con una variable escalar (por ejemplo, a través de un proceso de descomposición) tendremos ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \equiv \frac{\partial U}{\partial t} + A(U)\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{12.135}$$

que corresponden a ondas que se mueven con una velocidad no uniforme A. Un problema típico dentro de esta categoria es el resuelto por Burger que se define por

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2}\right) = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{12.136}$$

En la Figura 12.26 se muestra cualitativamente cómo las diferentes partes de la onda que se mueven con velocidades proporcionales a sus amplitudes tienden a crear un frente vertical y finalmente una onda de choque. Este comportamiento es típico de muchos sistemas no lineales y en el Capítulo 14 veremos cómo dichas ondas de choque aparecen en problemas de flujo compresible a velocidades transónicas.

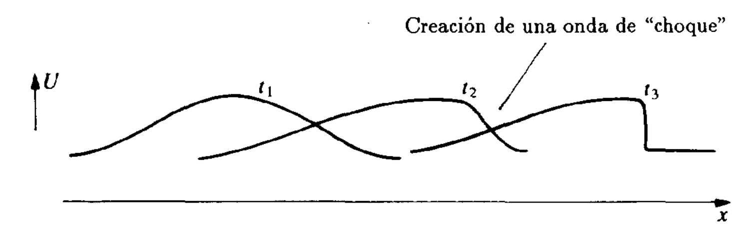


Figura 12.26 Progresión de una onda con velocidad $A = U$.

Para ilustrar la necesidad de que se desarrollen estas ondas de choque, consideremos la propagación de una onda con un perfil originalmente suave mostrada en la Figura 12.27(a). En este caso sabemos que las características a lo largo de las cuales U es constante son las líneas rectas que se muestran en la Figura 12.27(b). Estas líneas muestran diferentes velocidades de propagación y se cortan en el tiempo $t = 2$, momento en el que aparece una onda de choque discontinua. El estado de choque se propaga a una velocidad finita (que aquí es la media de los dos valores extremos).

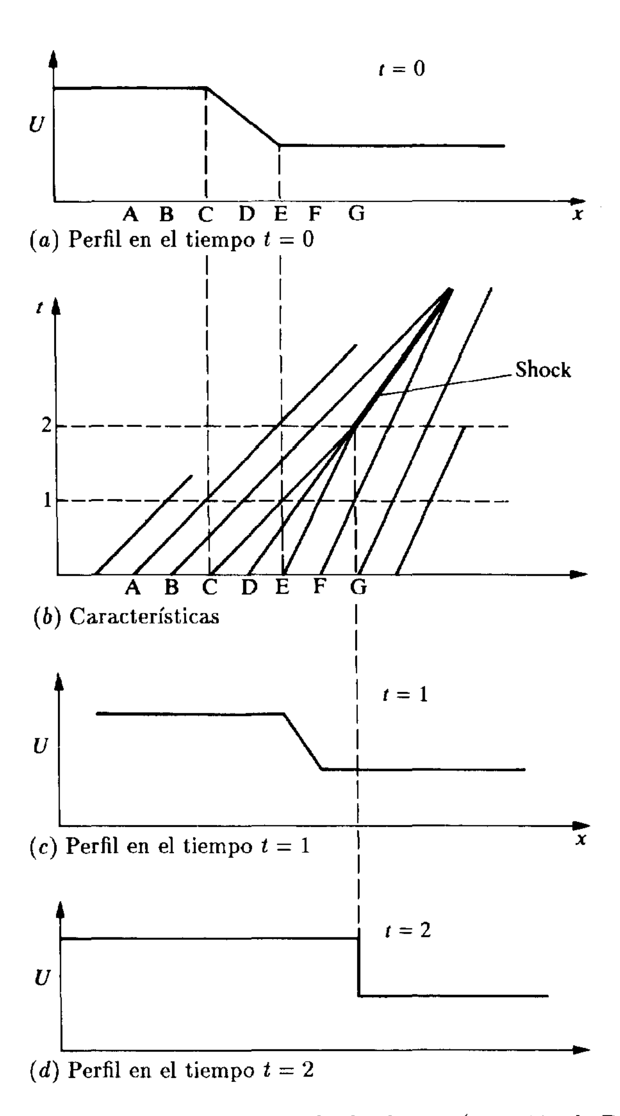


Figura 12.27 Desarrollo de una onda de choque (ecuación de Burger).

En dicha onda de choque la ecuación diferencial no es válida, pero la integral de conservación sí lo es. Podemos así escribir para una pequeña longitud Δs alrededor de la discontinuidad

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta t} U\, ds + F(s+\Delta s) - F(s) = 0 \qquad (12.137)$$

o

$$C\Delta U - \Delta F = 0 \qquad (12.138a)$$

donde $C = \lim \Delta s/\Delta t$ es la velocidad de propagación de la onda de choque y ΔU y ΔF son las discontinuidades en U y F.

La Ec. (12.138a) se conoce como la condición de Rankine-Hugoniot que puede escribirse para el caso general de una función vectorial y varias dimensiones en el espacio como

$$C_1\Delta \mathbf{U} - n_i \Delta \mathbf{F}_j = 0 \qquad (12.138b)$$

para una superficie de discontinuidad con una normal $\mathbf{n}$, moviéndose con una velocidad C_i.

Encontraremos que dichas ondas de choque se desarrollan con frecuencia en el contexto de flujo compresible y flujo en aguas poco profundas (Capítulos 14 y 15) y a menudo pueden existir incluso en presencia de términos difusivos en la ecuación. Es evidente que dichas ondas de choque no son específicas de problemas transitorios y pueden existir en el caso estacionario. Claramente, la aproximación de elementos finitos en la que hemos impuesto una continuidad de clase C_0 para el vector $\mathbf{U}$ puede, en el mejor caso, *alisar* dicha discontinuidad sobre la longitud de un elemento, y generalmente surgirán oscilaciones cerca de dicha discontinuidad cuando se utilizan los mejores algoritmos de las secciones precedentes.

La Figura 12.28 ilustra las dificultades que ocurren incluso en problemas lineales para modelar dichas ondas con un frente casi vertical, en los que la disipación física que contienen las ecuaciones es incapaz de alisar la solución razonablemente. Para superar este problema se utiliza frecuentemente una difusión artificial que debe tener las siguientes características:

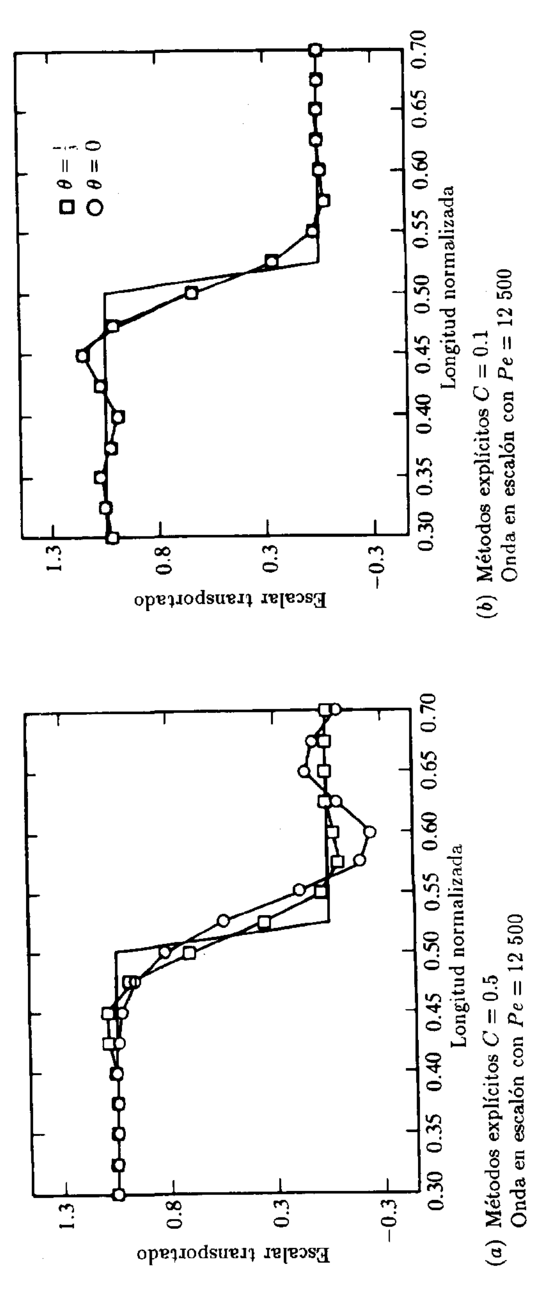
1. Debe ser nula al tender el tamaño del elemento a cero.
2. No debe afectar sustancialmente la forma del dominio donde la solución es suave.

Una difusión típica utilizada con frecuencia es la versión para elementos finitos de la introducida por Lapidus[56] para diferencias finitas, pero se han propuesto muchas otras formas de alisado local en la literatura.[57,59] La difusión artificial es de la forma

$$\tilde{k} = C_{Lap} h^2 \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| \qquad (12.139)$$

donde el último término proporciona el gradiente máximo.

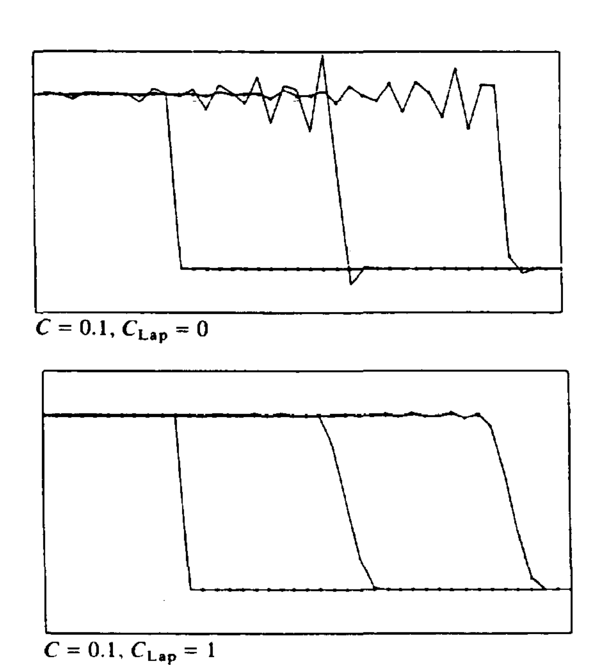
En la Figura 12.29 se muestra un problema de propagación discontinua de la ecuación de Burger y cómo un aumento progresivo del coeficiente



(*a*) Métodos explícitos $C = 0.5$
Onda en escalón con $Pe = 12\,500$

(*b*) Métodos explícitos $C = 0.1$
Onda en escalón con $Pe = 12\,500$

Figura 12.28 Propagación de una onda con un frente casi vertical mediante técnicas de Taylor-Galerkin.



$C = 0.1,\ C_{\mathrm{Lap}} = 0$

$C = 0.1,\ C_{\mathrm{Lap}} = 1$

Figura 12.29 Propagación de un frente casi vertical en la ecuación de Burger. Solución obtenida utilizando diferentes valores del coeficiente de Lapidus $C_v = C_{Lap}$.

C_{Lap} elimina la oscilación espúrea, pero a expensas de redondear la pendiente del frente onda.

Para un problema multidimensional en el que U es una variable vectorial puede introducirse un grado de anisotropía y una posible expresión generalizada de la Ec. (12.139) es

$$\tilde{k}_{ij} = C_{Lap} h^2 \frac{|V_i V_j|}{|V|} \tag{12.140}$$

donde

$$V_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{1/2}$$

Existen otras muchas posibilidades abiertas y actualmente se están desarrollando numerosos trabajos sobre el tema de "captura de ondas de choque". Volveremos a estos problemas en el Capítulo 14 donde veremos que son de una gran importancia en el contexto de flujo de gases a alta velocidad.

12.15 Sumario y comentarios finales

El lector puede estar confundido por la variedad de procedimientos aparentemente no relacionados entre sí que se han tratado en este capítulo. Esto es en cierta manera normal por el hecho de que:

a) La optimación que garantizan los procedimientos de elementos finitos en problemas elípticos no se transfiere automáticamente a problemas hiperbólicos.
b) Los problemas tratados están todavía bajo continuos desarrollos de investigación, estimulados por las necesidades prácticas de campos tan importantes como la aeronáutica, la meteorología, etc.

En aplicaciones estacionarias con una variable escalar la situación está razonablemente clara. El procedimiento original de Petrov-Galerkin desarrollado de manera algo heurística, con un "parámetro libre" determinado *a posteriori* para obtener una solución exacta en un caso sencillo, es equivalente al problema autoadjunto óptimo que surge de las ecuaciones originales. Ciertamente lo mismo puede decirse de la combinación de Galerkin con mínimos cuadrados, que de nuevo contiene un parámetro libre y, sorprendentemente, proporciona una aproximación idéntica.

Como todas las variantes de estos métodos convergen al final a una aproximación idéntica en el caso de la variable escalar, la selección del método de origen es irrelevante y, en definitiva, depende de las preferencias de cada usuario.

La extensión de estos procedimientos a sistemas de ecuaciones, es decir, cuando $\mathbf{U}$ es una variable vectorial no es, sin embargo, trivial. Generalmente se utiliza "la analogía" más que la lógica puramente deductiva. Se encontrará ahora, no obstante, que aquí los métodos de Petrov-Galerkin ya no son idénticos que los de mínimos cuadrados de Galerkin (siendo el comportamiento de los primeros algo mejor).

En situaciones transitorias la perspectiva es incluso más compleja y confusa. Aquí deberiamos buscar métodos que:

a) mejoren en precisión cuando el incremento de tiempo Δt disminuye y
b) que converjan a la aproximación estacionaria correcta cuando el estado transitorio finaliza (permitiendo así una solución iterativa).

Solamente dos de los procedimientos presentados satisfacen ambos requisitos para todos los valores de Δt. El primero es la sencilla discretización en el espacio de Petrov-Galerkin de la Sección 12.10. El segundo, la aplicación espacio-tiempo de los métodos de Petrov-Galerkin sugerida por Johnson *et al.*[22] y apuntada en la Sección 12.12. Sin embargo, ninguno de estos esquemas puede utilizarse en un modo explícito simple necesario para grandes sistemas de ecuaciones, ni tampoco cuando el cálculo de la solución transitoria es únicamente un artificio para obtener la solución estacionaria de manera iterativa.

¿Qué otras alternativas existen? Aquí la analogía del esquema de Taylor-Galerkin con los métodos de líneas características y su excelente comportamiento en el tiempo para cálculos transitorios (ver Sección 12.13) lo convierte en una técnica recomendable para análisis transitorios, especialmente debido a que los métodos explícitos (o casi explícitos[50]) funcionan de manera eficiente. Sin embargo, sólo converge a la solución estacionaria de manera estable y precisa si el número de Courant C es aproximadamente la unidad en cada elemento, debiendo cumplirse que [ver Ec. (12.102)]

$$\Delta t \approx \frac{h}{|A|} = \Delta t_{crit} \tag{12.141}$$

para problemas puramente convectivos. Ciertamente, como hemos mostrado esta condición reproduce el procedimiento de Petrov-Galerkin.

Lo mismo es cierto para la aproximación de mínimos cuadrados espacio-tiempo de la Sección 12.12, pero aquí la formulación explícita no es aplicable (aunque tiene otras ventajas).

¿Qué consejo puede darse a los usuarios del MEF? Adoptando una posición pragmática hacemos las siguientes sugerencias:

1. Si el problema es *realmente transitorio* se recomienda el procedimiento de Taylor-Galerkin, haciendo el número de Courant tan próximo a la unidad como sea posible en el menor elemento del dominio –y ocasionalmente desdoblando el dominio en diferentes partes en las que se utilizan diferentes Δt (para evitar las oscilaciones inherentes a la utilización de números de Courant muy pequeños)–.[60,61]
2. Si la solución trasitoria se utiliza como un artilugio para obtener el estado estacionario, entonces se escoge para cada elemento un valor local de $\Delta t = \Delta t_{crit}$ para asegurar que cuando éste se alcance la solución coincida tan cerca como sea posible con la forma de Petrov-Galerkin óptima. Este Δt_{crit} se utiliza para calcular matrices como la $\mathbf{H}_D$ de la Ec. (12.98c) en el esquema de Galerkin a lo largo de las líneas características [o (12.103b) en el esquema de Taylor-Galerkin]. Sin embargo, el valor de Δt fuera de los términos entre corchetes de la Ec. (12.97) se mantiene igual al requerido para la estabilidad general de los cálculos.

Naturalmente, el procedimieno arriba descrito permitirá utilizar cualquiera de los procedimientos implícitos estudiados en un modo iterativo, siempre que exista una forma estacionaria "contracorriente" correcta.[62]

La base lógica del procedimiento de Galerkin a lo largo de las líneas características proporciona la técnica óptima para el problema con una

variable escalar. Es también aplicable a variables vectoriales siempre que sólo intervenga una sola clase de propagación de ondas y no es fácilmente extendible al caso general cuando existen diversas velocidades de propagación de ondas. En dichos casos no es posible llegar a la expresión de los términos de amortiguamiento contracorriente necesarios para una solución estacionaria precisa. Por esta razón, es conveniente utilizar procedimientos de descomposición del operador en los que se tratan de manera separada los efectos de las ondas con diferente velocidad.[63] Sobre este tema se está desarrollando una importante actividad investigadora.

Referencias

1. A.N. BROOKS y T.J.R. HUGHES, "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier Stokes equation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **32**, 199–259, 1982.
2. R. COURANT, E. ISAACSON y M. REES, "On the solution of non-linear hyperbolic differential equations by finite differences", *Comm. Pure Appl. Math.*, **V**, 243–55, 1952.
3. A.K. RUNCHALL y M. WOLFSTEIN. "Numerical integration procedure for the steady state Navier Stokes equations", *J. Mech. Eng. Sci.*, **11**, 445–53, 1969.
4. D.B. SPALDING, "A novel finite difference formulation for diferential equations involving both first and second derivatives", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **4**, 551–9, 1972.
5. K.E. BARRETT, "The numerical solution of singular perturbation boundary value problem", *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **27**, 57–68, 1974.
6. O.C. ZIENKIEWICZ, R.H. GALLAGHER y P. HOOD, "Newtonian and non-Newtonian viscous incompressible flow. Temperature induced flows and finite element solutions", en *The mathematics of Finite Elements and Aplications* (ed. J. Whiteman), Vol II, Academic Press, London, 1976 (Brunel University, 1975).
7. I. CHRISTIE, D.F. GRIFFITHS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 1389–96, 1976.
8. O.C. ZIENKIEWICZ, J.C. HEINRICH, P.S. HUYAKORN y A.R. MITCHEL, "An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 131–44, 1977.
9. J.C. HEINRICH y O.C. ZIENKIEWICZ, "Quadratic finite element schemes for two dimensional convective-transport problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 1831–44, 1977.
10. D.E. KELLY, S. NAKAZAWA y O.C. ZIENKIEWCZ, "A note on

anisotropic balancing dissipation in the finite method approximation to convective diffusion problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **15**, 1705–11, 1980.
11. B.P. LEONARD, "A survey of finite differences of opinion on numerical mudding of the incomprehensible defective confusion equation", en *Finite Elements for Convection Dominated Flows*, (ed. T.R.J. Hughes), AMD Vol. **34**, ASME, 1979.
12. G.L. GUYMON, V.H. SCOTT y L.R. HERRMANN, "A general numerical solution of the two dimensional diffusion-convection equation by the finite element method", *Wat. Reso. Res.*, **6**, 1611-17, 1970.
13. T.J.R. HUGHES y J.D. ATKINSON, "A variational basis of upwind finite elements", en *Variational Methods in the Mechanics of Solids* (ed. S. Nemat-Nasser), pp. 387–91, Pergamon Press, Oxford 1980.
14. G.F. CAREY, "Exponential upwinding and integrating factors for symmetrization", *Comm Appl. Num. Meth.*, **1**, 57–60, 1985.
15. S.R. IDELSOHN, "Upwind techniques via variational principles", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 769–84, 1989.
16. P.A.B. DE SAMPAIO, "A Petrov-Galerkin modified operator formulation for convection diffusion problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*.
17. T.J.R. HUGHES, L.P. FRANCA, G.M. HULBERT, Z.JOHAN y F.SAKHIB, "The Galerkin least square methods for advective diffusion equations", en *Recent Developments in Computational Fluid mechanics* (eds T.E. Tezduyar y T.J.R. hughes), AMD95, ASME, 1988.
18. J. DONEA, T. BELYTSCHKO y P. SMOLINSKI, "A generalized Galerkin method for steady state convection-diffusion problems with applications to quadratic shape function", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **48**, 25–43, 1985.
19. S. NAKASAWA, J.F. PITTMAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Numerical solution of flow and heat tranfer in polymer melts", en *Finite Elements in Fluids*, (eds. R.H. Gallagher *et al.*), Vol 4, cap. 13, pp. 251–83, Wiley, Chichester, 1982.
20. T.J.R. HUGHES y A. BROOKS, "A multi-dimensional upwind scheme with no cross wind diffusion", en *Finite Elements for Convection Dominated Flows* (ed T.J.R Hughes), AMD 34, ASME, 1979.
21. T.J.R. HUGHES y A.N. BROOKS, "A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuos weighting function", en *Finite Elements in Fluids*, (eds R.H Gallagher *et al.*), Vol 4, pp. 47–65, Wiley, Chichester, 1982.
22. C.JOHNSON, V. NÄVERT y J. PITKÄRANTA, "Finite element methods for linear, hyperbolic problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **45**, 285–312, 1984.
23. P.A.B. DE DAMPAIO, "A modified operator analysis of convection

diffusion problems', en *Proc. II National Meeting on Thermal Sciences*, Aguas de Lindoia, (Brazil), pp. 180-3, 1988.
24. N. NGUEN y J. REYNEN, "A space-time least square finite elements scheme for advection-diffusion equations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **42**, 331-42, 1984.
25. G.F. CAREY y B.N. JIANG, "Least square finite elements for first order hyperbolic systems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*,**26**, 81–93, 1988.
26. B.N. JIANG y G.F. CAREY, "A stable least-square finite element method for non-linear hyperbolic problems", *Int. J. Num. Meth. fluids*, **8**, 933–42, 1988.
27. C. JOHNSON, "Streamline diffusion methods for problems in fluid mechanics", en *Finite Elements in Fluids* (eds R.H. Gallagher *et al.*), Vol. 6, pp. 251-61, Wiley, Chichester, 1986.
28. C. JOHNSON, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Methods*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
29. C.C. YU y J.C HEINRICH, "Petrov-Galerkin methods for the time dependent convective transport equation", *Int. J. Num Meth. Rng.*, **23**, 883–901. 1986.
30. C.C YU y J.C. HEINRICH, "Petrov-Galerkin method for multidimensional, time dependent convective diffusion equations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, 2201-15, 1987.
31. R.A. ADEY y C.A. BREBBIA, "Finite element solution of effluent dispersion", en *Num. Meth. in Fluid Mech.*, (eds C.A. Brebbia y J.J. Connor), pp. 325–54, Pentech Press, Southamptom, 1974.
32. K.W. MORTON, "Generalised Galerkin methods for hyperbolic problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **52**, 847–71, 1985.
33. R.E. EWING y T.F. RUSSELL, "Multistep Galerkin methods along characteristics for convection-diffusion problems", en *Advances in Computational Methods for PDES*, (eds R. Vinchnevetsky y R.S. Stepleman), Vol. IV, IMACS, pp. 28–36, Rutgers university, Brunswick, N.J., 1981.
34. J. DOUGLAS, Jr. T.F. RUSSELL, "Numerical methods for convection dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures", *SIAM J. Num. Anal.*, **19**, 871–85, 1982.
35. O. PIRONNEAU, "On the transport diffusion algorithm and its application to the Navier Stokes equation", *Num Math.*, **38**, 309–32. 1982.
36. M. BERCOVIER, O. PIRONNEAU, Y. HARBANI y E. LIVNE, "Characteristics and finite element methods applied to equations of fluids", en *The Mathematics of Finite Elements and Appl.* (ed J.R. Wahiteman), Vol. V. pp. 471–8, Academic Press, London, 1982.

37. J. GOUSSEBAILE, F. HECHT, C. LABADIE y L. REINHART, "Finite element solution of the shallow water equations by a quasi-direct decomposition procedure", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **4**, 1117-36, 1984.
38. M. BERCOVIER , O. PIRONNEAU y V. SASTRI, "Finite elements and characteristics for some parabolic-hyperbolic problems", *Appl. Math. Modelling*, **7**, 89–96, 1983.
39. J.P. BENQUE, J.P. GREGOIRE, A. HAUGUEL y M. MAXANT, "Application des methodes du decomposition aux calculs numeriques en hydraulique industrielle", en *INRIA 6th Coll. Int. Methodes de Calcul Sci. et Tech.*, Versailles, 12–16 Dec., 1983.
40. A. BERMUDEZ, J. DURANY, M. POSSE y C. VAZQUEZ, "An upwind method for solving transport-diffusion reaction systems", *Int. J. Num. Meth Eng.*, **28**, 2021–40, 1984.
41. O.C. ZIENKIEWICZ, R. LÖHNER, K. MORGAN y S. NAKAZAWA, "Finite elements in fluid mechanics—a decade of progress", en *Finite elements in fluids* (eds R.H. Gallagher *et al.*), Vol. 5 cap. 1, pp. 1–26, Wiley Chichester, 1984.
42. R. LÖHNER, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **4**, 1043–63, 1984.
43. O.C. ZIENKIEWICZ, R. LÖHNER, K.. MORGAN y J. PERAIRE, "High speed compressible flow and other advection dominated problems of fluid mechanics", en *Finite Elements in Fluids* (eds R.H. Gallagher *et al.*) Vol. 6, cap. 2, pp. 41–88, Wiley, Chichester, 1986.
44. R. LÖHNER, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ. "An adaptive finite element procedure for compressible high speed flows", *Comp, Meth. Appl. Mech. Eng.*, **51**, 441–65, 1985.
45. O.C. ZIENKIEWICZ, R. LÖHNER y K. MORGAN, "High speed inviscid compressive flow by the finite element method", en *The Mathematics of Finite Elements and Apllications* (ed. J.R. Whiteman), Vol. VI, p. 1–25, Academic Press, London, 1985.
46. P.D. LAX y B. WENDROFF, "Systems of conservative laws", *Comm. Pure Appl. Math.*, **13**, 217–37, 1960.
47. J. PERAIRE, "A finite element method for convection dominated flows", Ph.D. tesis, University of Wales, Swansea, 1986.
48. J. DONEA, "A Taylor-Galerkin method for convective transport problems", *Int.. J. Num. Mrh Eng.*, **20**, 101–19, 1984.
49. V. SELMIN, J. DONEA y L. QUATRAPELLE, "Finite element methods for non-linear advection", *Comp. Meth. Appl. Mech.*, **52**, 817–45, 1985.
50. L. BOTTURA y O.C. ZINEKIEWICZ, "Experiments on iterative so-

lution of the semi-implicit characteristic Galerkin algorithm", *Comm. Appl. Num. Meth.*, **6**, 387–93, 1990.
51. R. LÖHNER, K. MORGAN, J. PERAIRE, O.C. ZIENKIEWICZ y L. KONG, "Finite element methods for compressible flow", en *Numerical Methods in Fluid Dynamics* (eds K.W. Morton y M.J. Baines), Vol. II, pp. 27–52, Clarendon Press, Oxford, 1986.
52. J. PERAIRE, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Convection dominated problems", en *Numerical Methods for Compressible Flows-Finite Difference Element and Volume Techniques*, AMD 78, pp. 129–47, ASME, 1987.
53. O.C. ZIENKIEWICZ, J.Z. ZHU, Y.C. LIU, K. MORGAN y J. PERAIRE, "Error estimates and adaptivity. From elasticity to high speed compressible flow", en *The Mathematics of Finite Elements and Appl.* (ed. J.R. wWhiteman), Vol II, Academic Press, London, 1988.
54. J. PERAIRE, J. PEIRO, L. FORMAGGIA, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Finite elemet Euler computations in three dimensions", *AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting*, paper AIAA-87-0032, Reno, USA, January, 1988,
55. J. PERAIRE, J. PEIRO, L. FORMAGGIA, K. MORGAN and O.C. ZIENKIEWICZ, "Finite element Euler computations in 3-D", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **26**, 2135–59, 1988.
56. A. LAPIDUS, "A detached shock calculation by second order finite differences", *J. Comp. Phys.*, **2**, 154–77, 1967.
57. J.P. BORIS y D.L. BROOK, "Flux corrected transport I Shasta = a fluid transport algorithm that works", *J. Comp. Phys.*, **11**, 38–69, 1973.
58. R. LÖHNER, K. MORGAN, J. PERAIRE y M. VAHDATI, "Finite element, flux corrected transport (FEM-FCT) for the Euler and Navier-Stokes equations", *Int. J. Num. Meth Fluids,*, **7**, 1093-109, 1987.
59. S.T. ZALESIAK, "Fully multidimensional flux corrected transport algorithm for fluids", *J. Comp. Phys.*, **31**, 335–62, 1979.
60. R. LÖHNER, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "The use of domain splitting with an explicit hyperbolic solver", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **45**, 313–29, 1984.
61. R. LÖHNER y K. MORGAN, "An unstructured multigrid method for elliptic problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, 101–15, 1987.
62. J.L. SOHN y J.C. HEINRICH, "A Poisson equation fomulation for pressure calculations in penalty finite element models for viscous incompressible flows", *Int. J. Num. Meth Eng.*, **30**, 349-61, 1990.
63. O.C. ZIENKIEWICZ, "Explicit (or semiexplicit) general algorithm for compressible and incompressible flows with equal finite element interpolation", Report 90.5, Chalmers Tech. Univ., Gothenborg, 1990.

Capítulo 13

MECÁNICA DE FLUIDOS –ECUACIONES BÁSICAS PARA FLUIDOS INCOMPRESIBLES; FLUJOS VISCOSOS NEWTONIANOS Y NO NEWTONIANOS–

13.1 Introducción

La aplicación del Método de los Elementos Finitos a problemas de mecánica de fluidos data del comienzo de la década de los 70.[1–12] Sin embargo, el éxito inicial en la utilización de esta metodología estaba restringido a fluidos en los que, o bien dominaba la viscosidad, o a problemas sin viscosidad (en los cuales se utilizaba una formulación potencial). La extensión a problemas en los que la convección era importante, por ej., en fluidos con alto número de Reynolds o en fluidos compresibles, tuvo que esperar a que avanzara la tecnología de elementos finitos hasta llegar al nivel que se ha discutido en el capítulo precedente. Hoy en día parece que las técnicas de elementos finitos están disponibles para todos los problemas de mecánica de fluidos y además han demostrado su eficacia frente a los métodos alternativos de diferencias finitas y de volúmenes finitos.[13,14] Por consiguiente, comenzaremos este capítulo con una versión completa de las ecuaciones diferenciales aplicables a flujos viscosos compresibles, y tras ello trataremos varios casos particulares. El resto del capítulo estará dedicado al caso de flujos *incompresibles*, o *casi-incompresibles*, en los cuales frecuentemente los términos convectivos son despreciables y pueden utilizarse procedimientos de discretización estándar. La introducción de métodos de Petrov-Galerkin sólo se indicará en la Sección 13.7 al tratar con flujos viscosos de alto número de Reynolds.

La consideración de flujos compresibles con altas velocidades y de problemas de aguas poco profundas con términos convectivos se aplaza a los Capítulos 14 y 15. Sin embargo, las ecuaciones básicas que se presentan aquí continuarán siendo los principios esenciales para el análisis.

13.2 Ecuaciones fundamentales de mécanica de fluidos

13.2.1 *Tensiones en fluidos.* La característica escencial de un fluido es su incapacidad de resistir tensiones tangenciales en reposo. En este caso sólo son posibles "tensiones" hidrostáticas, o la presión equivalente. Cualquier análisis debe, por tanto, concentrarse en el movimiento, y la variable independiente esencial es la velocidad **u** o, si se adopta la notación indicial (con los ejes xyz referidos como $x_i, i = 1, 2, 3$),

$$u_i \tag{13.1}$$

Ésta reemplaza la variable de desplazamientos que era de importancia fundamental en mecánica de sólidos.

Las velocidades de deformación son, por consiguiente, la primera causa de las tensiones σ_{ij} y se definen de manera análoga a las de una deformación infinitesimal como

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i}{2} \equiv \mathbf{Su} \tag{13.2}$$

donde **S** es el mismo operador que se introdujo en mecánica de sólidos para definir la deformación.

Las relaciones entre tensiones y deformaciones para un fluido isotrópico lineal (newtoniano) requieren la definición de dos constantes.

La primera de ellas relaciona las *tensiones desviadoras* τ_{ij} con *las velocidades de deformación desviadoras*:

$$\tau_{ij} \equiv \frac{\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{ii}}{3} = 2\mu\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{ij} - \delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ii}}{3}\right) \tag{13.3}$$

donde δ_{ij} es el delta de Kroneker y los índices repetidos significan suma; así

$$\sigma_{ii} \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad \text{y} \quad \dot{\varepsilon}_{ii} = \dot{\varepsilon}_{ii} = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} \tag{13.4}$$

El coeficiente ν se conoce como viscosidad de corte o simplemente viscosidad y es análogo al módulo de rigidez cortante G en elasticidad lineal.

La segunda relación es entre los cambios en la tensión media y la velocidad de deformación volumétrica. Esto define la presión como

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = -\kappa\dot{\varepsilon}_{ii} + p_0 \tag{13.5}$$

donde κ es un coeficiente de *viscosidad volumétrico* análogo al módulo de rigidez volumétrico K en elasticidad lineal, p_0 es la presión hidrostática inicial independiente de la velocidad de deformación (nótese que p y p_0 se definen positivas cuando son de compresión).

Inmediatamente podemos escribir la relación "constitutiva" para fluidos de las Ecs. (13.3) y (13.4) como

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ii}}{3}\right) + \delta_{ij}\kappa\dot{\varepsilon}_{ii} - \delta_{ij}p_0 \\ &= \tau_{ij} - \delta_{ij}p \end{aligned} \tag{13.6a}$$

o

$$\sigma_{ij} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}(\kappa - \frac{2}{3}\mu)\dot{\varepsilon}_{ii} + \delta_{ij}p_0 \tag{13.6b}$$

Tradicionalmente se utiliza la notación de Lamé haciendo

$$\kappa - \frac{2}{3}\mu \equiv \lambda \tag{13.7}$$

pero esto es poco recomendable y es más básica la relación (13.6a). Existe poca evidencia de la existencia de viscosidad volumétrica y tomaremos

$$\kappa\dot{\varepsilon}_{ii} \equiv 0 \tag{13.8}$$

lo que proporciona la relación constitutiva escencial como (prescindiendo ahora del subíndice en p_0)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ii}}{3}\right) - \delta_{ij}p \;\equiv\; \tau_{ij} - \delta_{ij}p \tag{13.9a}$$

sin necesariamente implicar que el fluido es incompresible ($\varepsilon_{ii} = 0$).

En lo anterior,

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\varepsilon_{ii}}{3}\right) = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij}\frac{2}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right] \tag{13.9b}$$

Todas las relaciones anteriores son análogas a las de la elasticidad, como destacaremos de nuevo más tarde para flujo incompresible.

La no linealidad de algunos fluidos se observa en el hecho de que el coeficiente μ depende de la velocidad de deformación. Dichos fluidos se denominarán "no–newtonianos".

13.2.2 *Conservación de masa.* Si ρ es la densidad del fluido entonces el equilibrio de masa ρu_i entrando y saliendo de un volumen unidad requiere que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla^T(\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{13.10a}$$

o en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \qquad (13.10b)$$

13.2.3 *Conservación de movimiento –o equilibrio dinámico–*. El momento cinético en la dirección j, esto es, $(\rho u_j)u_i$ saliendo y entrando de un volumen de control, tiene que estar en equilibrio con las tensiones σ_{ij} y las fuerzas de masa ρf_j. Esto conduce a una típica ecuación para cada componente como

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}[(\rho u_j)u_i] - \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}) - \rho f_j = 0 \qquad (13.11)$$

o utilizando (13.9a) y (13.9b),

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}[(\rho u_j)u_i] - \frac{\partial(\tau_{ij})}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho f_j = 0 \qquad (13.12a)$$

De nuevo lo anterior puede escribirse como tres ecuaciones en forma cartesiana:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) \\ &\qquad - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x = 0 \end{aligned} \qquad (13.12b)$$

etc.

13.2.4 *Conservación de la energía y ecuación de estado.* Se advierte que en las ecuaciones de las Secciones 13.2.2 y 13.2.3 las variables independientes son u_i (la velocidad), p (la presión) y ρ (la densidad). Las tensiones se definieron por la Ec. (13.9) en términos de velocidades y, por consiguiente, no son independientes.

Obviamente hay una variable de más para que el sistema de ecuaciones resultante pueda resolverse. Sin embargo, si se supone que la densidad es constante (como en fluidos incompresibles), o si puede establecerse una única relación entre la presión y la densidad (como en flujos isotérmicos con pequeña compresibilidad), el sistema se completa y, por tanto, es resoluble.

En general, la presión (p), la densidad (ρ) y la temperatura (T) están relacionadas entre sí por una ecuación de estado de la forma

$$\rho = \rho(p, T) \qquad (13.13)$$

Para un caso ideal ésta toma, por ejemplo, la expresión

$$\rho = \frac{p}{RT} \qquad (13.14)$$

donde R es la constante universal de los gases.

En dicho caso general, es necesario complementar el sistema de ecuaciones original por la ecuación de *conservación de la energía* . Esta ecuación es ciertamente de interés incluso si no está acoplada, ya que proporciona información original acerca del comportamiento del sistema.

Antes de proceder con la obtención de la ecuación de conservación de la energía debemos definir algunas cantidades adicionales. Así, se introduce la *energía intrínseca* por unidad de masa e. Ésta es dependiente del estado del fluido, esto es, de su presión y temperatura, o sea

$$e = e(T, p) \qquad (13.15)$$

La energía total por unidad de masa, E, incluye naturalmente la energía cinética por unidad de masa y por tanto

$$E = e + \frac{u_i u_i}{2} \qquad (13.16)$$

Finalmente, se puede definir la *entalpía* como

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad \text{o} \quad H = h + \frac{u_i u_i}{2} = E + \frac{p}{\rho} \qquad (13.17)$$

encontrándose que todas estas variables son muy convenientes.[13]

La transferencia de energía puede tener lugar por convección y por conducción. El flujo de calor conductivo q_i se define como

$$q_i = -k\frac{\partial}{\partial x_i}T \qquad (13.18)$$

donde k es un coeficiente de conducción de calor isótropo.

Para completar las ecuaciones es necesario determinar los términos de fuente de calor. Éstos se definen por unidad de volumen como q_H y pueden ser debidos, por ejemplo, a una reacción química (si existiera). Dichos términos deben incluir la disipación debida a las tensiones internas, esto es, utilizando la Ec. (13.9),

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}u_j) = \frac{\partial}{x_i}(\tau_{ij}u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(pu_j) \qquad (13.19)$$

El balance de energía en un volumen unidad puede escribirse ahora como

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i E)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}(pu_i)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ji}u_i)-\rho f_i u_i-q_H=0 \qquad (13.20a)$$

o simplemente

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i H)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ji}u_i)-\rho f_i u_i-q_H=0 \qquad (13.20b)$$

Donde el penúltimo término representa el trabajo efectuado por las fuerzas másicas.

13.2.5 *Ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes.* Las ecuaciones básicas obtenidas en los apartados precedentes pueden escribirse en la forma general conservativa que se ha introducido en el Capítulo 12 [ver Ec. (12.1)], esto es

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\nabla\mathbf{F}+\nabla\mathbf{G}+\mathbf{Q}=0 \qquad (13.21a)$$

o

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i}+\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i}+\mathbf{Q}=0 \qquad (13.21b)$$

en la cual las Ecs. (13.10), (13.12) o (13.20) proporcionan las expresiones de cada uno de los vectores anteriores.

Así, el vector de incógnitas independientes es, utilizando notaciones indicial y cartesiana,

$$\mathbf{U}=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u_1\\ \rho u_2\\ \rho u_3\\ \rho E\end{Bmatrix} \quad \text{o,} \quad \mathbf{U}=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ \rho E\end{Bmatrix} \qquad (13.22a)$$

$$\mathbf{F}_i=\begin{Bmatrix}\rho u_i\\ \rho u_1 u_i+p\delta_{1i}\\ \rho u_2 u_i+p\delta_{2i}\\ \rho u_3 u_i+p\delta_{3i}\\ \rho H u_i\end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{F}_x=\begin{Bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ \rho H u\end{Bmatrix}, \text{etc.} \qquad (13.22b)$$

$$\mathbf{G}_i=\begin{Bmatrix}0\\ -\tau_{1i}\\ -\tau_{2i}\\ -\tau_{3i}\\ \left[-\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_i)- -k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right]\end{Bmatrix} \quad \text{o } \mathbf{G}_x=\begin{Bmatrix}0\\ -\tau_{xx}\\ -\tau_{yx}\\ -\tau_{zx}\\ \left[-\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}u+\tau_{xy}v+ +\tau_{xz}w)-k\frac{\partial T}{\partial x}\right]\end{Bmatrix}, \text{etc.}$$
$$(13.22c)$$

$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}0\\ -\rho f_1\\ -\rho f_2\\ -\rho f_3\\ -\rho f_i u_i-q_H\end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}0\\ -\rho f_x\\ -\rho f_y\\ -\rho f_z\\ -\rho(f_x u+f_y v+f_z w)-q_H\end{Bmatrix}, \text{etc.}$$
$$(13.22d)$$

con

$$\tau_{ij}=\mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\delta_{ij}\frac{2}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right]$$

El sistema de ecuaciones completo se conoce con el nombre de *ecuaciones de Navier-Stokes*, y el caso particular de fluido sin viscosidad y sin conducción de calor ($\tau_{ij}=0$, $k=0$) con el de *ecuaciones de Euler*.

Las ecuaciones anteriores son el punto de partida para todos los estudios de mecánica de fluidos y no es sorprendente que en la literatura se presenten muchas formas alternativas obtenidas por combinación de las ecuaciones anteriores.[13] El sistema expresado por las Ecs. (13.22) es, sin embargo, muy útil y tiene significado físico, definiendo la conservación de cantidades esenciales. Más aún, se advierte inmediatamente por qué las discusiones del Capítulo 12 precedente son importantes, y por qué serán necesarias algunas modificaciones del proceso estándar de Galerkin en la discretización.

En muchas situaciones reales predominan en el fluido diferentes aspectos. Por ejemplo, con frecuencia la viscosidad sólo es de importancia en

las proximidades de los contornos en los que se prescriben las velocidades, esto es

$$\Gamma_u \qquad \text{donde } u_i = \bar{u}_i$$

o en los que se prescriben las fuerzas de superficie:

$$\Gamma_t \qquad \text{donde } n_i \sigma_{ij} = t_i$$

Donde n_i son los cosenos directores de la normal al contorno.

En estos casos el sistema puede considerarse separadamente en dos partes: una, como la *capa límite* cerca de dichos contornos y otra, como un *flujo no viscoso* en las regiones fuera de dicha capa límite.

Además, en muchos casos no existe una solución estacionaria porque el fluido exhibe *turbulencia*, esto es, una fluctuación aleatoria de la velocidad. Aquí es todavía posible utilizar las ecuaciones generales de Navier-Stokes escritas ahora en función de la velocidad media, pero con una *viscosidad de Reynolds* reemplazando una molecular. Este tema se trata con detalle en numerosas referencias y en este texto nos limitaremos a mostrar simplemente su inicio cuando dejan de existir las soluciones estables. La inestabilidad turbulenta es inherente en las ecuaciones básicas de Navier-Stokes y en principio es posible obtener la solución transitoria, turbulenta, que modeliza el flujo, siempre que el tamaño de la malla sea capaz de reproducir los remolinos aleatorios. Dichos cálculos, aunque posibles, son extremadamente costosos y, por consiguiente, la técnica de la viscosidad media de Reynolds es de gran importancia práctica.

Tenemos que destacar dos puntos importantes relativos a flujos no viscosos (denominado a veces flujo de fluidos ideales).

En primer lugar, las ecuaciones de Euler tienen una forma puramente convectiva

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) \tag{13.23}$$

y, por consiguiente, son necesarios métodos especiales para su solución, como ya se ha indicado en el Capítulo 12. Estos métodos son aplicables y útiles fundamentalmente en *flujos compresibles* , como discutiremos en el Capítulo 14. En segundo lugar, para flujos incompresibles (o casi incompresibles) es interesante introducir un *potencial* que convierte las ecuaciones de Euler en una forma autoadjunta sencilla. En este capítulo se estudiará este procedimiento. Aunque las formas potenciales son aplicables también a flujos compresibles no se discutirán en este contexto, ya que no suelen ser operativas en problemas de altas velocidades supersónicas.

FLUJOS INCOMPRESIBLES (O CASI INCOMPRESIBLES)

13.3 Ecuaciones básicas

Hemos observado con anterioridad que las ecuaciones de Navier-Stokes se completan por la existencia de una relación de estado como [Ec. (13.13)]

$$\rho = \rho(p, T)$$

En fluidos (casi) incompresibles supondremos frecuentemente que:

1. El problema es isotérmico.
2. La variación de ρ con p es muy pequeña, o sea, en los términos en los que se multiplica la velocidad por la densidad ésta se supondrá constante.

La primera hipótesis puede relajarse, como veremos más tarde, permitiendo un cierto acoplamiento térmico a través de la dependencia de las propiedades del fluido con la temperatura. En dichos casos introduciremos el acoplamiento iterativamente. Ejemplos típicos son los problemas de corrientes inducidas por la densidad (ver página 601) o viscosidad dependiente de la temperatura (ver Sección 13.6.2).

Si utilizamos las hipótesis anteriores podemos todavía permitir una pequeña compresibilidad, advirtiendo que los cambios de densidad, como consecuencia de la deformabilidad elástica, están relacionados con los cambios de presión. Así, puede escribirse

$$d\rho = \frac{\rho}{K} dp \tag{13.24a}$$

donde K es el módulo de compresibilidad. Esta relación puede expresarse como

$$d\rho = \frac{1}{c^2} dp \tag{13.24b}$$

o

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{13.24c}$$

siendo $c = \sqrt{K/\rho}$ la velocidad de onda acústica.

Las Ecs. (13.21) y (13.22) pueden reescribirse ahora, omitiendo el transporte de energía (y condensando la expresión general), como

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{13.25a}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j u_i) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ji} - f_j = 0 \tag{13.25b}$$

Con $j = 1, 2, 3$ esto representa un sistema de cuatro ecuaciones en las que las variables son u_j y p.

Utilizando coordenadas cartesianas se tiene, en lugar de la ecuación (13.25a),

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{13.26a}$$

donde el primer término se elimina para el caso de completa incompresibilidad ($c = \infty$) y

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz}\right) - f_x = 0\end{aligned} \tag{13.26b}$$

con similares expresiones para y y z. En ambos casos

$$\frac{1}{\rho}\tau_{ij} = \nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij}\frac{2}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática.

El lector advertirá que las ecuaciones anteriores, con excepción de los términos de aceleración convectivos, son idénticas a las que gobiernan el problema de *elasticidad incompresible (o casi incompresible)*, que fue discutido en el Capítulo 12 del Volumen 1.

13.4 Flujo incompresible no viscoso –formulación potencial–

Las Ecs. (13.26) pueden escribirse en ausencia de viscosidad y compresibilidad como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{13.27a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - f_x = 0 \tag{13.27b}$$

con expresiones similares para las componentes y y z.

Estas ecuaciones de Euler no son apropiadas para la solución númerica, y es interesante introducir un potencial, ϕ, definiendo las velocidades como

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{13.28}$$

o

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi$$

Si dicho potencial existe, entonces, sustituyendo (13.28) en (13.27b) se obtiene una única ecuación de comportamiento

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \equiv \nabla^2\phi = 0 \tag{13.29}$$

que con condiciones de contorno apropiadas puede resolverse fácilmente en la forma descrita en el Capítulo 10 del Volumen I. Obviamente, para flujo confinado se puede prescribir la velocidad normal u_n en los contornos:

$$u_n = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \tag{13.30}$$

y como se explica en el Volumen 1, esto proporciona una condición de contorno *natural.*

En este momento no es necesario discutir la aplicación de elementos finitos a esta ecuación particular, que fue estudiada ampliamente en el Volumen 1 y para la cual existen muchos programas de ordenador disponibles.[15,26] En la Figura 13.1 se muestra el ejemplo de una típica solución potencial.

Naturalmente, hay que asegurarse que la función potencial ϕ existe, y además determinar qué condiciones son necesarias para su existencia. Aquí hacemos notar que hasta ahora no se ha utilizado en la definición del problema las importantes ecuaciones de conservación del movimiento (13.27b) y volveremos ahora a ellas. En primer lugar, advertimos que una función potencial definida unívocamente implica que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\,, \quad \text{etc.} \tag{13.31}$$

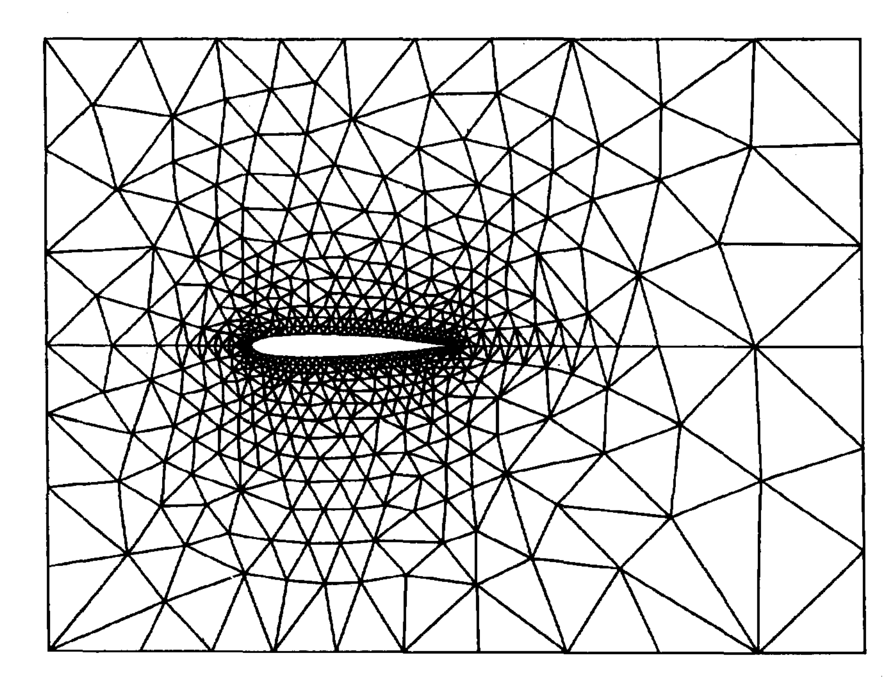
y, por consiguiente, utilizando la definición (13.28),

$$\omega_x \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \omega_y \equiv \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \ \text{ y } \ \omega_z \equiv \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{13.32}$$

Ésta es la condición de *irrotacionalidad* del flujo que viene impuesta por la existencia del potencial.

Introduciendo la definición del potencial en el primer término de la Ec. (13.27b) y utilizando las Ecs (13.27b) y (13.32) se puede escribir esa ecuación como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) + \frac{p}{\rho} + P\right] = 0 \tag{13.33}$$



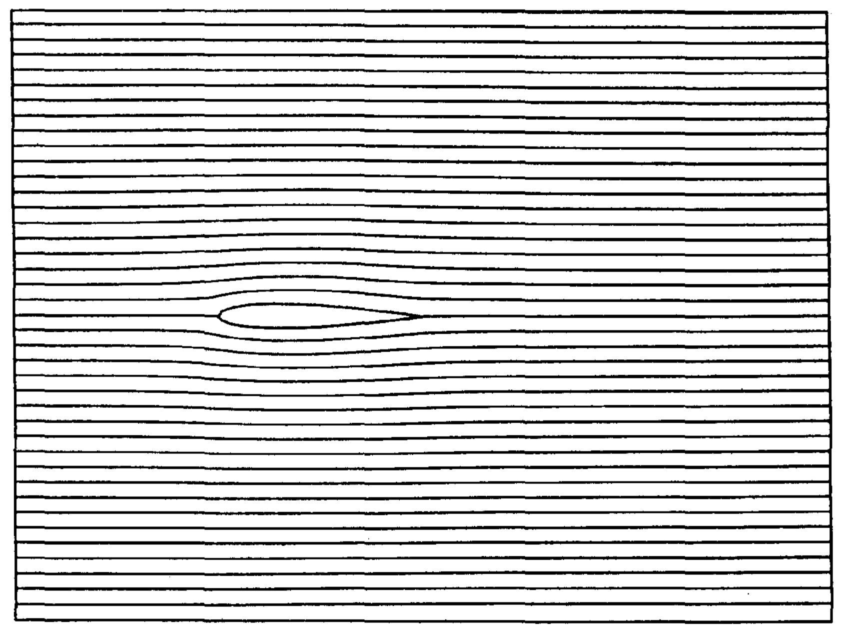


Figura 13.1 Solución de flujo potencial alrededor de un ala de avión. Malla y líneas de corriente.

(con expresiones similares en las direcciones y y z) en la que P es el potencial de las fuerzas másicas definido por

$$f_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} \tag{13.34}$$

La Ec. (13.33) puede escribirse de forma alternativa como

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + H + P\right) = 0 \tag{13.35}$$

donde H es la *entalpía* introducida en la Ec. (13.17).

Si se mantienen las condiciones isotérmicas, la energía especifica es constante y la ecuación anterior implica que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + P = \text{ constante} \tag{13.36}$$

para todo el dominio. Esto puede tomarse como un corolario de la existencia del potencial y ciertamente es una condición para su existencia. En flujos estacionarios proporciona la conocida ecuación de Bernoulli que permite determinar las presiones a través de todo el campo potencial cuando se establece el valor de la constante.

Algunos problemas de interés específico son los del flujo con una superficie libre.[16–18] Aquí se sigue cumpliendo la ecuación de Laplace para el potencial, pero la posición de la superficie libre tiene que encontrarse iterativamente. En la Figura 13.2 se muestra un ejemplo de dicho flujo con superficie libre.

En problemas en los que esté involucrada la gravedad, el potencial de fuerzas másicas gravitatorias es simplemente $P = gz$, y la condición de superficie libre requiere que (en dos dimensiones)

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - gz = 0$$

Dichas condiciones involucran una solución no lineal iterativa, como se ilustra en los ejemplos de la referencia [16].

Es interesante observar que la ecuación de flujo potencial es autoadjunta y que la introducción del potencial ha evitado las dificultades asociadas a los términos convectivos.

13.5 Flujo viscoso incompresible a bajas velocidades –problema de Stokes–

13.5.1 *Analogía con la elasticidad incompresible.* El flujo viscoso incompresible a bajas velocidades representa la situación extrema del otro extremo

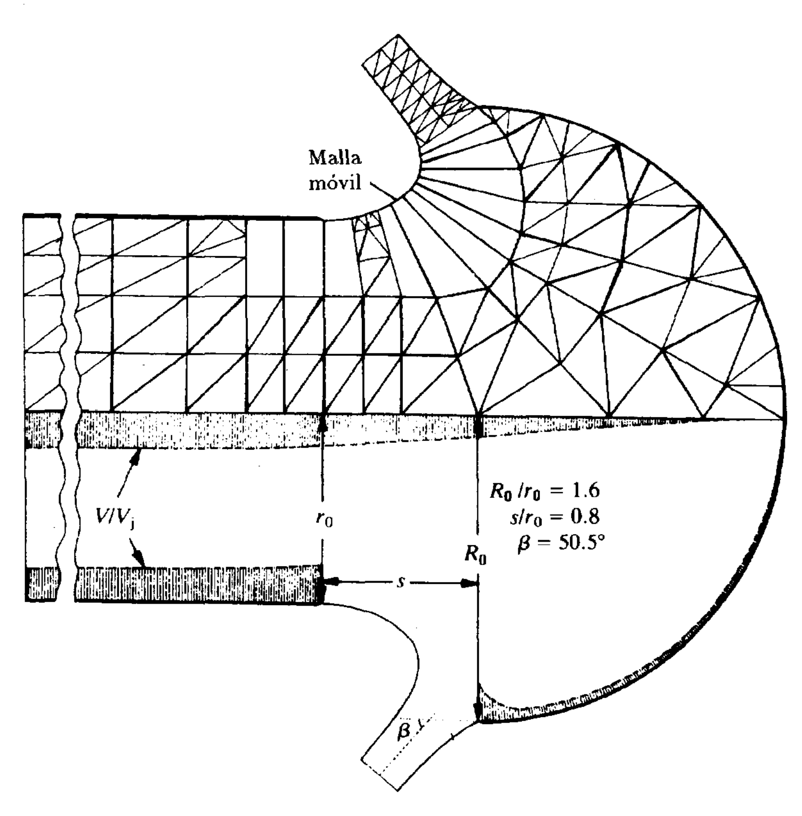


Figura 13.2 Flujo potencial con superficie libre, ilustrando un chorro de revolución sobre un casquete esférico (de Sarpkaya y Hiriart[17]).

de la escala del problema sin viscosidad de la sección anterior. Aquí todas la fuerzas dinámicas (aceleración) se desprecian, *a priori*, y las Ecs. (13.26) se reducen, en coordenadas cartesianas, a

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\equiv\dot{\varepsilon}_v=0 \qquad (13.37a)$$

y

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}-\rho f_x=0 \qquad (13.37b)$$

con expresiones similares en las direcciones y y z.

Las ecuaciones anteriores se completan con la ecuación constitutiva (13.26b):

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\delta_{ij}\frac{2}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \qquad (13.38)$$

lo cual es idéntico a un problema de elasticidad incompresible en el que reemplazamos:

a) los desplazamientos por las velocidades, y
b) el módulo de rigidez transversal G por la viscosidad μ.

Esta analogía se explica de forma más clara si, para ser coherentes con el Volumen 1, reintroducimos la notación vectorial

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T=[\dot{\varepsilon}_x,\dot{\varepsilon}_y,\dot{\varepsilon}_z,2\dot{\varepsilon}_{xy},2\dot{\varepsilon}_{yz},2\dot{\varepsilon}_{zx}] \qquad (13.39)$$

para las velocidades de deformación, y para las tensiones desviadoras

$$\boldsymbol{\tau}^T=[\tau_{xx}\tau_{yy}\tau_{zz}\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}] \qquad (13.40)$$

Ahora se puede escribir, en lugar de las Ecs. (13.27b) y (13.38),

$$\mathbf{S}^T(\mu\mathbf{D}_0)\mathbf{S}\mathbf{u}-\nabla p-\rho\mathbf{f}=0 \qquad (13.41a)$$

y en lugar de la ecuación (13.37a),

$$\mathbf{m}^T\mathbf{S}\mathbf{u}=0 \qquad (13.41b)$$

donde

$$\mathbf{D}_0=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{2}{3}, & -\frac{2}{3}, & 0, & 0, & 0\\ & \frac{4}{3}, & -\frac{2}{3}, & 0, & 0, & 0\\ & & \frac{4}{3}, & 0, & 0, & 0\\ & \text{simétrica} & & 1, & 0, & 0\\ & & & & 1, & 0\\ & & & & & 1\end{bmatrix} \qquad (13.42)$$

y $\qquad \mathbf{m}^T=[1,1,1,0,0,0]$

recobrando las Ecs. (12.44) y (12.45) del Capítulo 12 del Volumen 1.

13.5.2 *Discretización mixta y penalización.* La discretización puede comenzar a partir de la forma *mixta* con aproximaciones independientes de $\mathbf{u}$ y p, esto es

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} \qquad p = \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}} \tag{13.43}$$

o mediante una forma penalizada en la cual la Ec. (13.41b) se aumenta por p/γ, donde γ es un parámetro de penalización grande. Es decir

$$\mathbf{m}^T \mathbf{S}\mathbf{u} - \frac{p}{\gamma} = 0 \tag{13.44}$$

lo que permite eliminar p de los cálculos. Dichas formas penalizadas son sólo aplicables con *integración reducida* y se ha demostrado su equivalencia general con la forma mixta en la cual p se discretiza escogiendo formas discontinuas para las funciones $\mathbf{N}_p$ entre elementos.[19]

Como se ha visto en el Volumen 1, es ventajoso utilizar la forma mixta y utilizar el parámetro de penalización solamente para eliminar los valores de p a nivel de elemento. Por consiguiente, a partir de ahora supondremos que dicha penalización sólo se efectúa después de la discretización mixta.

La utilización de formas penalizadas en mecánica de fluidos se introdujo a comienzos de la década de los 70[20,22] y se ha discutido en numerosas referencias.[23].

Las ecuaciones discretizadas tienen siempre la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & h\mathbf{I}/\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{13.45}$$

donde h es un tamaño típico del elemento, $\mathbf{I}$ es una matriz identidad,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_\Omega \mathbf{B}^T \mu \mathbf{D}_0 \mathbf{B}\, d\Omega \qquad \text{donde } \mathbf{B} \equiv \mathbf{S}\mathbf{N}_u \\ \mathbf{Q} &= -\int_\Omega \mathbf{N}_u^T \nabla \mathbf{N}_p\, d\Omega \\ \bar{\mathbf{f}} &= \int_\Omega \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{f}\, d\Omega \qquad \text{(suponiendo fuerzas de superficie nulas)} \end{aligned} \tag{13.46}$$

y el número de penalización γ se introduce únicamente como un artificio numérico. Su valor se toma usualmente como[23,25]

$$\gamma = 10^7 - 10^{10}\mu$$

Poco más hay que decir acerca de los procedimientos de solución, e incluso de los resultados del análisis de problemas de flujo incompresible a bajas velocidades en el caso lineal. El rango de aplicación está naturalmente limitado a velocidades del fluido pequeñas, o a valores de la viscosidad altos, lo que sucede en aplicaciones de flujo de aceite o de sangre en problemas de biomecánica, etc. Es, sin embargo, importante recordar que la forma mixta permite utilizar únicamente ciertas combinaciones de $\mathbf{N}_u$ y $\mathbf{N}_p$ sin violar las condiciones de convergencia. Esto se discutió con detalle en el Capítulo 12 del Volumen 1, pero para completar esta presentación en la Figura 13.3 se listan algunos de los elementos diponibles junto con sus velocidades de convergencia asintótica.[26] En las referencias [27] y [29] se pueden encontrar muchos otros elementos útiles para problemas de mecánica de fluidos, pero los que tienen un comportamiento más robusto son los que se muestran en la tabla anterior.

Es de interés general advertir que en mecánica de fluidos se utilizan frecuentemente elementos con interpolaciones de presión continua p_0. Ciertamente su comportamiento es superior a los de interpolación discontinua, incluso aunque el coste de la solución es algo mayor.

Es importante advertir que las recomendaciones que conciernen a los elementos para el problema de Stokes son también válidas sin alteraciones en situaciones en las que los términos dinámicos son importantes. Por consiguiente, supondremos que se utiliza una discretización espacial similar al tratar el caso de fluidos de Navier-Stokes en las secciones siguientes.

La obvia extensión de los programas escritos para elasticidad incompresible a problemas de flujo de Stokes es sin duda la razón de por qué las primeras soluciones de elementos finitos en mecánica de fluidos fueron aplicadas en esta área.

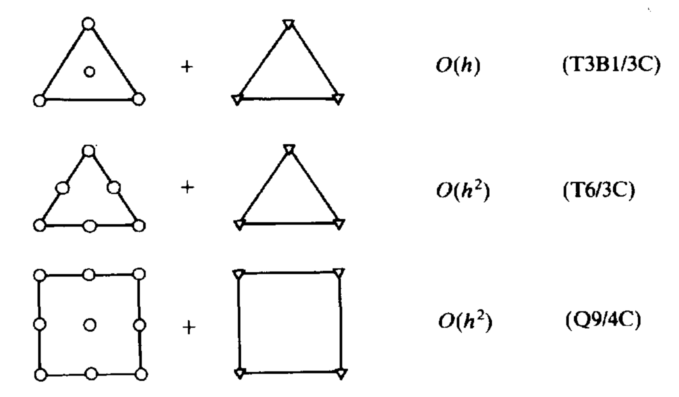
13.6 Fluidos no newtonianos a bajas velocidades –conformado de polímeros y metales–

13.6.1 *Flujos no newtonianos incluyendo viscoplasticidad y plasticidad.* En muchos fluidos la viscosidad, aunque isotrópica, puede ser dependiente de la velocidad de deformación $\dot{\varepsilon}_{ij}$ o bien de las variables de estado, tales como la temperatura o la deformación total. Casos típicos son, por ejemplo, el comportamiento de muchos polímeros, metales calientes, etc., donde una ley exponencial del tipo

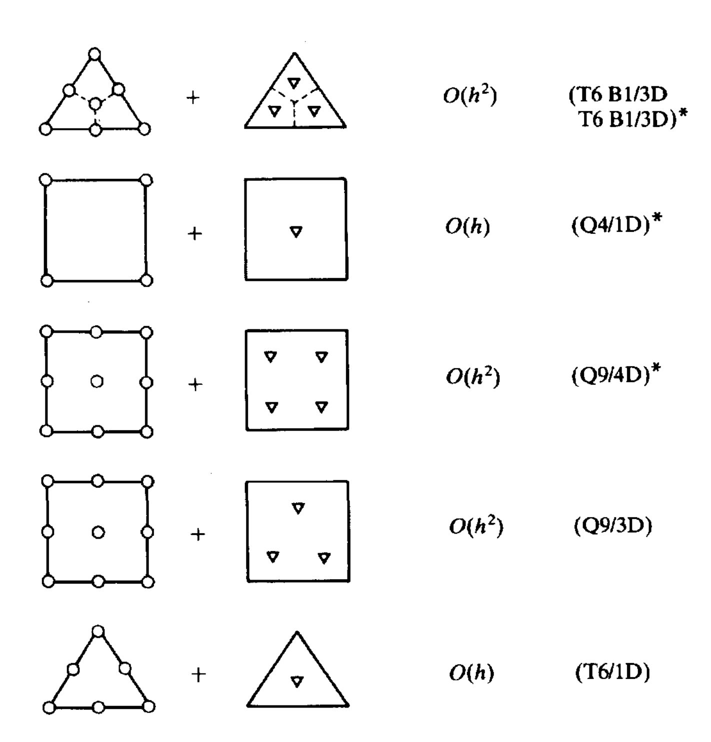
$$\mu = \mu_0 \dot{\bar{\varepsilon}}^{(m-1)} \tag{13.47}$$

con $\mu_0 = \mu_0(T, \bar{\varepsilon})$ gobierna la relación entre la viscosidad y la velocidad de deformación. En estas expresiones, $\dot{\bar{\varepsilon}}$ es el segundo invariante del tensor de velocidad de deformaciones definido en la Ec. (13.2), T es la temperatura y $\bar{\varepsilon}$ es el invariante de deformación total.

Esta viscosidad *secante* puede obtenerse dibujando la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras, o simplemente sus invariantes, ya que la Ec. (13.3) define la viscosidad mediante el cociente



(*a*) Interpolación continua para p



(*b*) Interpolación discontinua para p

○ Nodo de velocidad
▽ Nodo de presión
* Denota elementos que fallan el test de Babuska–Brezzi pero se comportan razonablemente

Figura 13.3 Algunas de las interpolaciones de velocidad/presión útiles y sus velocidades de convergencia asintótica en la norma de energía.

entre la tensión y la velocidad de deformación. La Figura 13.4 muestra dichos dibujos. La relación exponencial de la Ec. (13.47) se conoce con el nombre de ley de Ostwald de Waele y se ilustra en la Figura 13.4(*b*).

De manera similar pueden encontrarse leyes de viscosidad para el comportamiento viscoplástico y plástico puro de tipo incompresible. Por ejemplo, en la Figura 13.4(*c*) se muestra el fluido viscoplástico de Bingham en el que se establece un límite o valor de fluencia del segundo invariante de las tensiones excedido el cual se produce la velocidad de deformación. Así, para este tipo de flujo viscoplástico es evidente que se obtiene una expresión de la viscosidad altamente no lineal que puede escribirse como

$$\mu = \frac{\bar{\sigma}_y + \gamma \dot{\bar{\varepsilon}}^m}{\dot{\bar{\varepsilon}}} \tag{13.48}$$

donde $\bar{\sigma}_y$ es el valor del segundo invariante de las tensiones tras la fluencia.

El caso especial de plasticidad pura se deduce naturalmente como un caso límite en el que el parámetro de fluidez $\gamma = 0$, y, por tanto

$$\mu = \frac{\bar{\sigma}_y}{\dot{\bar{\varepsilon}}} \tag{13.49}$$

De nuevo, $\bar{\sigma}_y$ puede depender del *estado* del fluido, esto es

$$\bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_y(T, \bar{\varepsilon}) \tag{13.50}$$

Las soluciones numéricas (para un estado dado del fluido) pueden obtenerse mediante diversos procedimientos iterativos, advirtiendo que la Ec. (13.25) continúa siendo válida, pero ahora con la matriz $\mathbf{K}$ dependiente de la viscosidad, esto es

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mu) = \mathbf{K}(\dot{\bar{\varepsilon}}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}) \tag{13.51}$$

La solución puede obtenerse mediante un proceso iterativo total (ver Capítulo 7). Así, resumiendo la Ec. (13.45) como

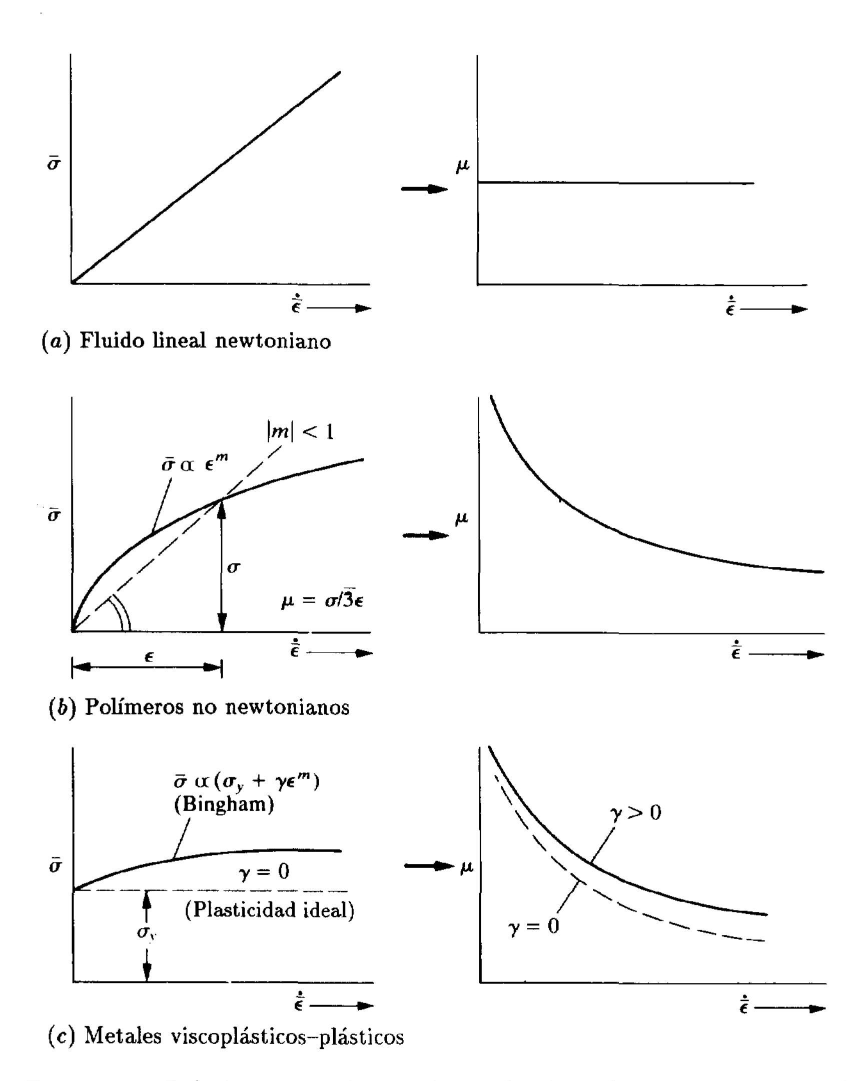
$$\mathbf{A}\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{13.52}$$

advirtiendo que

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\left(\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}\right)$$

se puede escribir

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}^{i+1} = \mathbf{A}_i^{-1}\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}\left(\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}\right)^i \tag{13.53}$$



(*a*) Fluido lineal newtoniano

(*b*) Polímeros no newtonianos

(*c*) Metales viscoplásticos–plásticos

Figura 13.4 Relaciones entre la tensión $\bar{\sigma}$ y la viscosidad μ con la velocidad de deformación $\dot{\bar{\varepsilon}}$ para varios materiales.

Comenzando con un valor unitario de μ se repite la solución hasta que se obtiene convergencia.

Dicho método iterativo converge rápidamente (incluso cuando μ puede variar entre cero e infinito, tal como sucede en el caso de plasticidad pura), si el término de fuerzas $\bar{\mathbf{f}}$ se debe a *velocidades prescritas en el contorno*, por tanto, confina inmediatamente la variación de todas las velocidades en un rango estrecho. En dichos casos, se requieren generalmente de cinco a siete iteraciones para reducir la diferencia entre las soluciones para las iteraciones i e $i+1_{\text{iésima}}$ a un 1% en la norma euclidea.

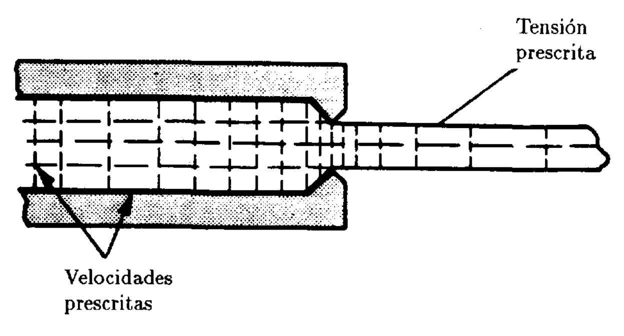
Las primeras soluciones para flujos no newtonianos se aplicaron a polímeros y metales en caliente a principios de la década del 70.[30,32] La aplicación de los mismos procedimientos para el conformado de metales se introdujo en la misma época y se ha desarrollado ampliamente.[33,50]

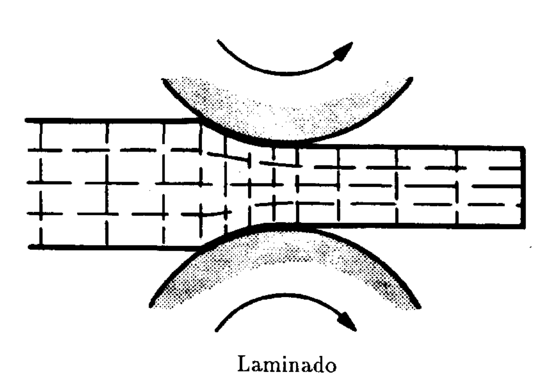
Es quizás difícil entrever que el acero y el aluminio se traten como un fluido, ya que generalmente dichos materiales se utilizan como elementos estructurales. Sin embargo, durante el proceso de conformado las deformaciones elásticas son del orden de 10^{-6} mientras que la deformación plástica puede tener un valor cerca de la unidad. Parece, por tanto, justificable prescindir de las primeras (lo que está implícito en la definición de la viscosidad). Esto puede ciertamente comprobarse al comparar las soluciones basadas en lo que se denomina *formulación de flujo* con soluciones elastoplásticas o experimentales. Este proceso se ha introducido de forma alternativa como una formulación "rígido–plástica"[38,39] aunque dicha modelización es más compleja y menos descriptiva.

Hoy en día esta metodología está ampliamente aceptada para la solución de procesos de conformado de metales y polímeros, y sólo puede incluirse aquí una selección de referencias de aplicación. El lector interesado puede consultar la referencia [48] donde encontrará una panorámica completa de este campo.

13.6.2 *Problemas de conformado estacionarios.* En problemas de conformado se encuentran dos situaciones típicas. La primera es el *flujo estacionario.* En este caso se modela un flujo continuo, como se muestra en la Figura 13.5(*a*), y en el que puede suponerse que la velocidad y las otras propiedades son fijas en un punto particular del espacio. En la Figura 13.15(*b*) se ilustra el caso más usual de un proceso de *conformado transitorio* que será tratado más adelante. En un problema estacionario típico, si se conocen los parámetros de estado T y $\bar{\varepsilon}$ definiendo la temperatura y la viscosidad en todo el campo, se puede obtener la solución en la forma previamente descrita. Podemos, por ejemplo, suponer que el "flujo viscoso" del problema de la Figura 13.6 es el de un material plástico ideal bajo condiciones isotérmicas, simulando un proceso de extrusión, y obtener la solución que se muestra en la Tabla 13.1. Para dicho material pueden calcularse las fuerzas de extrusión exactas[51] y la tabla muestra los errores que se obtienen con la formulación de flujo utilizando diferentes elementos triángulares de la Figura 13.3 y dos mallas.[26] La malla más fina se obtuvo aquí utilizando estimación del error y un sencillo remallado.

En general, el problema de flujo estacionario va acompañado de la





(*a*) Estado estacionario

Figura 13.5 Algunos procesos de conformado típicos.

producción de temperatura (y otros parámetros de estado, tal como el invariante de deformación total $\bar{\varepsilon}$) y es entonces necesario acoplar la solución con la de balance de calor y otras ecuaciones de producción. La transmisión del calor ya ha sido discutida y las ecuaciones de conservación se dieron en la Ec. (13.20). Es conveniente ahora reescribir esta ecuación en forma modificada.

En primer lugar se advierte que, en general, puede prescindirse de la energía cinética en este tipo de problemas y que, con un calor específico constante c por unidad de volumen, se puede escribir

$$\rho E \approx \rho e = \hat{c}T \qquad (13.54a)$$

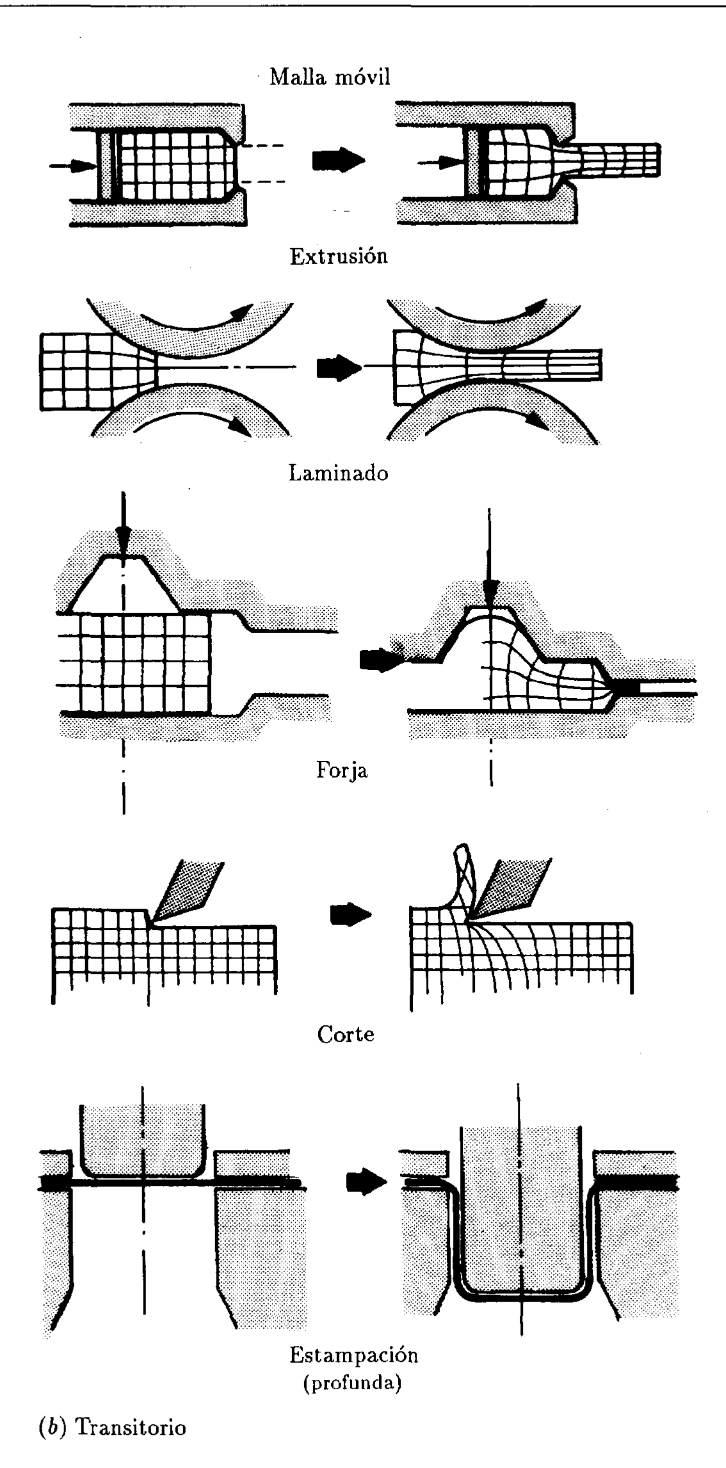
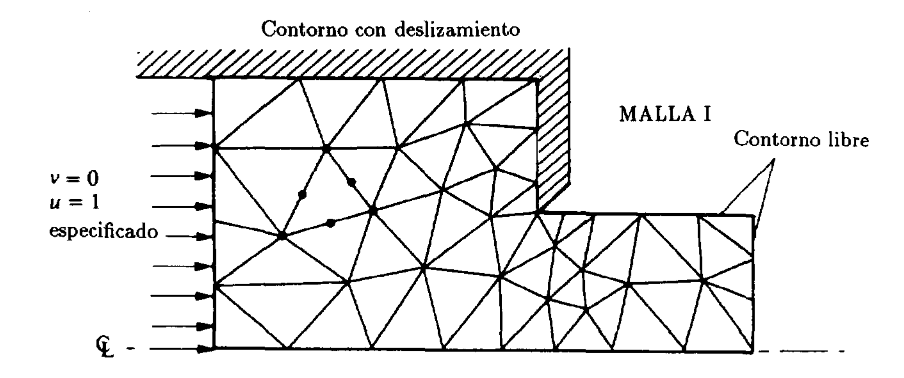


Figura 13.5 (*continuación*).



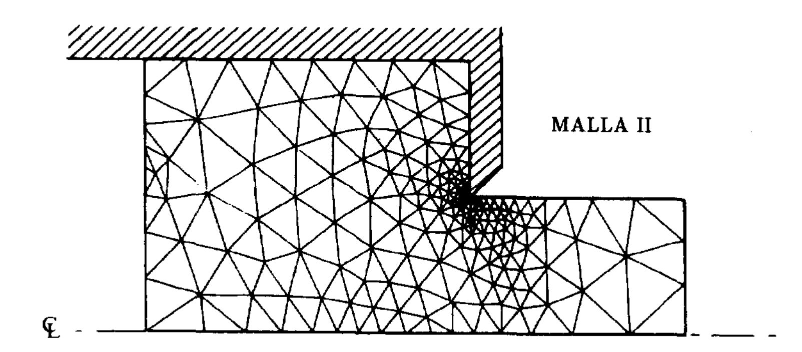


Figura 13.6 Extrusión plana (cociente de extrusión 2:1) de un material plástico ideal.

donde $\hat{c}$ es el calor específico. En segundo lugar se observa que la disipación de trabajo interno puede escribirse mediante la identidad

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p u_i - \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ji} u_i) \equiv -\sigma_{ji}\dot{\varepsilon}_{ji} \tag{13.54b}$$

donde, por la Ec. (13.9),

$$\sigma_{ji} = \tau_{ji} - \delta_{ji} p \tag{13.54c}$$

y, por la Ec. (13.2),

$$\dot{\varepsilon}_{ji} = \frac{\partial u_j/\partial x_i + \partial u_i/\partial x_j}{2} \tag{13.54d}$$

TABLA 13.1
COMPARACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE DIFERENTES ELEMENTOS TRIANGULARES MIXTOS DE LA FIGURA 13.3 EN UN PROBLEMA DE EXTRUSIÓN PLANO (PLASTICIDAD IDEAL)[26]

Tipo de Elemento	Malla 1 (gruesa)			Malla 2 (fina)		
	Fuerza extr.	Error %	CPU (s)	Fuerza extr.	Error %	CPU (s)
T6/1D	28 901.0	12.02	67.81	25 990.0	0.73	579.71
T6B1/3D	31 043.0	20.32	74.76	26 258.0	1.78	780.13
T6B1/3D*	29 031.0	12.52	73.08	25 975.0	1.66	613.92
T6/3C	27 902.5	8.15	87.62	25 975.0	0.67	855.38
Exact	25 800.0	0.00	—	25 800.0	0.00	—

Se advierte de pasada que, en general, el efecto del término introducido en las Ecs. (13.54) es despreciable y puede omitirse si se desea.

Utilizando las cuatro ecuaciones anteriores e insertando la relación de incompresibilidad, se puede escribir la ecuación de conservación de la energía (13.20) como

$$\left(\hat{c}\frac{\partial T}{\partial t} + \hat{c}u_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}k\frac{\partial T}{\partial x_i} - (\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \rho f_i u_i + g_h) = 0 \tag{13.55}$$

La solución del problema acoplado puede efectuarse iterativamente. El último término de (13.55) puede evaluarse a partir de las velocidades y tensiones conocidas de la solución de flujo. Se advierte que el primer término representa la derivada total de tipo convectivo que, incluso en estado estacionario, requiere la aplicación de procedimientos de ponderación especial como los discutidos en el Capítulo 13.

Dichas soluciones acopladas se han resuelto por primera vez recientemente,[35,36] pero hoy en día se practican de manera rutinaria.[42/44] En la Figura 13.7 se muestra la solución de un problema con acoplamiento térmico para un típico proceso de laminado estacionario tomado de la referencia [36].

Es interesante advertir que en este problema juega un papel importante el rozamiento en el contorno y que éste se modela utilizando una capa de elementos delgada cerca del mismo y haciendo que la viscosidad de dicha capa dependa de la presión.[49] Este procedimiento es muy sencillo y aunque no es exacto, da resultados de precisión suficientes para la práctica.

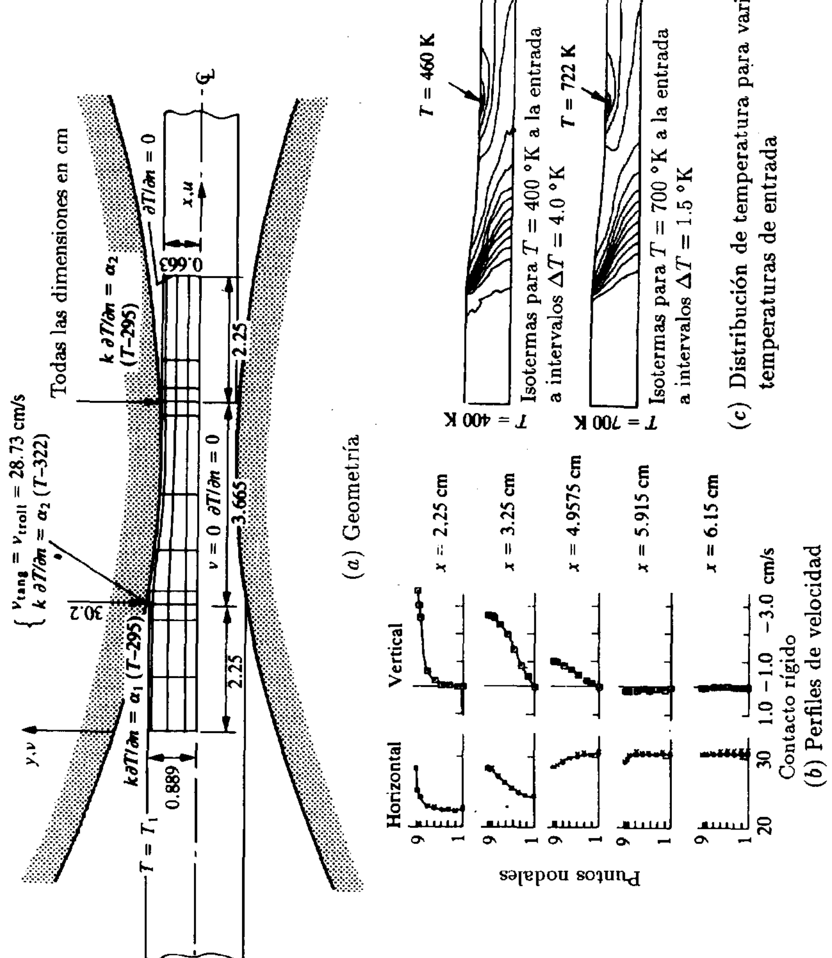


Figura 13.7 Proceso de laminado estacionario con acoplamiento térmico[36].

13.6.3 *Problemas transitorios con contornos cambiantes.* Estos temas representan la segunda y probablemente mayor categoría de problemas de conformado. Los ejemplos típicos se encuentran aquí en la forja, la embutición, el troquelado, etc., y de nuevo se puede incluir el acoplamiento térmico si fuese necesario. En las Figuras 13.8 y 13.9 se muestran algunas aplicaciones típicas.

La solución para las velocidades y las tensiones internas puede obtenerse de forma sencilla para una configuración dada si se conocen las temperaturas y otras variables de estado en ese instante. Esto permite obtener la nueva configuración, tanto para los contornos como para la malla, escribiendo explícitamente

$$\Delta x_i = u_i \Delta t \tag{13.56}$$

Si el acoplamiento térmico es importante se necesita variar también los incrementos de temperatura. Sin embargo, se advierte que la Ec. (13.55) se simplifica utilizando coordenadas convectivas ya que los términos convectivos desaparecen. Se puede escribir ahora

$$\hat{c}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial T}{\partial x_i} - (\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \rho f_i u_i + g_h) = 0 \tag{13.57}$$

donde el último término es el calor conocido al comienzo del intervalo de tiempo y el cálculo de los incrementos de temperatura se efectúa utilizando los procedimientos explíctos e implícitos discutidos en el Capítulo 10.

Ciertamente, para la actualización de las coordenadas y la temperatura puede hacerse uso iterativo de la solución sobre la malla actualizada para aumentar la precisión. Sin embargo, debe advertirse que cualquier procedimiento de actualización de malla continuo conducirá pronto a mallas inaceptables, siendo necesario algún tipo de remallado.

En el ejemplo de la Figura 13.8,[22] en el que se supone plasticidad ideal juntamente con comportamiento isotérmico, es necesario solamente seguir los movimientos del contorno. Como la temperatura y las otras variables de estado no entran en el problema puede efectuarse el remallado de una manera sencilla –en el caso que se muestra manteniendo las mismas líneas verticales durante la actualización de la malla–.

Sin embargo, en el ejemplo más realista de la Figura 13.9,[52,53] cuando se crea una nueva malla es necesario efectuar la interpolación de todos los parámetros de estado desde todas las posiciones de la malla antigua a la nueva. En dichos problemas vale la pena tratar de obtener los errores de la discretización dentro de márgenes definidos y remallar adaptablemente cuando estos errores son demasiado grandes.

En el Capítulo 14 del Volumen 1 se ha discutido el problema de remallado adaptable para problemas lineales. En los ejemplos presentes

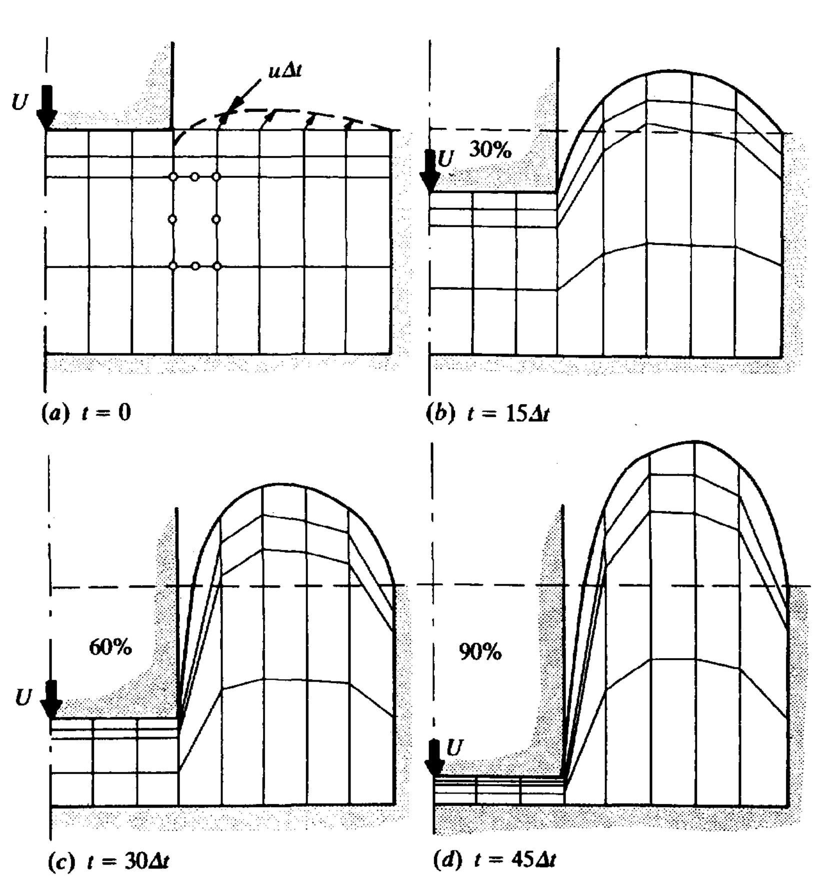
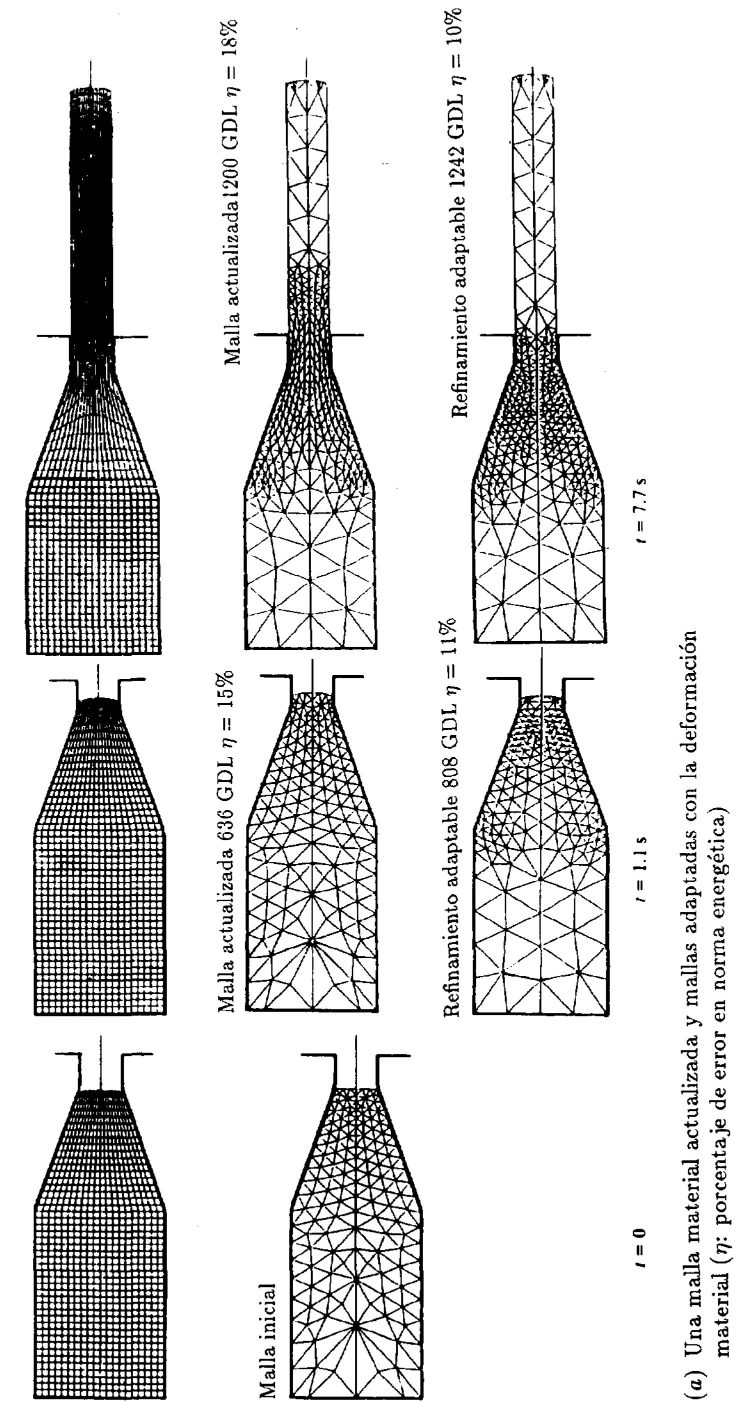


Figura 13.8 Problema de conformado por punzonamiento (solución mediante penalización).[22] Malla actualizada y perfil de la superficie utilizando 24 elementos isoparamétricos. Material plástico lineal:(*a*), (*b*), (*c*) y (*d*) muestran estados sucesivos del punzonamiento. (Se usó en este caso integración reducida).

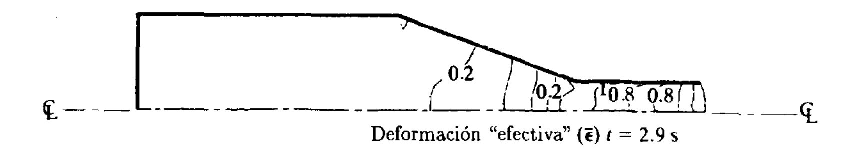
se han utilizado métodos similares con éxito[54,55] y en la Figura 13.9 se muestra como se procede al remallado durante un proceso de extrusión. Es interesante observar que de nuevo se utiliza como medida la *norma de energía* del error.

Los detalles de las diversas aplicaciones pueden encontrarse en la extensa literatura sobre el tema. En ella pueden también encontrarse diversos procedimientos de actualización de la malla más sofisticados. Un método particularmente exitoso es el denominado ALE (arbitrary

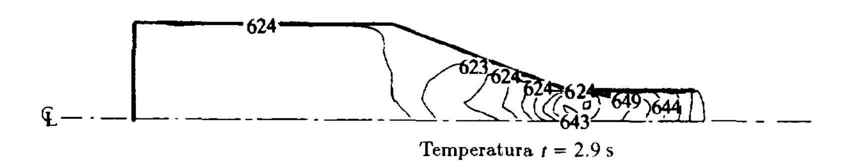


(*a*) Una malla material actualizada y mallas adaptadas con la deformación material (η: porcentaje de error en norma energética)

Figura 13.9 Problema de extrusión transitorio con dependencia de la tensión de fluencia con la temperatura y la deformación.[53] Refinamiento adaptable de la malla utilizando el elemento T6/1D de la Figura 13.3.

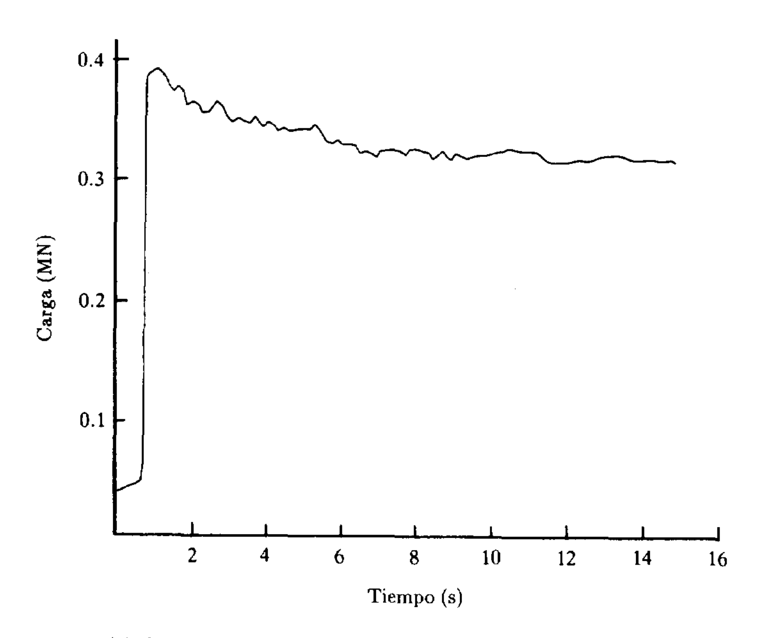


Deformación "efectiva" ($\bar{\varepsilon}$) $t = 2.9$ s



Temperatura $t = 2.9$ s

(*b*) Iso-líneas de parámetros de estado para $t = 2.9$ s



(*c*) Carga versus tiempo

Figura 13.9 (*continuación*).

lagrangian-eulerian).[56/60] En él se define una velocidad prescrita $\bar{v}$ sobre la malla original de manera que se ajuste el movimiento en los contornos, y se retienen los términos convectivos en las ecuaciones con referencia a esta velocidad. En la Ec. (13.56), por ejemplo, en lugar de

$$\hat{c}u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \qquad \text{se escribe} \qquad \hat{c}(u_i - \bar{v}_i)\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

etc., y la solución puede proceder en una forma similar a la del régimen estacionario (desapareciendo de forma natural la convección cuando $\bar{v}_i = u_i$; es decir, en el proceso de actualización puro).

Es interesante observar que la formulación de flujo puede aplicarse igualmente al conformado de elementos planos que se asemejan a láminas. Aquí son aplicables naturalmente todas las hipótesis de la teoría de láminas y la tecnología de elementos finitos correspondiente. Por ello, las condiciones de incompresibilidad ya no son un problema (debido a la condición de tensión plana), pero aparecen otras complicaciones. La literatura de dichas aplicaciones es grande, pero en las referencias [81] y [107] puede encontarse mucha información relevante. Las aplicaciones prácticas de estos problemas abarcan desde el conformado de latas de cerveza a piezas de carroceria de automóviles. En las Figura 13.10 y 13.11 se ilustran algunos problemas típicos.

En esta sección hemos concentrado nuestra atención en flujos en los no se incluyen efectos elásticos, esto es, en los que sólo varía la viscosidad. Sin embargo, hay considerable interés en el flujo de fluidos viscoelásticos o viscoelastoplásticos. Dichos flujos son interesantes en conformado de metales donde existen los efectos elásticos residuales, en mayor medida originados en procesos de flujo químico o de fluidos tipo goma. Este problema no se discutirá aquí, pero referimos al lector interesado en estos temas a las referencias [68], [70] donde encontrará detalles sobre la ampliación de la presente formulación a estos casos. Se advierte, sin embargo, que si los movimientos son relativamente pequeños son aplicables los procedimientos de elastoplasticidad discutidos en el Capítulo 7.

13.7 El problema de Navier-Stokes y los efectos de la acelaración convectiva –soluciones estacionarias–

13.7.1 *Ecuaciones básicas.* Para la solución completa de flujos incompresibles o casi incompresibles retornamos a las Ecs. (13.25) y (13.26) y mantenemos los efectos de aceleración.

Para enfatizar los términos convectivos se abandona aquí la notación conservativa utilizada en la Ec. (13.26b) y se escribe, para comparación con el flujo a bajas velocidades de la Ec. (13.7),

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{13.58a}$$

y

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]-\left[\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz}\right]+\frac{\partial p}{\partial x}-\rho f_x=0 \qquad (13.58b)$$

junto con ecuaciones similares en las direcciones y y z. (Al derivar la segunda ecuación se ha utilizado la hipótesis de incompresibilidad).

En la solución estacionaria las ecuaciones anteriores difieren de las que hemos utilizado en la solución de problemas de flujo a bajas velocidades en los términos convectivos de aceleración

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

por consiguiente, si estos términos son relativamente pequeños puede llegar a aplicarse el procedimiento estándar de Galerkin para llegar a las formas discretizadas de la Ec. (13.45).

Ahora, sin repetir los desarrollos anteriores, se puede escribir la forma mixta estacionaria como

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}+\tilde{\mathbf{K}}, & \mathbf{Q}\\ \mathbf{Q}^T, & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{u}}\\ \bar{\mathbf{p}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{f}}\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (13.59)$$

con $\mathbf{u}=\mathbf{N}_u\bar{\mathbf{u}} \qquad \mathbf{p}=\mathbf{N}_p\bar{\mathbf{p}}$

donde $\tilde{\mathbf{K}}$ es el término adicional proveniente de los términos convectivos. Todas las otras expresiones coinciden con las definidas en las Ecs. (13.46).

El nuevo término puede escribirse como

$$\tilde{\mathbf{K}}=\int_\Omega \mathbf{N}_u^T\mathbf{u}\rho\nabla\mathbf{N}_u\,d\Omega \qquad (13.60)$$

este término depende de los valores de $\mathbf{u}$ en el elemento, introduciendo de forma natural una no linealidad muy seria.

Deben utilizarse de nuevo formas penalizadas utilizando funciones de forma para la presión definidas localmente (discontinuas) que permitan la eliminación de las variables de presión.

La forma transitoria correspondiente de las ecuaciones es ahora simplemente

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}, & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}, & \tilde{\mathbf{M}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\bar{\mathbf{u}}}\\ \dot{\bar{\mathbf{p}}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}+\tilde{\mathbf{K}}, & \mathbf{Q}\\ \mathbf{Q}^T, & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{u}}\\ \bar{\mathbf{p}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{f}}\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (13.61)$$

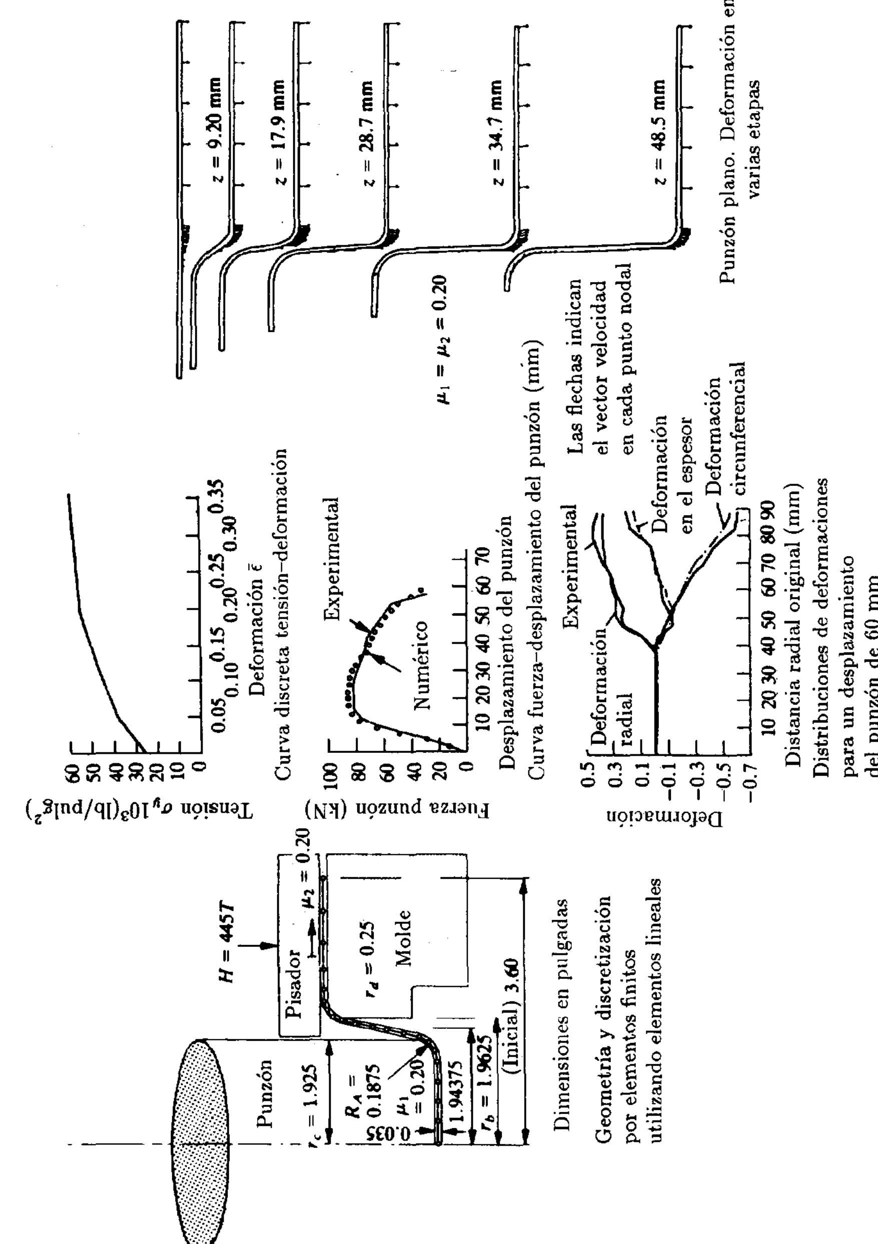
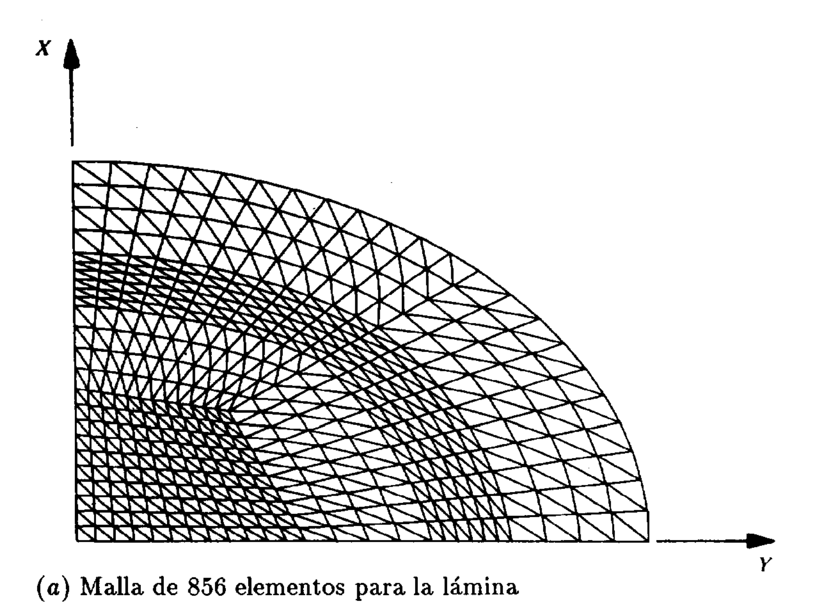
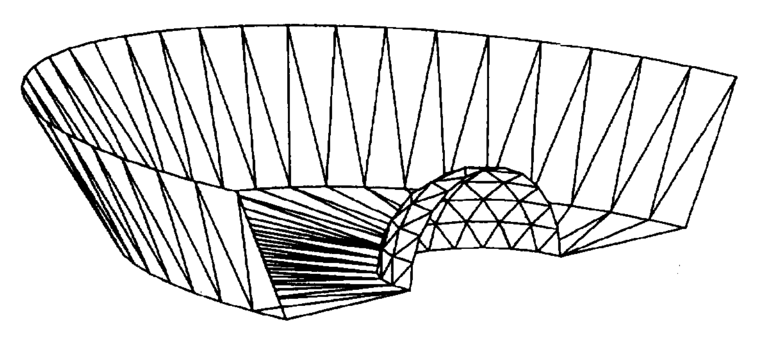


Figura 13.10 Embutición de una placa circular mediante un punzón cilíndrico.[61]



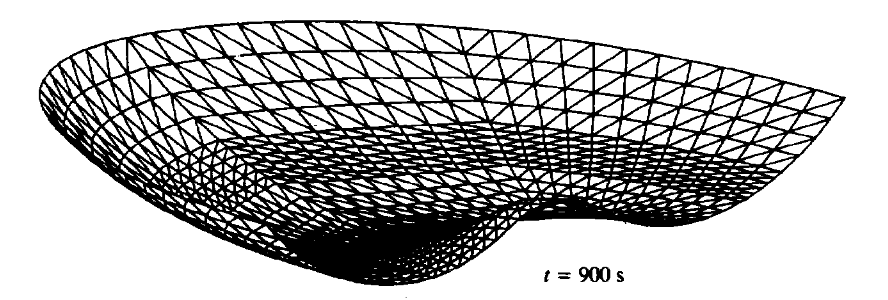
(*a*) Malla de 856 elementos para la lámina

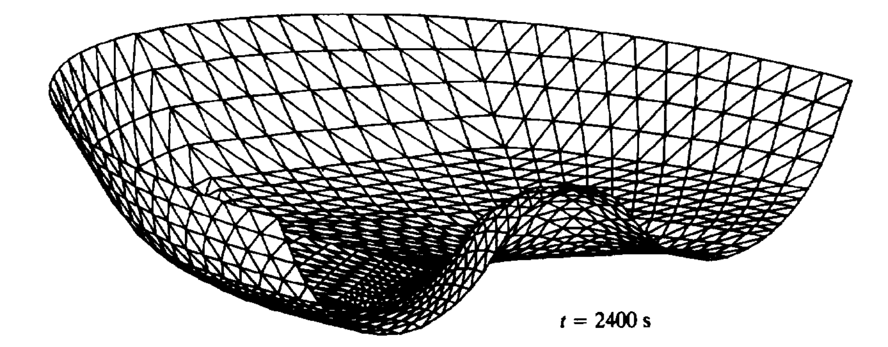


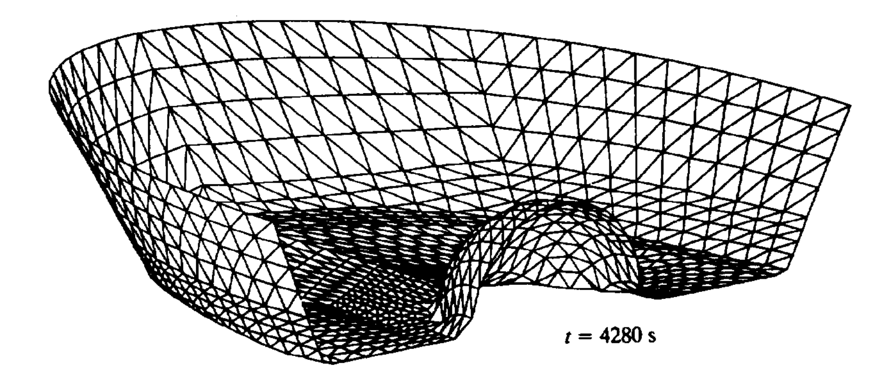
(*b*) Malla para establecer la geometría del molde

Figura 13.11 Simulación por elementos finitos del conformado superplástico de una plancha delgada mediante aplicación de presión de aire. Este ejemplo considera el conformado superplástico de un elipsoide truncado con un punzón esférico. La chapa original plana tenía 150 $\times$ 100 mm. El elipsoide truncado tenía 20 mm de altura. El espesor original era de 1 mm. El espesor final mínimo fue de 0.53 mm. Se utilizaron 69 incrementos de tiempo con un total de 285 iteraciones de Newton-Rapshon (resolviendo las ecuaciones completas).[64]









(*c*) Deformadas en varios tiempos

Figura 13.11 (*continuación*).

donde

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u \, d\Omega \tag{13.62a}$$

es la conocida matriz

$$\tilde{\mathbf{M}} = \int_\Omega \mathbf{N}_p^T \frac{1}{c^2} \mathbf{N}_p \, d\Omega \tag{13.62b}$$

que aunque no es una matriz de masa tiene una forma similar. Obviamente, $\tilde{\mathbf{M}}$ se hace cero cuando se supone incompresibilidad completa ($c = \infty$).

Se introduce aquí la forma transitoria por varias razones:

1. La solución estacionaria puede no existir si los términos de aceleración no lineal son grandes comparados con los viscosos. El cociente de dichos términos se caracteriza en cada problema particular por el número de Reynolds

$$Re = \frac{UL\rho}{\mu} \equiv \frac{UL}{\nu} \tag{13.63}$$

donde U y L son valores representativos de la velocidad y de una dimensión característica del problema y μ es la viscosidad cinemática. Es bien conocido que al aumentar Re, el flujo laminar estacionario se hace inestable, y se inicia el desarrollo de remolinos y turbulencia.
2. Incluso si existe el estado estacionario la solución transitoria puede (y lo hace) proporcionar un procedimiento computacional eficiente y muy apropiado para obtener iterativamente la solución estacionaria.
3. Naturalmente el problema puede ser transitorio y requerirse soluciones de ese tipo.

13.7.2 *Solución estacionaria directa y ponderación de Petrov-Galerkin.* Las soluciones estacionarias de la Ec. (13.59) fueron uno de los primeros retos de las aplicaciones del método de los elementos finitos. Procediendo como en el problema de flujo a bajas velocidades de Stokes puede obtenerse la solucion de la Ec. (13.59), aunque incluso para fluidos newtonianos la no linealidad de la matriz debida a los efectos de convección requerirá un procedimiento iterativo. Advirtiendo la naturaleza no simétrica de $\hat{\mathbf{K}}$, el sistema de la Ec. (13.59) escrito como

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{13.64}$$

requerirá técnicas de solución no simétricas sea cual sea el método iterativo que se adopte.

La solución directa que se ha utilizado en problemas no newtonianos [ver Ec. (13.53)] suele converger para valores muy pequeños de Re. Por esta razón se prefieren claramente métodos de Newton, como los discutidos en el Capítulo 7.

Para números de Reynolds relativamente bajos se obtiene una convergencia y precisión satisfactoria utilizando la transformación stándar de Galerkin y de esta manera se han obtenido muchas soluciones prácticas.[5,10,71,72] Sin embargo, como ya hemos remarcado, los términos convectivos pueden conducir a oscilaciones en el campo de velocidades si el número de Reynolds es relativamente alto, incluso si existen soluciones estables. La Figura 13.12(a)[73] ilustra este caso para una distribución bastante caótica de la velocidad, en un problema resuelto para un número de Reynolds relativamente alto. Para superar dichas oscilaciones es necesario utilizar uno de los procedimientos introducidos en el Capítulo 12 y, al menos para la aproximación estacionaria, se recomienda la aplicación de métodos de Petrov-Galerkin.

Hemos observado que los métodos de Petrov-Galerkin utilizan una función de ponderación [ver Ec. (12.45)] de la forma

$$\mathbf{W}_u = \mathbf{N}_u + \frac{\alpha}{\| \mathbf{u} \|} u_i \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x_i} \tag{13.65}$$

donde α es el parámetro de "contracorriente" determinado por el valor del número de Peclet del elemento.

En el presente caso el papel del número de Peclet lo juega el número de Reynolds del elemento:

$$Re_e = \frac{\| u \| \, h}{2\nu} \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{13.66}$$

donde h es el tamaño del elemento.

Desde luego, el valor óptimo del parámetro α puede determinarse mediante la utilización eurística de la Ec. (12.46):

$$\alpha_{\text{opt}} = \coth Re_e - \frac{1}{Re_e} \tag{13.67}$$

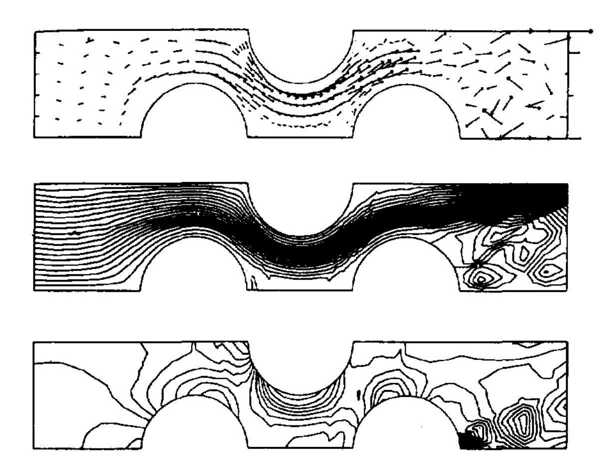
La aplicación de los procedimientos de Petrov-Galerkin en problemas de Navier-Stokes tiene sus ventajas. En la Figura 13.12 se muestra la mejora de los resultados y la eliminación de las oscilaciones.

Se advierte que:

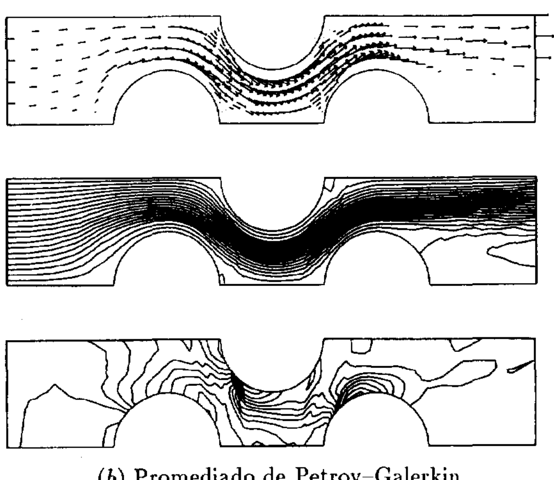
1. De nuevo se observa que sólo la matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ está afectada, transformándose la Ec. (13.60) en

$$\tilde{\mathbf{K}} = \int_\Omega \mathbf{W}_u^T \mathbf{u} \rho \nabla \mathbf{N}_u \, d\Omega \tag{13.68}$$

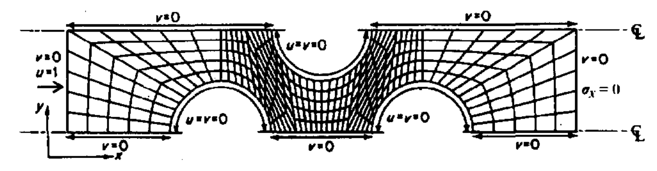
y la contribución de la ponderación de los términos viscosos es, o bien idénticamente cero (para elementos lineales), o insignificante para elementos de mayor orden.[73]



(a) Promediado de (Bubnov) Galerkin estándar



(b) Promediado de Petrov–Galerkin



(c) Malla de elementos cuadriláteros lineales

Figura 13.12 Flujo viscoso alrededor de un tubo a $Re = 500$.[73] Vectores de velocidad, líneas de corriente y distribución de la presión.

2. El parámetro contracorriente depende ahora de los valores desconocidos de **u** y necesita actualizarse en cada iteración.

Se acepta generalmente que los procedimientos de Petrov-Galerkin son esenciales para encontrar soluciones satisfactorias y la mayoría de los programas de ordenador adoptan está práctica.[74]

Naturalmente, las soluciones estacionarias obtenidas mediante la formulación de Navier-Stokes pueden utilizarse con éxito para resolver problemas de Stokes y en muchos ejemplos discutidos previamente se utilizaron dichos códigos. Sin embargo, el coste de la solución aumenta debido a la no simetría de las matrices que ahora se incluyen.

13.7.3 *Flujos convectivos con acoplamiento térmico.* Hasta ahora hemos considerado solamente los flujos incompresibles desacoplados (isotérmicos). Sin embargo, es bien conocido que pequeños cambios de la densidad debido a la expansión térmica pueden ser responsables de las corrientes convectivas como sucede en lagos, en la atmósfera, etc. Para resolver dichos problemas se puede utilizar la ecuación de la energía (13.55) expresada en función de la temperatura y resolver ésta, bien en una forma alternada, o simultáneamente con las ecuaciones del flujo.

Las ecuaciones del flujo (13.58), en las que se impone la incompresibilidad haciendo $c^2 = \infty$, suelen modificarse introduciendo una densidad dependiente de la temperatura en el último término de la Ec. (13.58b) (esto es, ρf_i) y poniendo

$$\rho = \rho(T) \tag{13.69a}$$

y con un coeficiente de expansión térmica constante θ puede escribirse específicamente

$$\rho = \rho_0[1 + \beta(T - T_0)] \tag{13.69b}$$

La forma particular de este acoplamiento se conoce como la aproximación de Boussinesq.

Se han efectuado muchos estudios de disipación térmica útiles utilizando el procedimiento arriba descrito.[75,78] La Figura 13.13 tomada de la referencia [77] ilustra la circulación provocada por la temperatura en una cavidad hueca.

13.8 El problema de Navier-Stokes –procedimientos de solución transitoria–

13.8.1 *Consideraciones generales.* En todas las secciones anteriores hemos tratado con soluciones estacionarias, y generalmente se ha utilizado el procedimiento directo para la solución de las ecuaciones (eliminación

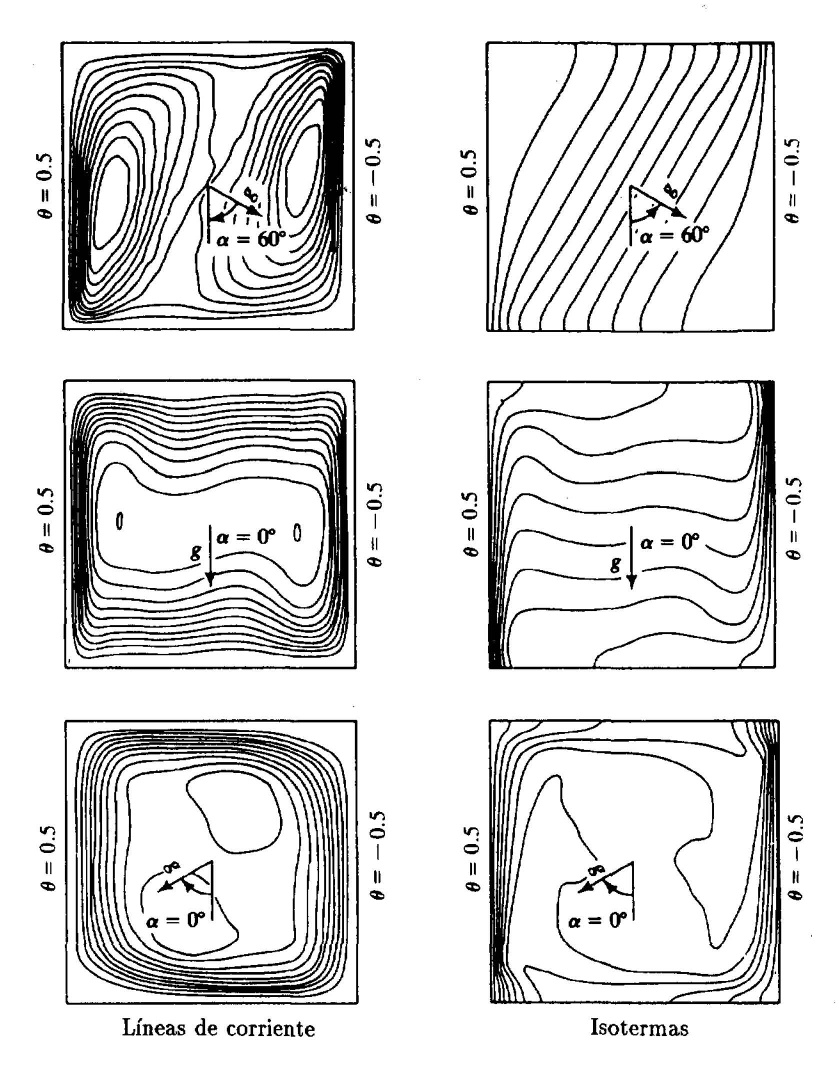


Figura 13.13 Circulación inducida por la temperatura de una cavidad rectangular con diferentes direcciones de gravedad.[77] Las líneas superiores e inferiores del cuadrado no son conductoras. Las temperaturas laterales se prescriben como se muestran (número de Rayleigh 10^6).

gaussiana en sus varias formas) aunque era necesario una iteración no lineal.

La solución de sistemas transitorios dados por la Ec. (13.61) puede obtenerse utilizando directamente cualquiera de los esquemas del

Capítulo 10, pero se advertirá inmediatamente que:

1. Si el fluido es totalmente incompresible y la matriz $\tilde{\mathbf{M}}$ es nula, sólo son prácticos métodos implícitos.
2. Si la compresión del fluido es finita, pero pequeña (esto es, c^2 es grande), son posibles entonces esquemas explícitos, pero los incrementos de tiempo críticos serán muy pequeños, necesitándose muchos cálculos repetidos.

Para problemas grandes no es aplicable ninguno de estos procedimientos debido a costes de cálculo prohibitivos. Las iteraciones repetidas lineales en cada incremento de tiempo en el caso de métodos implícitos no son aceptables.

En caso de compresibilidad pequeña puede demostrarse fácilmente que el incremento de tiempo crítico gobernando la estabilidad es del orden de

$$\Delta t_{\text{crit}} = \frac{h}{c} \tag{13.70}$$

esto es el tiempo necesario para que una onda que viaja a la velocidad del sonido atraviese el elemento. En la compresibilidad real de un fluido como el agua, por ejemplo, se utilizaron más de un millón de incrementos de tiempo por Hirano *et al.* para obtener una solución transitoria de un flujo a través de una esfera[79] –con un gran coste de cálculo–.

Por estas razones nos concentraremos aquí en esquemas de solución que sólo son parcialmente explícitos, en los que el coste puede reducirse mucho en comparación con procedimientos totalmente implícitos. Dichos esquemas tienen mucho éxito y, ciertamente, para problemas de gran tamaño proporcionan una forma muy económica de resolver las ecuaciones estacionarias de forma iterativa.

En este contexto debería hacerse una aclaración adicional, que concierne al posible uso de una *compresibilidad artificial*, esto es, un valor de la velocidad del sonido c modificado artificialmente que haga posible el cálculo explícito. Se encuentra generalmente que el flujo en estado estacionario está afectado muy poco por la compresibilidad siempre que el número de Mach sea menor que ~ 0.1 (número de Mach= $\| \mathbf{u} \| /c$).† Asi pues, sea cual sea la solución estacionaria, el cálculo explícito con valores aproximándose a dicho límite conducirá a una convergencia más rápida. Esto es también aproximadamente cierto para el caso transitorio y los programas de ordenador disponibles para flujo compresible, como los que

† Si la compresibilidad es tan pequeña que pueden adaptarse ecuaciones de la forma (13.25) puede apreciarse inmediatamente que las soluciones compresible e incompresible son idénticas.

discutiremos en el Capítulo 15, pueden utilizarse para resolver flujo incompresible como se ha demostrado recientemente[80,81]

Sin embargo, existen otras posibilidades.

13.8.2 *Solución transitoria semi-implícita.* El sistema de ecuaciones transitorio (13.61) puede separarse convenientemente en dos ecuaciones (donde ahora $\hat{\mathbf{K}}$ contiene todos los términos de convección no lineales y todas las operaciones necesarias de contracorriente que usan apropiadamente los esquemas de Petrov-Galerkin del Caplítulo 12):

$$\mathbf{M}\dot{\bar{\mathbf{u}}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{Q}\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{f}} = 0 \qquad (13.71a)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}\dot{\bar{\mathbf{p}}} + \mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{u}} = 0 \qquad (13.71b)$$

La aproximación en el tiempo de la primera de estas ecuaciones puede hacerse de forma semi-explícita escribiendo

$$\mathbf{M}\Delta\bar{\mathbf{u}}_n = \Delta t[\bar{\mathbf{f}} - (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{p}}_n + \theta\Delta\bar{\mathbf{p}}_n)] \qquad (13.72)$$

donde el subíndice n indica los valores en t_n , $0 < \theta \leq 1$ y

$$\bar{\mathbf{u}}_{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_n + \Delta\bar{\mathbf{u}}_n \qquad (13.73a)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_{n+1} = \bar{\mathbf{p}}_n + \Delta\bar{\mathbf{p}}_n \qquad (13.73b)$$

Estas ecuaciones pueden separarse convenientemente en dos partes (similarmente a la *técnica de separación de operadores*)

$$\Delta\bar{\mathbf{u}}_n = \Delta\bar{\mathbf{u}}_n^* + \Delta\bar{\mathbf{u}}_n^{**} \qquad (13.74)$$

donde

$$\Delta\bar{\mathbf{u}}^* = \mathbf{M}^{-1}\Delta t[\bar{\mathbf{f}} - (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{Q}\bar{\mathbf{p}}_n] \qquad (13.75)$$

esta parte explícita se puede evaluar simplementemente sustituyendo una forma diagonal de $\mathbf{M}$ [e iterando si hace falta para obtener una mejor precisión como se discutió con anterioridad, ver Ec. (12.106)].

Esto deja solamente la determinación de

$$\Delta\bar{\mathbf{u}}^{**} = -\mathbf{M}^{-1}\Delta t\theta\mathbf{Q}\Delta\bar{\mathbf{p}}_n \qquad (13.76)$$

que se resuelve juntamente con una aproximación implícita de la Ec. (13.71b), escrita como

$$\tilde{\mathbf{M}}\Delta\bar{\mathbf{p}}_n + \mathbf{Q}^T\Delta t[(1-\theta)\bar{\mathbf{u}}_n + \theta\bar{\mathbf{u}}_{n+1}] = 0 \qquad (13.77)$$

Sustituyendo las Ecs. (13.73a), (13.74) y (13.76) en la anterior, se tiene

$$(\tilde{\mathbf{M}} - \Delta t^2\theta^2\mathbf{Q}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q})\Delta\bar{\mathbf{p}}_n = -\mathbf{Q}^T\Delta t(\bar{\mathbf{u}}_n + \theta\Delta\bar{\mathbf{u}}_n^*) \qquad (13.78)$$

que puede resolverse para el incremento de $\bar{\mathbf{p}}_n$, incluso si el fluido es altamente incompresible, esto es, cuando $\tilde{\mathbf{M}} = 0$.

Para un fluido totalmente incompresible, la Ec. (13.78) se reduce a evaluar

$$\Delta\bar{\mathbf{p}}_n = \frac{1}{\theta^2\Delta t}[\mathbf{Q}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}]^{-1}\mathbf{Q}^T(\bar{\mathbf{u}}_n + \theta\Delta\bar{\mathbf{u}}_n^*) \qquad (13.79)$$

El correspondiente valor de $\Delta\bar{\mathbf{u}}^{**}$ se cálcula ahora mediante la expresión (13.76) y esto completa el ciclo de cálculos en un incremento de tiempo.

Este esquema semi-implícito es todavía condicionalmente estable, pero siempre que $\theta \geq 1/2$ ya no es preciso aplicar el severo límite de incremento de tiempo crítico impuesto por la compresibilidad (velocidad de la onda) [ver Ec. (13.70)]. La limitación del incremento de tiempo surge de los términos convectivos contenidos en $\tilde{\mathbf{K}}$ y los términos viscosos contenidos en $\mathbf{K}$ dando

$$\frac{\| u \| \Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{1}{Re} + 1} - \frac{1}{Re} \qquad (13.80)$$

donde R_e es el número de Reynolds del elemento de la Ec. (13.66). La Ec. (13.80) es válida para una matriz de masa diagonal (ver pág. 532), donde se utiliza una modificación de la matriz de masa consistente).

Este límite es mucho menos severo que el de la Ec. (13.70) y ciertamente puede ser necesario imponerlo para obtener la precisión deseada.[82]

El cálculo en cada incremento de tiempo es ahora mucho más simple que un esquema totalmente implícito aplicado al sistema de ecuaciones. Sólo intervienen ahora cálculos explícitos utilizando una matriz constante lineal $\mathbf{Q}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}$. Debe advertirse, sin embargo, que esta matriz es de una conexión mayor que la de las matrices $\mathbf{K}$ y su solución no es trivial en problemas grandes. En la sección siguiente se presentan ideas que pueden utilizarse para economizar todavía más los cálculos.

La metodología del esquema anterior se introdujo por primera vez en el contexto del método de las diferencias finitas por Chorin[82] y fue más tarde utilizada extensamente en relación con el método de los elementos finitos por Donea *et al.*[83] y Hughes *et al.*[84,85] y otros.[86–90]

Este procedimiento proporciona una base iterativa para resolver los problemas estacionarios descritos en Sección 13.7 de forma alternativa.

13.8.3 *Un procedimiento semi-implícito alternativo –el laplaciano de la presión–.* El procedimiento anterior constituye efectivamente una *separación de operadores* . Comenzando de un valor conocido de $\bar{\mathbf{u}}_n$ se calcula $\Delta\bar{\mathbf{u}}_n^*$ suponiendo un valor constante de $\bar{\mathbf{p}}_n$ en el incremento, dejando para un paso posterior el cálculo de $\Delta\bar{\mathbf{u}}_n^{**}$. En el procedimiento alternativo que aquí se presenta se opera idénticamente hasta el punto en que se obtiene $\Delta\bar{\mathbf{u}}_n^*$, pero se vuelve a las ecuaciones diferenciales originales para determinar $\Delta\bar{\mathbf{u}}_n^{**}$.

Así, omitiendo el subíndice se vuelve a las variables discretizadas no espaciales, advirtiendo que la Ec. (13.76) proviene de la Ec. (13.58b), y puede escribirse como

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{u}^{**}}{\partial t} + \nabla(\Delta p) = 0 \tag{13.81a}$$

Similarmente, teniendo en cuenta que la Ec. (13.71b) es consecuencia de la (13.58a) puede escribirse

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Delta p}{\partial t} + \nabla^T(\mathbf{u}) = 0 \tag{13.81b}$$

puesto que $p = p_n + \Delta p$ cuando p_n es indepediente del tiempo.

La discretización en el *tiempo* de las ecuaciones anteriores proporciona

$$\Delta\mathbf{u}^{**} + \Delta t \nabla(\theta \Delta p_n) = 0 \tag{13.82a}$$

y

$$\frac{1}{c^2}\Delta p_n + \Delta t \nabla^T(\mathbf{u}_n + \theta\Delta\mathbf{u}_n^* + \theta\Delta\mathbf{u}_n^{**}) = 0 \tag{13.82b}$$

De éstas puede determinarse $\Delta\mathbf{u}_n^{**}$ y escribir (advirtiendo que $\nabla^T\nabla = \nabla^2$ es el operador laplaciano)

$$\frac{1}{c^2}\Delta p_n + \Delta t \nabla^T(\mathbf{u}_n + \theta\Delta\mathbf{u}_n^*) - \Delta t^2\theta^2\nabla^2(\Delta p_n) = 0 \tag{13.83}$$

En este momento se efectúa la discretización espacial y se aplica el procedimiento de Galerkin estándar. Haciendo

$$\Delta p = \mathbf{N}_p \Delta\bar{\mathbf{p}} \ , \quad \mathbf{u}_n = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}}_n \ , \quad \Delta\mathbf{u}_n^* = \mathbf{N}_u\Delta\bar{\mathbf{u}}_n^* \quad \text{y} \quad \Delta\mathbf{u}_n^{**} = \mathbf{N}_u\Delta\bar{\mathbf{u}}_n^{**} \tag{13.84}$$

se obtiene, de la Ec. (13.83),

$$\left(\tilde{\mathbf{M}} - \Delta t^2\theta^2 \int_\Omega \mathbf{N}_p^T \nabla^2 \mathbf{N}_p \, d\Omega\right)\Delta\bar{\mathbf{p}}_n = -\mathbf{Q}^T\Delta t(\bar{\mathbf{u}}_n + \theta\Delta\bar{\mathbf{u}}_n^*) \tag{13.85}$$

donde $\tilde{\mathbf{M}}$ y $\mathbf{Q}$ son precisamente las matrices obtenidas previamente, pero ahora se introduce una nueva matriz que resulta del operador laplaciano.

Naturalmente ahora la interpolación del incremento de p debe tener continuidad C_0. Integrando la ecuación anterior por partes puede escribirse

$$(\tilde{\mathbf{M}} + \Delta t^2\theta^2\mathbf{H})\Delta\bar{\mathbf{p}}_n = -\mathbf{Q}^T\Delta t(\bar{\mathbf{u}}_n + \theta\Delta\bar{\mathbf{u}}_n^*) \tag{13.86}$$

en la que se omite la integral de contorno que resulta de la integración por partes:

$$\left(\int_\Gamma \mathbf{N}_p^T \frac{\partial \mathbf{N}_p}{\partial n}\, d\Gamma\right)\Delta\bar{\mathbf{p}}_n \tag{13.87}$$

La ecuación (13.86) es muy similar a la (13.78) pero tiene la ventaja de que la matriz $\mathbf{H}$, esto es

$$\mathbf{H} = \int_\Omega \nabla\mathbf{N}_p^T \nabla\mathbf{N}_p \, d\Omega \tag{13.88}$$

tiene un ancho de banda más estrecho que la matriz correspondiente $\mathbf{Q}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}$ y es mucho más fácil de obtener.

Para completar los cálculos en un incremento de tiempo es necesario determinar $\Delta\bar{\mathbf{u}}^{**}$ discretizando la Ec. (13.81a). Se obtiene ahora

$$\Delta\bar{\mathbf{u}}^{**} = -\mathbf{M}^{-1}\Delta t\theta\mathbf{Q}\Delta\bar{\mathbf{p}}_n \tag{13.89}$$

que es idéntica a la (13.76), como era de esperar.

Los cálculos, utilizando este procedimiento alternativo, son más sencillos que los propuestos originalmente y parece que no son menos precisos. Es desconcertante, sin embargo, que puedan ignorarse las integrales de contorno de la Ec. (13.87) lo que es equivalente a suponer que sobre el contorno Γ

$$\Delta p = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial \Delta p}{\partial n} \equiv 0 \tag{13.90}$$

La razones de esto son evidentes observando la Ec. (13.81a), que representa las tensiones de equilibrio en ausencia de fuerzas viscosas y convectivas. Se observa que en los contornos donde se prescriben las velocidades $\Delta\mathbf{u}^{**} \equiv 0$ se cumple que

$$\boldsymbol{\nabla}(\Delta p) = 0 \tag{13.91a}$$

y en los contornos donde están prescritas las fuerzas de superficie se prescinde de dicha integral, suponiendo efectivamente que no hay cambios en dichas fuerzas de superficie. Esto equivale a suponer que

$$\Delta p = 0 \tag{13.91b}$$

La utilización de un operador laplaciano de la presión en el contexto anterior fue introducida por primera vez en el método de las diferencias

finitas[91] y más tarde adaptada al cálculo de los elementos finitos.[92] En las referencias [93] y [94] se presenta una generalización a problemas de flujo compresible.

Aunque la aplicación de la técnica basada en el "laplaciano Δp" estudiada en esta sección requiere continuidad C_0 para la presión, mientras que en la técnica de la sección anterior esto no era necesario, es posible utilizarlo en conjunción con campos discontinuos de dos formas. En la primera se supone que sólo Δp tiene continuidad C_0 y se interpola a los puntos de Gauss de cada elemento para el resto de los cálculos. En la segunda, la nueva matriz $\mathbf{H}$ se utiliza iterativamente para proporcionar la solución de la Ec. (13.78).

En los cálculos descritos en las dos secciones precedentes:

1. El incremento de tiempo utilizado depende únicamente de la matriz $\mathbf{M}$ de la Ec. (13.62a) y está sujeto a las restricciones de la Ec. (13.80). Para la ecuación estacionaria pueden utilizarse, naturalmente, valores arbitrarios de $\mathbf{M}$ para acelerar la convergencia.
2. Los cálculos no están afectados por la presencia o ausencia de compresibilidad.

13.8.4 *Ejemplos –condiciones de contorno a la salida–.* En las Figuras 13.14 y 13.15 se muestra un flujo incompresible estacionario transitorio alrededor de un cilindro en el que se usan los procedimientos de integración en el tiempo antes descritos en conjunción con técnicas de refinamiento adaptable de la malla.[95] Como hemos mencionado, dichos procedimientos sólo se consideran ahora óptimos para la solución de flujos estacionarios y transitorios. Este problema muestra la inexistencia de estados estacionarios para altos números de Reynolds a los que nos hemos referido con anterioridad.

En estos ejemplos es necesario definir las condiciones de contorno en la entrada y en la salida, y esto presenta unas dificultades en el dominio "exterior". En la entrada la situación es en general sencilla, y siempre que se encuentre a una cierta distancia de un obstáculo pueden utilizarse las condiciones de campo de velocidades libres (ver Figura 13.16). En la salida, sin embargo, esto no es posible si existe una onda oscilatoria, y aquí es conveniente suponer que hay *un gradiente nulo de las fuerzas de superficie.* Está condición debe imponerse definitivamente calculando las tensiones dentro del último elemento y utilizando éstas como fuerzas de superficie en los contornos a la salida.[93]

En este capítulo hemos presentado diversos métodos de discretización que gozan actualmente de popularidad. Existen otros muchos procedimientos alternativos y el lector encontrará muchos de ellos en las referencias [96] a [99].

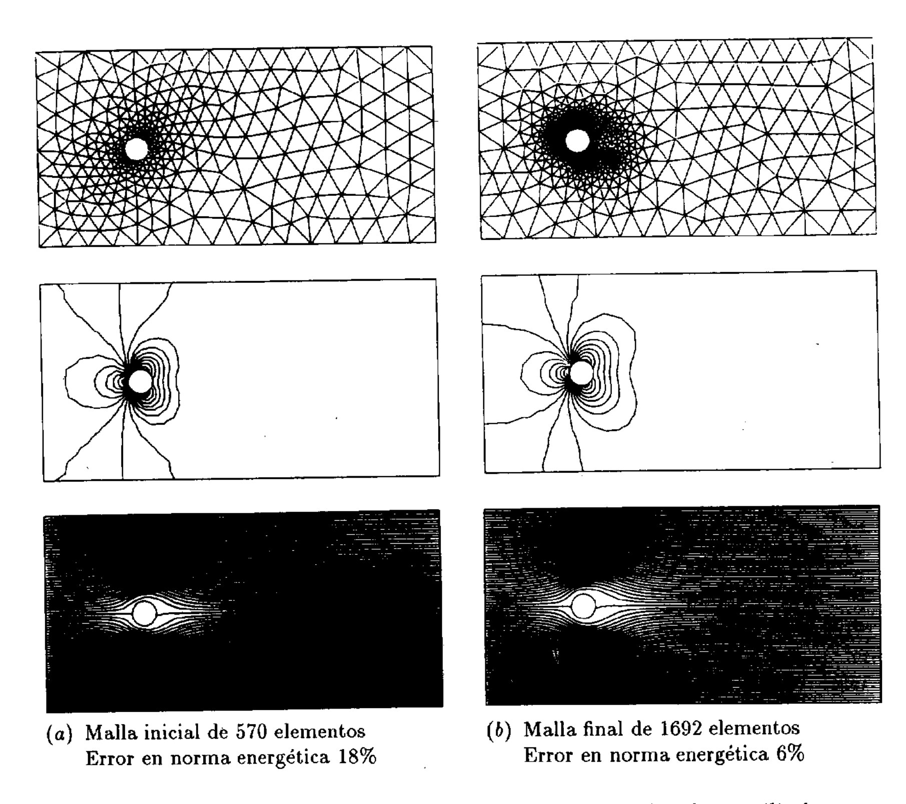


Figura 13.14 Flujo incompresible estacionario alrededor de un cilindro a $R_e = 60$. Se muestran en la malla las líneas de isopresión y las líneas de corriente con refinamiento adaptable de la malla.

13.9 Conclusiones finales

En este capítulo se han estudiado flujos incompresibles (o algo compresibles) mediante técnicas ampliamente utilizadas en mecánica de sólidos que hacen uso de métodos de eliminación gaussiana. La solución iterativa semi-explícita es un punto de partida que demuestra ser económico en problemas grandes.

Los próximos capítulos tratan sobre flujos compresibles y de aguas poco profundas que requerirán invariablemente cálculos totalmente explícitos debido al alto grado de no linealidad y también a la necesaria economía del cálculo. No es necesario recordar al lector que estos conocimientos pueden también utilizarse en el contexto de este capítulo si se supone una compresibilidad artificial.

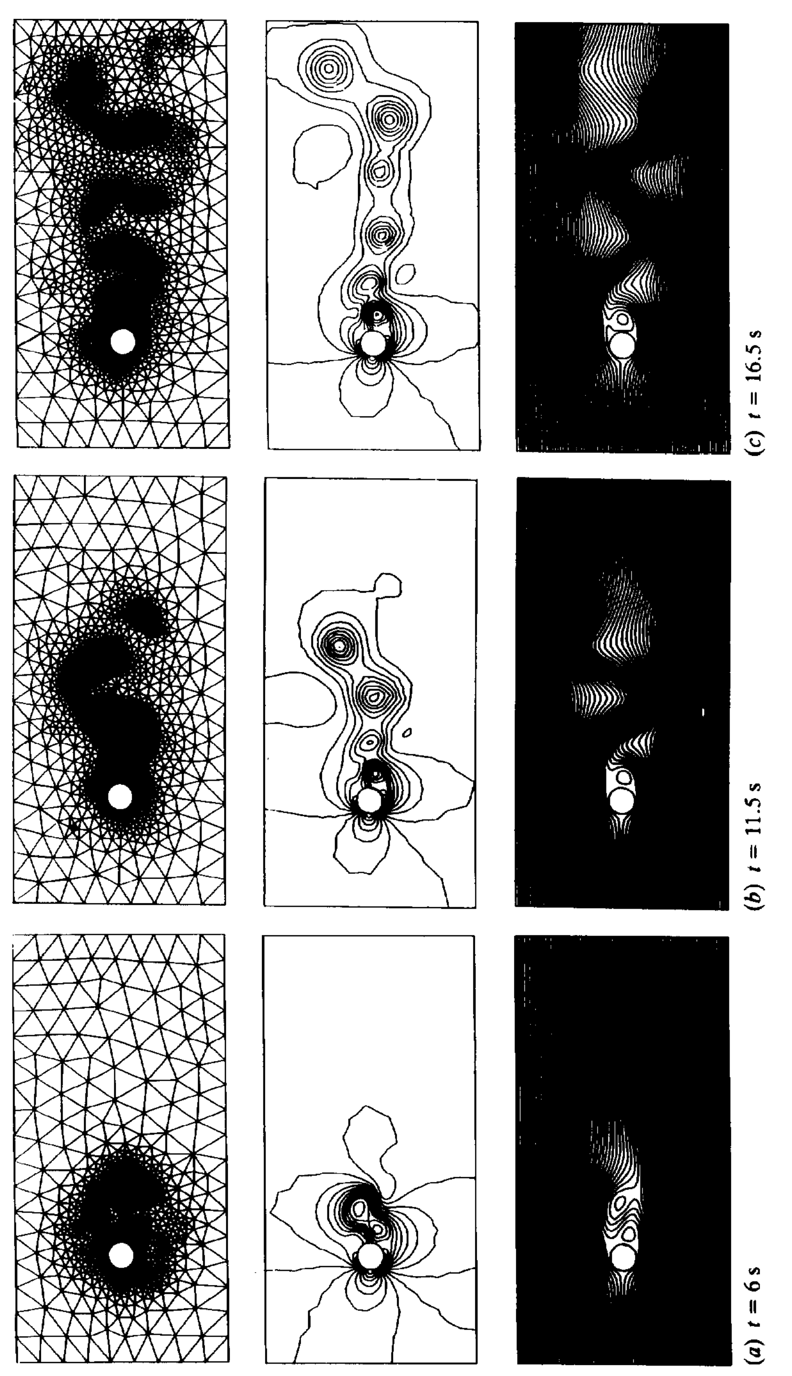


Figura 13.15 Flujo incompresible transitorio alrededor de un cilindro a $R_e = 250$. Se muestran la malla refinada de forma adaptable, las líneas de isopresión y las líneas de corriente para varios tiempos después de iniciarse el movimiento. Adviértase el desarrollo de los vórtices.

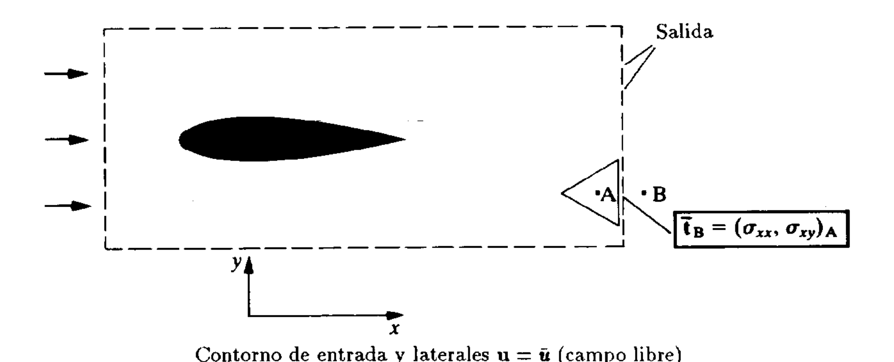


Figura 13.16 Contornos arbitrarios del dominio.

Referencias

1. J.T. ODEN, "A finite element analog of the Navier-Stokes equations", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **96**, EM4, 529–34, 1970.
2. J.T. ODEN, "The finite element in fluid mechanics", en *Lectures on Finite Element Method in Continuum Mechanics*, 1970, Lisboa (eds J.T. Oden y E.R.A Oliveira), pp. 151–86, University of Alabama Press, Huntsville, 1973.
3. O.C. ZIENKIEWICZ y C. TAYLOR, "Weighted residual processes in finite elements with particular reference to some transient and couled problems", en *Lectures on Finite Element Method in Continuum Mechanics*, 1970, Lisboa (eds J.T. Oden y E.R.A Oliveira), pp. 415–58, University of Alabama Press, Huntsville, 1973.
4. J.T. ODEN y D. SOMOGYI, "Finite element applications in fluid dynamics", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **95**, EM4, 821-6, 1969.
5. C. TAYLOR y P. HOOD, "A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element techniques", *Comp. Fluids.*, **1**, 73–100, 1973.
6. M. KAWAHARA, N. YOSHIMURA y K. NAKASAWA, "Analysis of steady incompressible viscous flow", en *Finite Element Methods for Flow Problems* (eds J.T. Oden, O.C. Zienkiewicz, R.H. Gallagher y C. Taylor), pp. 107–20, University of Alabama, Huntsville, 1974.
7. J.T. ODEN, O.C. ZIENKIEWICZ, R.H. GALLAGHER y C. TAYLOR (eds), *Finite Elements in Fluids*, Vols. 1 y 2, Wiley, Chichester, 1975.
8. R.H. GALLAGHER, O.C. ZIENKIEWICZ J.T. ODEN y M. MORANDI CECCHI (eds), *Finite Elements in Fluids*, Vol. 3, Wiley, Chichester, 1978.
9. J.T. ODEN y L.C. WELLFORD, Jr., "Analysis of viscous flow by the

finite element method", *JAIAA*, **10**, 1590–9, 1972.
10. A.J. BAKER, "Finite element solution algorithm for viscous incompressible fluid dynamics", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **6**, 89–101, 1973.
11. M.D. OLSON, "Variational finite element methods for two dimensional and Navier-Stokes equations", en *Finite Elements in Fluids* (eds J.T. Oden *et al.*) Vol. 1, pp. 57–72, Wiley, Chichester, 1975.
12. P. HOOD y C. TAYLOR, "Navier-Stokes equations using mixed interpolation", en *Finite Element Methods for Flow Problems* (eds J.T. Oden, O.C. Zienkiewicz, R.H. Gallagher y C. Taylor), pp. 121–32, University of Alabama Press., Huntsville, 1974.
13. C. HIRSCH, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988.
14. P.J. ROACH, *Computational Fluid Mechanics*, Hermosa Press, Albuquerque, New Mexico, 1972.
15. J.H. ARGYRIS y G. MARECZEK, "Potential flow analysis by finite elements", *Ing. Archiv.*, **41**, 1–25, 1972.
16. P. BETTESS y J.A. BETTESS, "Analysis of free surface flows using isoparametric finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **19**, 1675–89, 1983.
17. T. SARPAKAYA y G. HIRIART, "Finite element analysis of jet impingement on axisymmetric curved deflectors", en *Finite Elements in Fluids* (eds J.T. Oden, O.C. Zienkiewicz, R.H. Gallagher y C. Taylor), Vol. 2, cap. 14, pp. 265–79, Wiley, Chichester, 1975.
18. M.J. O'CARROLL, "A variational principle for ideal flow over a spillway", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **15**, 767-89, 1980.
19. D.S. MALKUS y T.J.R. HUGHES, "Mixed finite element method and reduced and selective integration techniques: a unification of concepts", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **15**, 63–81, 1978.
20. O.C. ZIENKIEWICZ y P.N. GODBOLE, "Viscous, incompressible flow with special reference to non-Newtonian (plastic) fluids", en *Finite Elements in Fluids* (eds J.T. Oden *et al.*), Vol. 2, pp. 25–55 Wiley, Chichester, 1975.
21. T.J.R. HUGHES, R.L. TAYLOR y J.F. LEVY, "A finite element method for incompressible flows", en *Proc. 2nd Int. Symp. on Finite Elements in Fluid Problems ICCAD*, Sta Margharita Ligure, Italia, pp. 1–6, 1976.
22. O.C. ZIENKIEWICZ y P.N. GODBOLE, "A penalty function approach to problems of plastic flow of metals with large surface deformation", *J. Strain Anal.*, **10**, 180–3, 1975.
23. O.C. ZIENKIEWICZ y S. NAKAZAWA, "The penalty function method and its applications to the numerical solution of boundary value problems", *ASME, AMD*, **51**, 157–79, 1982.

24. J.T. ODEN, "R.I.P. methods for Stokesian flow", en *Finite Elements in Fluids* (eds R.H. Gallagher, D.N. Norrie, J.T. Oden y O.C. Zienkiewicz), Vol. 4, cap. 15, pp. 305–18, Wiley, Chichester, 1982.
25. O.C. ZIENKIEWICZ, J.P. VILOTTE, S. TOYOSHIMA y S. NAKASAWA, "Iterative method for constrained and mixed approximation. An inexpensive improvement of FEM performance", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **51**, 3–29, 1985.
26. O.C. ZIENKIEWICZ, Y.C. LIU y G.C. HUANG, "Error estimates and convergence rates for various incompressible elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 2191–202, 1989.
27. M. FORTIN, "Old and new finite elements for incompressible flow", *Int. J. Num. Meth. Fluids.*, **1**, 347–64, 1981.
28. M. FORTIN y N. FORTIN, "Newer and newer elements for incompressible flow", en *Finite Elements in Fluids* (eds R.H. Gallagher, G.F. Carey, J.T. Oden y O.C. Zienkiewicz), Vol. 6, cap. 7, pp. 171–88, Wiley, Chichester, 1985.
29. M.S. ENGLEMAN, R.L. SANI, P.M. GRESHO y H. BERCOVIER, "Consistent v. reduced integration penalty methods for incompressible media using several old and new elements", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **4**, 25–42, 1982.
30. K. PALIT y R.T. FENNER, "Finite element analysis of two dimensional slow non-Newtonian flows", *AIChE J.*, **18**, 1163–9, 1972.
31. K. PALIT y R.T. FENNER, "Finite element analysis of slow non-Newtonian channel flow", *AIChE J.*, **18**, 628–33, 1972.
32. B. ATKINSON, C.C.M. CARD y B.M. IRONS, "Application of the finite element method to creeping flow problems", *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **48**, 276–84, 1970.
33. G.C. CORNFIELD y R.H. JOHNSON, "Theoretical prediction of plastic flow in hot rolling including the effect of various temperature distributions", *J. Iron and Steel Inst.*, **211**, 567–73, 1973.
34. C.H. LEE y S. KOBAYASHI, "New solutions to rigid plastic deformation problems using a matrix method", *Trans ASME, J. Eng. for Ind.*, **95**, 865–73, 1973.
35. J.T. ODEN, D.R. BHANDARI, G. YAGEWA y T.J. CHUNG, "A new approach to the finite element formulation and solution of a class of problems in coupled thermoelastoviscoplasticity of solids", *Nucl. Eng. Des.*, **24**, 420, 1973.
36. O.C. ZIENKIEWICZ, E. OÑATE y J.C. HEINRICH, *Plastic Flow in Metal Forming*, pp. 107–20, *ASME*, San Francisco, December, 1978.
37. O.C. ZIENKIEWICZ, E. OÑATE y J.C. HEINRICH, "A general formulation for coupled thermal flow of metals using finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**, 1497–514, 1981.

38. N. REBELO y S. KOBAYASHI, "A coupled analysis of viscoplastic deformation and heat transfer: I. Theoretical consideration; II Application", *Int. J. Num. Mech. Sci.*, **22**, 699–705, 1980, **22**, 707–718, 1980.
39. P.R. DAWSON y E.G. THOMPSON, "Finite element analysis of steady state elastoviscoplastic flow by the initial stress rate method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **12**, 47–57, 382–3, 1978.
40. Y. SHIMIZAKI y E.G. THOMPSON, "Elasto-visco-plastic flow with special attention to boundary conditions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**, 97–112, 1981.
41. O.C. ZIENKIEWICZ, P.C. JAIN y E. OÑATE, "Flow of solids during forming and extrusion: some aspects of numerical solutions", *Int. J. Solids Struct.*, **14**, 15–38, 1978.
42. S. NAKAZAWA, J.F.T. PITTMAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Numerical solution of flow and heat transfer in polymer melts", en *Finite Elements in Fluids* (ed. R.H Gallagher *et al.*), Vol. 4, cap. 13 pp. 251–83, Wiley, Chichester, 1982.
43. S. NAKAZAWA, J.F.T. PITTMAN y O.C. ZIENKIEWICZ "A penalty finite element method for thermally coupled non-Newtonian flow with particular reference to balancing dissipation and the treatment of history dependent flows", en *Int. Symp. of Refined Modelling of Flows*, 7–10 Sept., 1982, Paris.
44. R.E. NICKELL, R.I. TANNER y B. CASWELL, "The solution of viscous incompressible jet and free surface flows using finite elements", *J. Fluid Mech.*, **65**, 189–206, 1974.
45. R.I. TANNER, R.E. NICKELL y R.W. BILGER, "Finite element method for the solution of some incompressible non-Newtonian fluids mechanics problems with free surface", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **6**, 155–74, 1975.
46. J.M. ALEXANDER y J.W.H. PRICE, " Finite element analysis of hot metal forming", en *18th MTDR Conf.*, pp. 267–74, 1977.
47. S.I. OH, G.D. LAHOTI y A.T. ALTAN, "Application of finite element method to industrial metal forming processes", en *Proc. Conf. on Industrial Forming Processes*, pp. 146–53, Pineridge Press, Swansea, 1982.
48. J.F.T PITTMAN, O.C. ZIENKIEWICZ, R.D. WOOD y J.M. ALEXANDER (eds) *Numerical Analysis of Formig Processes*, Wiley, Chichester, 1984.
49. O.C. ZIENKIEWICZ "Flow formulation for numerical solutions of forming problems", en *Numerical Analysis of Forming Processes*, (eds J.F.T Pittman *et al.*) cap. 1, pp. 1–44, Wiley, Chichester, 1984.
50. S. KOBAYASHI, "Thermoviscoplastic analysis of metal forming problems by the finite element method", en *Numerical Analysis of Forming Processes*, (eds J.F.T Pittman *et al.*) cap. 2, pp. 45–70, Wiley, Chichester, 1984.

51. W. JOHNSON y P.B. MELLOR, *Engineering Plasticity*, Van Nostrand-Reinhold, London, 1973.
52. G.C. HUANG, "Error estimates and adaptive remeshing in finite element analysis of forming processes", Ph.D. thesis , University of Wales, Swansea, 1989.
53. G.C. HUANG, Y.C. LIU y O.C. ZIENKIEWICZ, "Error control, mesh updating schemes and automatic adaptive remeshing for finite element analysis of unsteady extrusion processes", en *Modelling of Metal Forming Processes* (eds J.L. Chenot y E. Oñate), pp. 75–83, Kluwer Academic, Dordrecht, 1988.
54. O.C. ZIENKIEWICZ, Y.C. LIU y G.C. HUANG, "An error estimate and adaptive refinement method for extrusion and other forming problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **25**, 23–42, 1988.
55. O.C. ZIENKIEWICZ, Y.C. LIU, J.Z. ZHU y S. TOYOSHIMA, "Flow formulation for numerical solution of forming processes. II-Some new directions", en *Proc. 2nd Int. Conf. on Num. Meth. in Industrial Forming Processes, NUMIFORM 86*, (eds K. Mattiasson, A. Samuelsson, R.D. Wood y O.C. Zienkiewicz), A.A. Balkema, Rotterdam, 1986.
56. T. BELYTCHKO, D.P. FLANAGAN y J.M. KENNEDY, "Finite element methods with user controlled mesh for fluid structure interaction", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **33**, 669–88, 1982.
57. J. DONEA, S. GIULLIANI y J.I. HALLEUX, "An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interaction", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **75**, 195–214, 1989.
58. P.J.G. SCHREURES, F.F. VELDPAUS y W.A.M. BRAKALMANS, "An Eulerian and Lagrangian finite element model for the simulation of geometrical non-linear hyper elastic and elasto-plastic deformation processes", en *Proc. Conf. on Industrial Forming Processes*, pp. 491–500, Pineridge Press, Swansea, 1983.
59. J. DONEA, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods", en *Computation Methods for Transient Analysis*, (eds T. Belytchko y T.J.R. Hughes), cap. 10, pp. 474–516, Elsevier, Amsterdam, 1983.
60. J. VAN DER LUGT y J. HUETNIK, "Thermo-mechanically coupled finite element analysis in metal forming processes", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **54**, 145–60, 1986.
61. E. OÑATE y O.C. ZIENKIEWICZ, "A viscous sheet formulation for the analysis of thin sheet metal forming", *Int. J. Mech. Sci.*, **25**, 305–35, 1983.

62. N.M. WANG y B. BUDIANSKY, "Analysis of sheet metal stamping by a finite element method", *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **45**, 73, 1976.
63. A.S. WIFI, "An incremented complete solution of the stretch forming and deep drawing of a circular blank using a hemispherical punch", *Int. J. Mech. Sci.*, **18**, 23–31, 1976.
64. J. BONET, R.D. WOOD y O.C. ZIENKIEWICZ, "Time stepping schemes for the numerical analysis of superplastic forming of thin sheets", en *Modelling of Metal Forming Processes*, (eds J.L. Chenot y E. Oñate), pp. 179–86, Kluwer Academic, Dordrecht, 1988.
65. E. MASSONI, M. BELLET y J.L. CHENOT, "Thin sheet forming numerical analysis with membrane approach", en *Modelling Metal Forming Processes*, (eds J.L. Chenot y e. Oñate), Kluwer Academic, Dordrecht, 1988.
66. R.D. WOOD, J. BONET y A.H.S. WARGEDIPURA, "Simulation of the superplastic forming of thin sheet components using the finite element method", en *NUMIFORM 89 Proc.*, pp. 85–94, Balkhema Press, 1989.
67. J. BONET, R.D. WOOD y O.C. ZIENKIEWICZ, "Finite element modelling of the superplastic forming of a thin sheet", *Proc. Conf. on Superquality and Superplastic Forming* (eds C.H. Hamilton y N. E. Paton), The Minerals, Metals and Materials Society, USA, 1988.
68. R. KEUNINGS y A.J. CROCHET, "Numerical simulation of the flow of a viscoelastic fluid through an abrupt contraction", *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **14**, 279–99, 1984.
69. Y. SHIMAZAKI y E.G. THOPSON, " Elasto-viscoplastic flow with special attention to boundary conditions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**, 97–112, 1981.
70. R.I. TANNER, *Enginnering Rheology*, Clarendon Press, Oxford, 1988.
71. P.M. GRESHO y R. LEE, "Don't suppress the wiggles, they're telling you something", *Computers and Fluids*, **9**, 223–55, 1981.
72. R. LEE, P.M. GRESHO, S. CHAN, R. SANI y M. CULLEN, "Conservation law for primitive variable formulations of the incompressible flow equation using the Galerkin finite element methods", en *Finite Elements in Fluids*, (eds R.H. Gallagher, D.H. Norrie, J.T. Oden y O.C. Zienkiewicz), Vol. 4, cap. 2, pp. 21–46, Wiley, Chichester, 1982.
73. O.C. ZIENKIEWICZ, R. LÖHNER, K. MORGAN y S. NAKAZAWA, "Finite elements in fluid mechanics–a decade of progress", en *Finite Elements in Fluids* (eds R.H. Gallagher *et al.*), Vol. 5, cap. 1, pp. 1–26, Wiley, Chichester, 1984.
74. A.N. BROOKS y T.J.R. HUGHES, "Streamline upwind Petrov-Galerkin formulation for convection flows with paricular references

to the incompressible Navier-Stokes equation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **32**, 119–259, 1982.
75. O.C. ZIENKIEWICZ, R.H. GALLAGHER y P. HOOD, "Newtonian and non-Newtonian viscous incompressible flow. Temperature induced flows. Finite element solutions", en *Mathematics of Finite Elements and Applications* (ed. J. Whiteman), Vol. II, cap. 20, pp. 235–67, Academic Press, London, 1976.
76. J.C. HEINRICH, R.S. MARSHALL y O.C. ZIENKIEWICZ, "Penalty function solution of coupled convective and conductive heat transfer", en *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows* (eds C. Taylor, K. Morgan y C.A. Brebbia), pp. 435–47, Pentech Press, 1978.
77. M. STRADA y J.C. HEINRICH, "Heat transfer rates in natural convection at high Rayleigh numbers in rectangular enclosures", *Num. Heat Transfer*, **5**, 81–92, 1982.
78. J.C. HEINRICH y C.C. YU, "Finite element simulation of bouyancy driven flow with emphasis on natural convection in a horizontal circular cylinder", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **69**, 1–27, 1988.
79. H. HIRANO, H. HARA y M. KAWAHARA, "Two step finite element methods for high Reynolds number viscous flows", en *Proc. 4th Int. Symp. on Finite Elements in Flow Analysis*, pp. 121–8, University of Tokyo Press, 1982.
80. E. GODE y I.L. RHYMING, "3-D computation of the flow in a Francis runner", *Sulzer Tech. Rev.*, **4**, 31–5, 1987.
81. A. SAXER, H. FELICI, C. NEWRY y I.L. RHYMING, "Euler flows in hydraulic machinery and ducts realted to boundary condition formualtion', Swiss Federation Institute of Technology, Lausanne, Switzerland, 1987.
82. A.J. CHORIN, "A numerical methos for solving incompressible viscous problems", *J. Comp. Phys.*, **2**, 12–26, 1967.
83. J. DONEA, S. GIULIANI y H. LAVAL, "Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equation by the fractional step method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **33** , 53–73, 1982.
84. T.J.R. HUGHES, W.K. LIU y T.K. ZIMMERMAN, "Lagrangian-Eulerian finite element formulations for incompressible viscous flows", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **29**, 329–49, 1981.
85. T.J.R. HUGHES, W.K. LIU y A. BROOKS "Review of finite element analaysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation", *J. Comp. Phys.*, **30**, 1–60, 1979.
86. J. KIM y P. MOIN, "Applications of fractional step methods to incompressible Navier-Stokes equations", *J. Comp. Phys.*, **5**, 308, 1985.
87. P.M. GRESHO, R. CHAN, C. UPSON y R. LEE, "A modified finite element method for solving the time dependent incompressible Navier-

Stokes equations", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, I, **4**, 557–618, pt. II, 619–640, 1984.
88. P.M. GRESHO y R. SANI, "On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equation", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **7**, 1111–48, 1987.
89. G. SCHNEIDER, G. RATHBY y M.M. YOVANOVICH, "Finite element analysis of incompressible fluid incorporating equal order pressure and velocity interpolation", en *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow* (eds C. Taylor, K. Morgan y C.A. Brebbia), Pentech Press, Plymounth, 1978.
90. M. KAWAHARA y K. OHMIYA, "Finite element analysis of density flow using the velocity correction method", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **5**, 981–93, 1985.
91. S.V. PATANKAR y D.B. SPALDING, "A calculation procedure for heat mass and momentum transfer in 3-D parabolic flows", *Int. J. Heat and Mass Transfer.*, **15**, 1787–806, 1972.
92. G. COMINI y S. DEL GUIDICE, " Finite element solution of the incompressible Navier-Stokes equation", *Num. Heat Transfer*, **5**, 463–78, 1972.
93. O.C. ZIENKIEWICZ, J. SZMELTER y J. PERAIRE, "Compressible and incompressible flow. An algorithm for all seasons", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **78**, 105–21, 1990.
94. J. SZMELTER, "Computational methods for compressible and incompressible fluid mechanics", Ph.D. thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1989.
95. J. WU, Z.J. ZHU, J. SZMELTER y O.C. ZIENKIEWICZ, "Error estimation and adaptivity in Navier-Stokes incompressible flows", *Comp. Mech.*, **6**, 259–70, 1990.
96. R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations*, North Holland, 1977.
97. M.O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI y J. PERIAUX, "Numerical method for the Navier-Stokes equation. Application to the simulation of compressible and incompressible viscous flow", *Comp. Phys. Reports.*, **6**, 73–187, 1987.
98. R. GLOWINSKI, B. MANTEL y J. PERIAUX, "Numerical solution of the time dependent Navier-Stokes equation for incompressible viscous fluids by finite elements and alternating direction methods", en *Numerical Methods in Aeronautics; Fluid Dynamics* (ed. P.L. Roe), pp. 309–36, Academic Press, London, 1982.
99. T.E. TEZDUYAR y J. LIOU, "Adaptive implicit-explicit finite element algorithms for fluid mechanics problems", en *Recent Developments in Comput. Fluid Mech.* (eds T.E. Tezduyar y T.J.R. Hughes), AMD 95, pp. 163–84, American Society of Mech. Eng., 1988.

Capítulo 14

FLUJO DE GASES COMPRESIBLES A ALTA VELOCIDAD

14.1 Introducción

Los problemas que presenta el flujo de gases a alta velocidad son de una clara importancia práctica. Las situaciones varían desde *flujos externos* asociados con aeronáutica a *flujos internos* típicos de problemas de turbomaquinaria. El alto coste de los ensayos experimentales ha motivado desde hace tiempo el estudio de las posibilidades de los métodos de cálculo y la mayor parte de los desarrollos se han concentrado en la utilización de los métodos de diferencias finitas y de la técnica asociada de volúmenes finitos. Ha sido únicamente en estos últimos años cuando se ha advertido el potencial que ofrece el método de elementos finitos y este campo se está expandiendo rápidamente.

Una de las principales ventajas de utilizar la aproximación de elementos finitos es su capacidad de ajustar geometrías complejas y de permitir un refinamiento local allí donde sea necesario. Sin embargo, la mejora en la solución es también de gran importancia ya que en los problemas prácticos se precisa en general de una discretización en tres dimensiones con un número de grados de libertad mucho mayor que en problemas típicos de estructuras ($10^5 - 10^6$ GDL son usuales en dichos casos).

Para problemas tan grandes los métodos de solución directa no son obviamente practicables y se utilizan invariablemente métodos iterativos basados casi siempre en métodos de cálculo transitorios. Aquí, naturalmente, seguiremos y aceptaremos mucho de lo que ya está establecido en aplicaciones de diferencias finitas, aunque generalmente perderemos algo de la eficacia computacional asociada con las *mallas estructuradas* utilizadas típicamente en estos casos. Sin embargo, la reducción en el tamaño del problema que, como veremos, puede obtenerse mediante refinamientos locales y adaptividad, compensará esta pérdida (aunque, por supuesto, las mallas estructuradas no están excluidas de la solución por elementos finitos).

En los capítulos precedentes se han introducido las ecuaciones básicas

que gobiernan el flujo de gases compresibles y ciertamente se ha mostrado cómo puede incorporarse una pequeña cantidad de compresibilidad en los procedimientos desarrollados específicamente para flujo incompresible. Aquí trataremos con flujos a altas velocidades con números de Mach generalmente mayores de 0.6. Dichos flujos involucrarán normalmente la formación de ondas de choque con discontinuidades. Por esta razón nos concentraremos en la utilización de elementos de bajo orden y métodos explícitos, siguiendo las técnicas de aproximación desarrolladas en el Capítulo 12.

Debe reconocerse aquí el trabajo pionero de los colegas del autor, Morgan, Löhner y Peraire. Ha sido, pues, su aportación la que ha abierto las puertas para el análisis de problemas prácticos de aeronáutica por elementos finitos. En este capítulo nos referiremos a su trabajo con frecuencia y ciertamente los numerosos ejemplos que se presentan ilustran la efectividad del mismo.

14.2 Ecuaciones básicas

En el capítulo precedente se obtuvieron las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan el flujo compresible [ver Ecs. (13.21) y (13.22)] y que repetiremos aquí solamente utilizando la notación indicial. Así escribiremos para $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q} = 0 \tag{14.1}$$

con

$$\mathbf{U}^T = [\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho E] \tag{14.2a}$$

$$\mathbf{F}_i^T = [\rho u_i, \rho u_1 u_i + \rho\delta_{1i}, \rho u_2 u_1 + p\delta_{2i}, \rho u_3 u_i + p\delta_{3i}, \rho H u_i] \tag{14.2b}$$

$$\mathbf{G}_i^T = \left[0, -\tau_{1i}, -\tau_{2i}, -\tau_{3i}, -\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij} u_i) - k\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\right] \tag{14.2c}$$

y

$$\mathbf{Q}^T = [0, -\rho f_1, -\rho f_2, -\rho f_3, -\rho f_i u_i - q_H] \tag{14.2d}$$

En donde

$$\tau_{ij} = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij}\frac{2}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right] \tag{14.2e}$$

Las ecuaciones anteriores necesitan "cerrarse" con la adición de una ley constitutiva relacionando la presión, densidad y energía [ver Ecs. (13.13) y (13.14)]. Para muchos fluidos basta con la ley de los gases ideales que se escribe como

$$\rho = \frac{p}{RT} \tag{14.3}$$

donde R es la constante universal de los gases.

En términos de calor específico

$$R(c_p - c_v) = (\gamma - 1)c_v \tag{14.4}$$

donde

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

es el cociente entre los calores específicos a presión y volumen constante.

La energía interna e viene dada por

$$e = c_v T = \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)\frac{p}{\rho} \tag{14.5}$$

y, por tanto

$$\rho E = \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)p + \frac{u_i u_i}{2} \tag{14.6a}$$

$$\rho H = \rho E + p = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)p + \frac{u_i u_i}{2} \tag{14.6b}$$

Las variables del problema se escogen usualmente como el conjunto de las Ecs. (14.2a), es decir

$$\rho, \ \rho u_i \ \text{ y } \ \rho E$$

pero, naturalmente, pueden utilizarse otros conjuntos de variables, aunque se perdería la forma conservativa de la Ec. (14.1).

En muchos de los problemas que se discuten en esta sección se supondrá un comportamiento sin viscosidad, con $\mathbf{G}_i = 0$, y resolveremos entonces las ecuaciones de Euler.

En muchos problemas, la solución de Euler proporcionará información sobre las características principales del flujo y bastará para ciertos propósitos, especialmente si se complementa mediante cálculos de capa límite idependientes. Sin embargo, en principio es posible incluir los efectos viscosos sin mucha complicación aparente. Aquí en general nunca se obtendrán condiciones estacionarias ya que la alta velocidad del flujo estará asociada con efectos de turbulencia y éstos son claramente de una escala tan pequeña que sólo pueden resolverse con elementos de tamaño muy pequeño. Si se utiliza una malla de elementos de tamaño "finito", entonces dichos efectos de turbulencia desaparecen y pueden obtenerse soluciones estacionarias en áreas donde no haya separación de flujo. En algunos ejemplos incluiremos dichas soluciones de Navier-Stokes utilizando una dependencia de la viscosidad con la temperatura siguiendo la ley de

Sutherland.[1] Dicha ley se escribe para el aire en el sistema SI de unidades, como

$$\mu = \frac{1.45 T^{3/2}}{T + 110} \times 10^{-6} \tag{14.7}$$

donde T está expresada en $^\circ K$.

14.3 Condiciones de contorno –flujo subsónico y supersónico–

La cuestión de las condiciones de contorno en las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible no es en absoluto trivial, y está expresada de forma general por Demkowicz *et al.*[2], quienes han determinado su influencia en la existencia y fiabilidad de la solución. Discutiremos por separado el caso de flujo no viscoso de Euler y el problema completo de Navier-Stokes.

14.3.1 *Ecuaciones de Euler.* En este caso sólo aparecen primeras derivadas y el número de condiciones de contorno es menor que para el problema completo de Navier-Stokes.

Para un *contorno de pared rígida*, Γ_u, sólo es preciso especificar la componente normal de la velocidad u_n (igual a cero si la pared no se mueve). Más aún, en ausencia de conductividad el flujo de energía a través del contorno es cero y, por consiguiente, $\rho E(y\ \rho)$ no están definidos. En general, el dominio de análisis estará limitado por *contornos exteriores* arbitrariamente seleccionados, Γ_s, para los casos de flujos exteriores o interiores, como los que se muestran en la Figura 14.1.

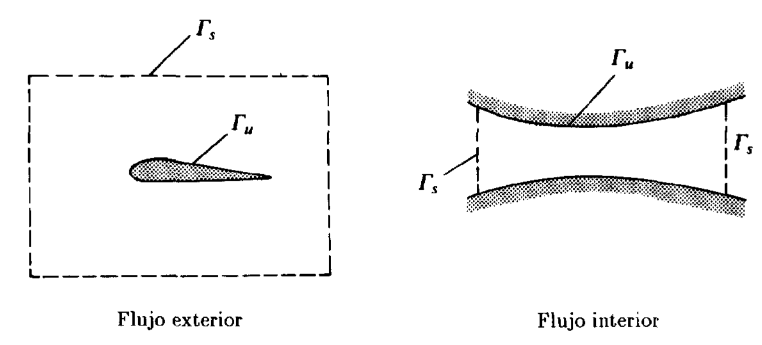


Figura 14.1 Contornos de un dominio de cálculo. Γ_u, contorno sólido; Γ_s, contorno libre

Aquí, como se discutió en la Sección 12.3.4, será necesario realizar un análisis linealizado de Rieman en la dirección de la normal exterior al contorno x_n para determinar las velocidades de propagación de la onda

de la Ec (12.132). Para dicha linealización de las ecuaciones de Euler se encontrarán tres valores de velocidades de propagación

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u_n \\ \lambda_2 &= u_n + c \\ \lambda_3 &= u_n - c \end{aligned} \tag{14.8}$$

donde u_n es la componente de velocidad normal y c la celeridad de la onda compresible dada por

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \tag{14.9}$$

Como naturalmente no se pueden propagar las perturbaciones a velocidades mayores que las de las Ec. (14.8), y en el caso de flujo supersónico, es decir, cuando el número de Mach local

$$M = \frac{|u_n|}{c} \geq 1 \tag{14.10}$$

tenemos que distinguir dos posibilidades:

a) *condición supersónica de flujo entrante*, donde $u_n < -c$, y el dominio de análisis no puede influenciar el exterior; para dichos contorno deben definirse todas las componentes del vector $\mathbf{U}$, y

b) *condiciones supersónicas de flujo saliente*, donde $u_n > c$, y en este caso no se puede prescribir ninguna componente de $\mathbf{U}$.

Para contornos subsónicos la expresión es más compleja y en este caso los valores de $\mathbf{U}$ que puedan definirse son las componentes de las variables de Rieman a la entrada. Sin embargo, esto suele presentar dificultades ya que la onda entrante puede no ser conocida y ser necesario aceptar soluciones intermedias como en el tratamiento de problemas elípticos con contornos infinitos.

14.3.2. *Ecuaciones de Navier-Stokes.* Aquí, debido a la presencia de derivadas segundas, son necesarias condiciones de contorno adicionales.

Para el *contorno de pared sólida*, Γ_u, se prescriben todas las componentes de la velocidad suponiendo, como en el capítulo previo para el caso incompresible, que el flujo está fijo a la pared. Así para un contorno estacionario se pone

$$u_i = 0$$

Más aún, si la conductividad es importante, las temperaturas o el flujo de calor en el contorno se especifican en la forma usual.

Para los *contornos exteriores*, Γ_s, de entrada de flujo supersónico, el tratamiento es idéntico al utilizado para las ecuaciones de Euler. Sin embargo, para flujos salientes debe efectuarse una aproximación adicional, bien haciendo las fuerzas de superficie igual a cero o anulando sus gradientes en la forma descrita en la Sección 13.8.4.

14.4 Aproximación numérica y algoritmos de solución

14.4.1 *El algoritmo de dos pasos.* En el Capítulo 12 se han presentado las características escenciales de la discretización de las ecuaciones de transporte del tipo de la (14.1). Aquí utilizaremos exclusivamente la forma de dos pasos explícita del esquema de Taylor-Galerkin, descrito en la Sección 12.3.3, debido a su economía y simplicidad. En lo que sigue se resume el procedimiento descrito entre las Ecs. (12.128) y (12.129), utilizando siempre una misma aproximación para $\mathbf{U}$ y $\mathbf{F}_i$ como

$$\mathbf{U} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{U}} \qquad \mathbf{F}_i = \mathbf{N}\bar{\mathbf{F}}_i \tag{14.11}$$

Paso 1. Calcular en cada punto de integración de un elemento

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{U}^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} + \mathbf{Q}^n\right) \tag{14.12}$$

con

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\bar{\mathbf{F}}_i \qquad \text{y} \qquad \mathbf{U}^n = \mathbf{N}\bar{\mathbf{U}}^n$$

y evaluar

$$\mathbf{F}_i^{n+1/2} = \mathbf{F}_i(\mathbf{U}^{n+1/2})$$

Para triángulos lineales esto debe hacerse en las coordenadas del centro de gravedad (es decir, en un solo punto).

Paso 2. Calcular $\Delta\mathbf{U}^n$ tal que

$$\bar{\mathbf{U}}^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}^n + \Delta\bar{\mathbf{U}}^n$$

utilizando la Ec. (12.79), o sea

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\mathbf{U}}^n = -\mathbf{M}^{-1}\Delta t \Bigg[&\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i}(\mathbf{F}_i^{n+1/2} + \mathbf{G}_i^n)\, d\Omega \\ &+ \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{Q}^n d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{N}^T(\mathbf{F}_i^{n+1/2} + \mathbf{G}_i^n)\, d\Gamma\Bigg]\end{aligned} \tag{14.13}$$

Aquí, naturalmente, se utilizará el método iterativo discutido en el Capítulo 12 [Ec. (12.106)] con la forma diagonal de la matriz $\mathbf{M}_L$ para obtener el comportamiento óptimo en el caso transitorio.

En caso de que se use este algoritmo para obtener una solución estacionaria, en la que se detienen las iteraciones cuando $\Delta\bar{\mathbf{U}}^n = 0$, no hay necesidad de utilizar la forma consistente de $\mathbf{M}$; sólo se utiliza la forma diagonal $\mathbf{M}_L$ en (14.13) lo que permite un ligero aumento del incremento de tiempo crítico para la estabilidad. Para problemas de convección pura esto da, siguiendo la Ec. (12.99), un número de Courant $C = 1$, y la condición de estabilidad es

$$\Delta t \le \Delta t_{\text{crit}} = \frac{h}{|u| + c} \tag{14.14}$$

El algoritmo descrito más arriba se desarrolla en las referencias [3] a [6] donde se describe la técnica de descomposición en dominios para evitar números de Courant pequeños.

El algoritmo de aproximación puede realmente utilizar cualquier conjunto de funciones de discretización de clase C_0. En los ejemplos que siguen se han utilizado solamente las aproximaciones lineales más sencillas sobre triángulos en dos dimensiones y tetraedros en tres. Esto se ha hecho deliberadamente, ya que dichos elementos se adaptan muy bien a las posibles discontinuidades inherentes en la naturaleza ondulatoria del problema, y también permiten diagonalizar la matriz de masa $\mathbf{M}$ de una forma sencilla.

14.4.2 *El tamaño del incremento de tiempo local para problemas estacionarios.* Hemos advertido en el Capítulo 12 que el esquema de Taylor-Galerkin de la Ec. (12.102) da la cantidad correcta de difusión equilibradora en problemas estacionarios si $\Delta t = \Delta t_{\text{crit}}$.
Ciertamente, la inserción de este valor puede hacerse únicamente en el término correspondiente de difusión sin afectar la estabilidad en grado substancial. Puede demostrarse que esto es equivalente a utilizar el Δt anterior en la expresión del primer paso, esto es, en las Ec. (14.12), *independientemente para cada elemento*, mientras, que se utiliza un Δt apropiado, estable, en la parte exterior del paréntesis de la Ec. (14.13) correspondiente al segundo paso del algoritmo general. Se recomienda hacer siempre esto para asegurar la solución estacionaria óptima.

Con referencia a este segundo valor de Δt que viene fijado por los requisitos de estabilidad, encontraremos todavía que si los tamaños de los elementos difieren mucho dentro del dominio, la condición de la Ec. (14.14) conducirá a una convergencia muy lenta debido a los bajos y poco económicos números de Courant en algunos elementos. Aquí de nuevo se advierte que se utiliza la matriz de masa $\mathbf{M}_L$ para problemas

estacionarios y sus coeficientes pueden *escalarse localmente* para asegurar que el número de Courant sea tan próximo a la unidad como sea posible en cada nodo.

Esto se logra determinando el número de Courant más alto de cualquier elemento que concurre en un nodo particular y ajustando el Δt al valor crítico que corresponde en ese nodo. Este procedimiento se conoce como "incremento de tiempo local" y naturalmente no conduce a una solución transitoria real pura, pero asegura una convergencia rápida a la solución estacionaria.

14.5 Formación de ondas de choque y difusión artificial

La naturaleza no lineal de las ecuaciones de Euler conducirá frecuentemente a la formación de ondas de choque en las cuales se produce una fuerte discontinuidad. Si dichas ondas de choque son estacionarias, los flujos $\mathbf{F}_i$ no varían, pero las componentes individuales del vector $\mathbf{U}$ serán discontínuas [ver Ecs. (12.138)].

Pueden producirse diferentes formas de dichas discontinuidades (como se discute en la referencia 1, pág. 90). La forma más común son *superficies de choque* a través de las cuales existe un flujo de masa. Aquí se encontrarán discontinuidades o saltos de la densidad ρ, la presión p, la energía E y la componente de velocidad u_n en la dirección normal a la superficie del choque. Solamente las componentes tangenciales de la velocidad permanecen continuas en dichas ondas de choque.

Otra forma es la de una *discontinuidad de contacto*, en la cual existe una componente de velocidad nula en dirección normal a la superficie de discontinuidad. En este caso la presión p permanece continua, pero puede aparecer discontinuidad de ρ y E. Las componentes de la velocidad tangencial permanecen de nuevo continuas.

Una variante del caso anterior es una *superficie de deslizamiento*, en la cual, de nuevo, la componente de la velocidad normal a la superficie es cero en el estado estacionario. Ahora, sin embargo, sólo la presión permanece continua y existen saltos en las velocidades tangenciales.

El caso más serio y difícil de tratar es el de la superficie de onda de choque general y para evitar soluciones oscilatorias es importante añadir a la formulación algún tipo de difusión artificial de la forma discutida en la Sección 12.14. En el contexto de las ecuaciones de Euler/Navier-Stokes se han utilizado diferentes formas de dicha difusión artificial. La más obvia es la aplicación del procedimiento sugerido por Lapidus,[7–9] en el cual el coeficiente de difusión se basa [ver Ec. (12.139)] en el máximo gradiente de alguna componente escalar de $\mathbf{U}$. MacCormack y Baldwin[10] han sugerido utilizar una forma similar basada en las derivadas segundas de alguna cantidad escalar –escogiendo generalmente la presión–.

El coeficiente de difusión es, por tanto, de la forma

$$\tilde{k} = C_a h^\alpha \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \right| \equiv C_a h^\alpha \nabla^2 p \tag{14.15}$$

donde C_a es un coeficiente con dimensiones apropiadas y $\alpha = 3$ para asegurar una disminución rápida con el tamaño del elemento.

La selección de la difusión proporcional a las segundas derivadas tiene bastante lógica. Veremos más adelante que estas derivadas proporcionan información sobre los errores, y ciertamente tienden a estar muy localizadas cerca de las ondas de choque.

La cuestión de estimar el laplaciano de p en la formulación de elementos finitos no es fácil debido a la naturaleza de la interpolación. Un procedimiento relativamente económico se sugiere en un comentario hecho en la Sección 9.2.4, donde advertimos que en un contexto unidimensional la diferencia entre la matriz de masa consistente $\mathbf{M}$ y su forma diagonal equivalente $\mathbf{M}_L$ era precisamente igual a un operador laplaciano, por ej., una difusión. Extendiendo este razonamiento a un contexto multidimensional y advirtiendo que en el proceso de cálculo ambas cantidades deben evaluarse, se puede escribir

$$h^2 |\nabla^2 p| \propto |(\mathbf{M} - \mathbf{M}_L)|\bar{\mathbf{p}} \tag{14.16}$$

La corrección debida a esta difusión artificial se introduce mejor utilizando los valores predichos de $\mathbf{U}^{n+1}$ [ver Ec. (14.13)] lo que conduce a la adición de un incremento "alisado"

$$\Delta \bar{\mathbf{U}}_s^n = -\Delta t \, \mathbf{M}_L \tilde{k} \left(\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \right) \mathbf{U}^{n+1} \tag{14.17}$$

Sin embargo, advirtiendo que éste es un operador laplaciano, puede simplificarse y escribir[11]

$$\Delta \bar{\mathbf{U}}_s^n = \tilde{C}_p \Delta t \mathbf{M}_L^{-1} |(\mathbf{M} - \mathbf{M}_L)\bar{\mathbf{p}}| (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \bar{\mathbf{U}}^{n+1} \tag{14.18}$$

En la expresión anterior, $\tilde{C}_p$ es un coefiente adimensional.

Se han sugerido otros métodos para prevenir las oscilaciones. Uno de ellos es el denominado método de transporte de flujo corregido (FTP),[12–15] y es muy utilizado en la práctica. Otra posibilidad es retornar al concepto de viscosidad artificial haciendo ésta proporcional a los residuos de la ecuación de equilibrio.[16,17]

14.6 Algunos ejemplos preliminares para la ecuación de Euler

Los procedimientos de cálculo descritos pueden utilizarse con éxito en problemas transitorios estacionarios. En esta sección se ilustra su comportamiento en unos ejemplos relativamente simples.

14.6.1 *Tubo de choque de Rieman –un problema transitorio en una dimensión*[3]*–*. Este caso se trata como un problema bidimensional. Aquí se mantiene una diferencia de presión inicial entre dos secciones en un tubo mediante un diafragma que se destruye para $t = 0$. En la Figura 14.2 se muestran las líneas de igual presión, velocidad y energía para el incremento de tiempo 17 y se ilustra el efecto de incluir las matrices de masa diagonal y consistente. El problema tiene una solución análitica exacta presentada por Sod[18] y la solución numérica se ha tomado de la referencia [3].

14.6.2 *Flujo isotérmico a través de una válvula –un problema estacionario en una dimensión*[3]*–*. Aquí se utiliza una variante de las ecuaciones de Euler en las que se suponen condiciones isotermas y en las que la densidad se reemplaza por ρa, donde a es el área de la sección transversal,[3] cuya variación se supone como[19]

$$a = 1.0 + \frac{(x-2.5)^2}{12.5} \qquad \text{para } 0 \leq x \leq 5 \tag{14.19}$$

La velocidad del sonido es constante ya que el flujo es isotérmico y se imponen diversas condiciones en el flujo de entrada y salida, como se muestra en la Figura 14.3. En todos los casos se ha planteado la condición estacionaria después de unos 500 incrementos de tiempo. Para el caso de flujo entrante supersónico y flujo saliente subsónico, se forma una onda de choque que se trató utilizando una difusión artificial del tipo Lapidus, mostrándose en la Figura 4.3(c) la cantidad creciente de alisado al aumentar el coeficiente C_{Lap}.

14.6.3 *Flujo supersónico transitorio bidimensional sobre un escalón.* Este ejemplo final trata la iniciación transitoria de un flujo supersónico en un túnel de viento que contiene un escalón. El problema fue estudiado por primera vez por Woodward y Colella[20] y se presentan aquí los resultados de la referencia [6] que son esencialmente similares a los de estos autores.

Para estudiar este problema se utilizó una malla uniforme de triángulos lineales, como se muestra en la Figura 14.4, y no se encontraron dificultades en el cálculo aunque tuvo que utilizarse una constante de Lapidus $C_{\text{Lap}} = 2.0$ debido a la presencia de ondas de choque.

14.7 Refinamiento adaptable y "captura de ondas de choque" en el problema de Euler

14.7.1 *Consideraciones generales.* Los ejemplos de la sección anterior han mostrado la formación de ondas de choque en problemas transitorios y estacionarios de flujo a altas velocidades. Claramente, la resolución de dichas discontinuidades o casi discontinuidades requiere una malla muy

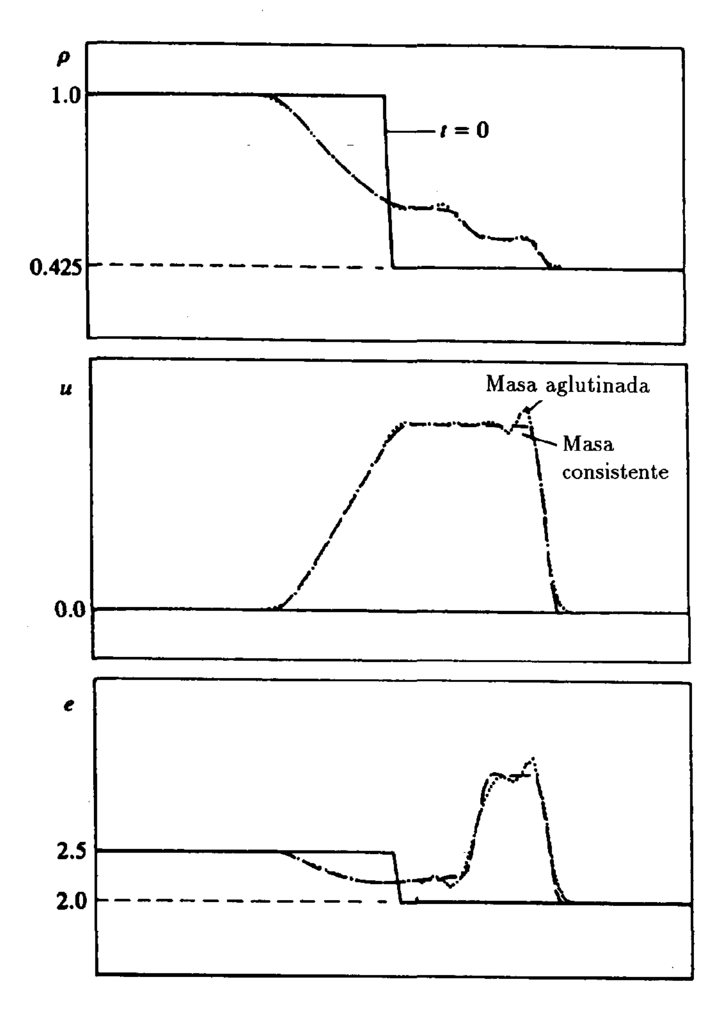
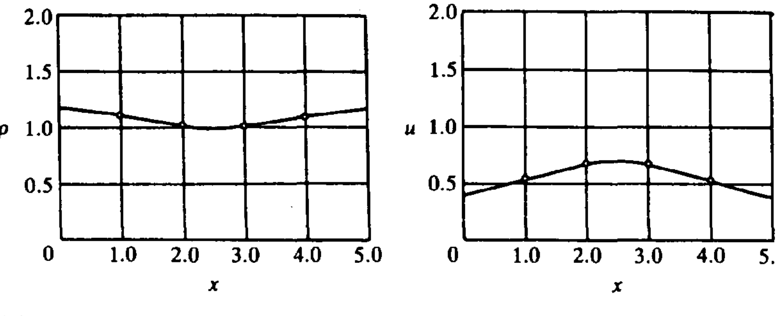
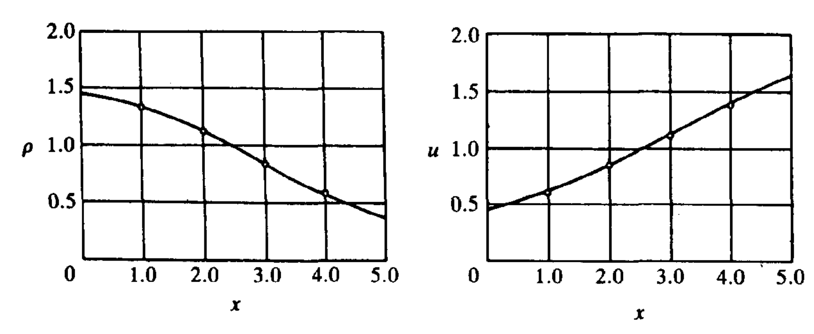


Figura 14.2 El problema del tubo de choque de Rieman.[3,18] La longitud total se divide en 100 elementos. Se muestra el perfil que corresponde a 70 incrementos de tiempo ($\Delta t = 0,250$). La constante de Lapidus=1.0.

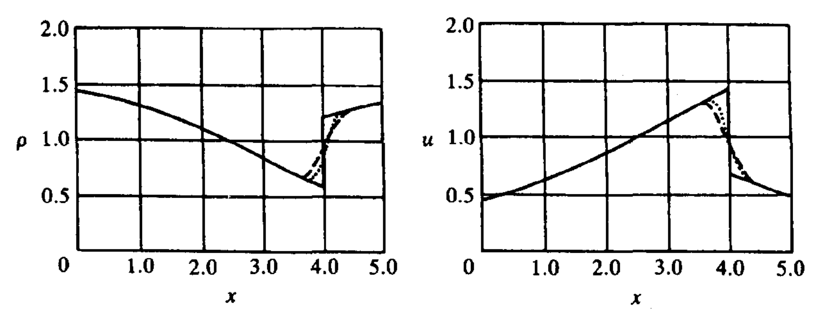
fina. Aquí el uso del "juicio ingenieril", muy utilizado en mécanica de sólidos para diseñar una malla *a priori*, con más concentración de elementos cerca de las singularidades que aparecen en las próximidades de las esquinas, en el contorno, etc., no puede utilizarse. En problemas de flujo compresible la posición de ondas de choque donde hace falta una malla más fina, no se conoce *a priori*. Por ésta y otras razones es esencial



(*a*) Entrada y salida subsónicas



(*b*) Entrada y salida supersónicas



(*c*) Entrada supersónica–salida subsónica con shock

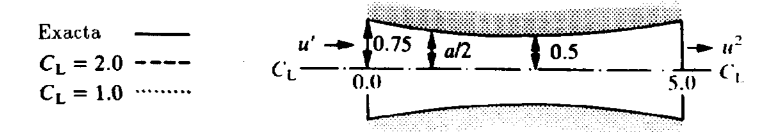


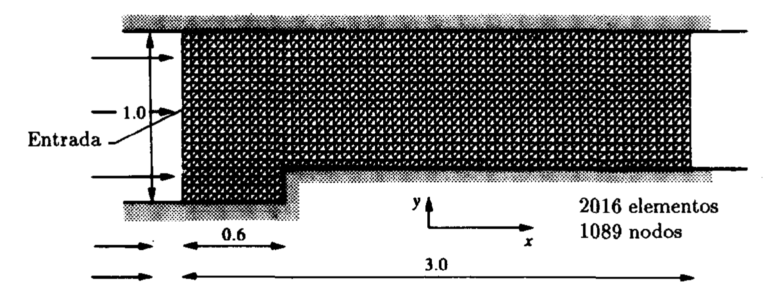
Figura 14.3 Flujo isotérmico a través de una válvula. Se utilizan 40 elementos de igual tamaño.

utilizar métodos de remallado automático basados en estimadores de error para obtener una buena precisión y "capturar" la posición de las ondas de choque. No es, por tanto, sorprendente que la ciencia del refinamiento de malla adaptable haya progresado rápidamente en esta área y, ciertamente, como veremos más tarde, se ha extendido al caso de las ecuaciones de Navier-Stokes donde se requiere un alto grado de refinamiento en las capas límite. En las referencias [21] a [39] se listan cronológicamente algunas de las contribuciones en este importante campo.

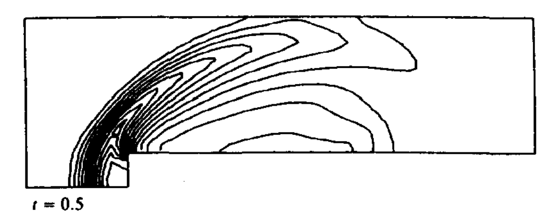
14.7.2 *Medidas de error y requisitos de precisión.* Como se ha discutido en el Capítulo 2 del Volumen 1, el primer paso del proceso adaptable es la estimación del error después de que se han obtenido resultados del análisis. En el contexto de problemas elípticos este error se estima por medio de la norma energética y el objetivo es, generalmente, reducir el porcentaje de ese error a un valor prescrito. En problemas hiperbólicos o predominantemente hiperbólicos de este capítulo, la norma energética tiene poco valor. Además, en el análisis de problemas de flujo externo el porcentaje de error no es útil, ya que el tamaño del dominio de análisis hará que este porcentaje varíe. Ciertamente, aquí el interés se localiza en cantidades locales como, por ejemplo, la distribución de la presión alrededor de un perfil, el coeficiente de rozamiento sobre la superficie, etc. Por esta razón, se procede de forma algo diferente para estimar el error, intentando limitar el valor local del mismo a un límite permisible elemento a elemento. Además, en el proceso de refinamiento de malla, se procede, en lo posible, de forma que este error sea el mismo en cada elemento para obtener un comportamiento óptimo. Esto tiene mucho en común con los errores introducidos en los procedimientos de avance en el tiempo que, al ser también problemas de propagación, pueden involucrar la acumulación del error como se mostró en la Sección 10.2.4. En ambas clases de problemas es, por tanto, necesario considerar el número total de elementos involucrados en un camino de propagación para acotar el error en una determinada posición.

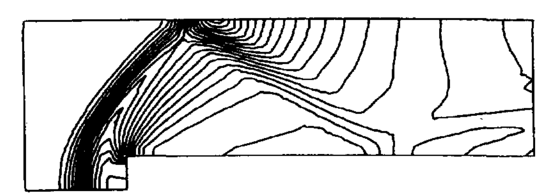
En lo que sigue consideraremos solamente elementos de primer orden (lineal) y el proceso denominado refinamiento tipo "h" mediante el cual se obtiene una precisión creciente al variar el tamaño del elemento. Otra alternativa posible es el refinamiento tipo "p" en el que se cambia el grado de los desarrollos polinómicos (como lo es, efectivamente, el proceso de remallado combinado $h-p$). Este tipo de remallado ha recibido considerable atención por Oden *et al.*,[28,33] pero nuestra opinión es que dichos procedimientos tienen una aplicación limitada en el estudio de formación de ondas de choque, etc.

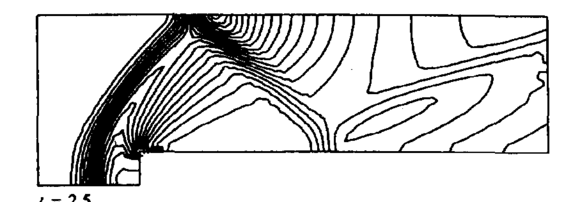
La estimación del error local en elementos lineales se obtiene de forma conveniente al considerar el denominado error en la interpolación. Así, si

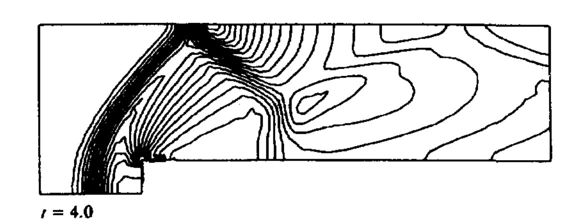


(*a*) Malla estructurada uniforme









(*b*) Solución– iso–líneas de presión en varios tiempos

Figura 14.4 Flujo supersónico transitorio sobre un escalón en un túnel de viento[6] (problema de Woodward y Colella[20]). Flujo uniforme con Mach = 3 a la entrada.

tomamos un elemento unidimensional de longitud h y una función escalar U, es evidente que el error en U es del orden $O(h^2)$ y puede escribirse como

$$e = U - U^b = Ch^2 \frac{d^2U}{dx^2} \approx Ch^2 \frac{d^2U^h}{dx^2} \tag{14.20}$$

donde U^h es el valor obtenido en la solución de elementos finitos y C una constante.

Si, por ejemplo, se supone además $U = U^h$ en los nodos, es decir, que el error nodal es cero, entonces e representa los valores sobre una parábola con una curvatura de $\partial^2 U^h/\partial x^2$. Esto permite obtener C, la constante incógnita, lo que da

$$e_{\max} = \frac{1}{8} h^2 \frac{d^2U^h}{dx^2}$$

o un error de partida como

$$e_{\text{RMS}} = \frac{1}{\sqrt{120}} h^2 \frac{d^2U^h}{dx^2}$$

Por simplicidad supondremos en todos lo casos $C = 1$, ya que obviamente la hipótesis de valores exactos nodales no es cierta, y trataremos de mantener

$$h^2 \frac{d^2U^h}{dx^2} \leq e_p \tag{14.21}$$

donde e_p es un cierto valor especificado por el usuario. Aquí hay que tener en cuenta el posible coste y escoger un valor de e_p igual a un límite "razonable".

Obviamente es necesario ampliar este proceso a dos o más dimensiones. En el caso bidimensional aparecen tres derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 U^h}{\partial x_1^2} \qquad \frac{\partial^2 U^h}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 U^h}{\partial x_2^2}$$

(y seis en el caso tridimensional) y es necesario primeramente determinar sus *valores principales* y las direcciones asociadas x', como se muestra en la Figura 14.5.

Si x_2' corresponde a la dirección de máxima curvatura, el tamaño del elemento medido en dicha dirección (ver Figura 14.5) se obtendría utilizando la Ec. (14.21) como

$$h_{\min} \leq \frac{\sqrt{e_p}}{|(d^2U^h/dx_2^2)|_{\max}} \tag{14.22}$$

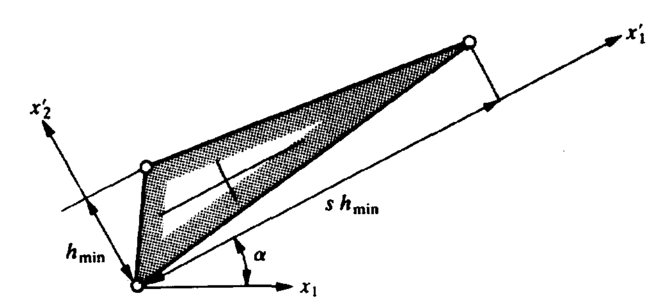


Figura 14.5 Alargamiento del elemento s y tamaño mínimo.

Efectivamente, si la curvatura mínima es mucho más pequeña, los elementos podrían alargarse y se obtendría una cierta economía en el número total de grados de libertad necesario. Podemos así hacer en la dirección x'_1 (de curvatura mínima)

$$h_{\text{ max}} = s h_{\text{ min}}$$

donde

$$s = \frac{\sqrt{|(d^2U^h/dx_2^2)|_{\text{ max}}}}{|(d^2U^h/dx_1^2)|_{\text{ min}}} \tag{14.23}$$

lo que se conoce como el cociente de alargamiento.

La determinación de las curvaturas (o segundas derivadas) de U^h precisa, naturalmente, de operaciones adicionales. Utilizando elementos lineales (por ej., simples triángulos o tetraedros) las velocidades se interpolan como

$$U^h = \bar{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{U}} \tag{14.24}$$

y las curvaturas son cero en el interior de los elementos y toman un valor infinito en sus contornos. Se procede aquí en primer lugar a evaluar los gradientes, por ejemplo

$$\frac{\partial U^h}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\bar{\mathbf{U}}, \quad \text{etc.} \tag{14.25}$$

en cada elemento (en cuyo interior son constantes) y se obtiene la proyección de éstos utilizando la misma interpolación que para U, escribiendo

$$\left(\frac{\partial U^h}{\partial x_i}\right)^* = \mathbf{N}\left(\frac{\overline{\partial U}}{\partial x_i}\right)^*, \quad \text{etc.} \tag{14.26}$$

donde la barra indica valores nodales.

Esta proyección puede efectuarse usando los mismos procedimientos utilizados para el alisado de tensiones en el Capítulo 2 del Volumen 1, donde se utilizó una proyección de Galerkin de la diferencia entre $\partial U^h/\partial x_i$ y $(\partial U^h/\partial x_i)^*$. Sin embargo, calculando la simple media de los valores nodales se obtiene un resultado muy satisfactorio y económico.

Una vez que se han obtenido los valores alisados es muy sencillo estimar las segundas derivadas para cada elemento, como

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}\right)^* = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}\left(\frac{\overline{\partial U}}{\partial \mathbf{x}_i}\right)^* \tag{14.27}$$

aquí de nuevo el proceso anterior conduce a una cierta ambigüedad, ya que la igualdad

$$\frac{\partial^2 U^h}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U^h}{\partial x_j \partial x_i} \tag{14.28}$$

no se cumple exactamente. Se recomienda efectuar la media de las derivadas cruzadas para mejorar la precisión.†

En el caso anterior se han presentado estimaciones de error y medidas de control para una variable escalar U. Existe todavía un problema de cómo aplicar estos procedimientos al problema de variables vectoriales $\mathbf{U}$ que aparecen en las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Para ello hay varias alternativas, tales como

1. Se aplica el control a cada componente de $\mathbf{U}$ en la forma indicada más arriba.
2. Se selecciona una variable del vector $\mathbf{U}$.

† Generalmente es más conveniente obtener las segundas derivadas en los nodos antes de esta operación. Así, suponiendo que se interpola de nuevo

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^* = \mathbf{N}\left(\frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial x^2}\right)^*$$

se obtiene mediante proyección

$$\int_\Omega \mathbf{N}^T \left[\mathbf{N}\left(\frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)^* - \frac{\partial^2 U^h}{\partial x^2}\right] d\Omega = 0$$

e integrando por partes

$$\left(\frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial x^2}\right)^* = \mathbf{M}^{-1}\left(\int_\Omega \mathbf{N}^T \frac{\partial^2 U^h}{\partial x^2}\right) = -\,\mathbf{M}^{-1}\left(\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\, d\Omega\right)\bar{\mathbf{U}}$$

donde $\mathbf{M} = \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{N}\, d\Omega$

que, naturalmente, puede "diagonalizarse." Este procedimiento evita la ambigüedad mencionada en la Ec. (14.28).

3. Se toma una variable escalar compuesta representativa, tal como, por ejemplo, $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$.

Ninguna de estas alternativas es perfecta. La primera, probablemente la más lógica, es demasiado costosa. La última tiene toda clase de dificultades de escalado dependiendo de la dimensión de cada componente. En la práctica, el método más efectivo es seleccionar la presión, la densidad o el número de Mach como variable de control.

14.7.3 *El proceso de remallado tipo h y el enriquecimiento de la malla.* Una vez que se ha obtenido una solución aproximada para una malla dada, pueden evaluarse los errores locales y determinarse los nuevos tamaños de los elementos (y las direcciones de alargamiento si fuera necesario) para cada elemento. En algunos casos es conveniente transferir de nuevo dichos valores a los nodos de manera que puedan ser interpolados de manera continua. Este procedimiento es idéntico al realizado para alisar las derivadas, discutido en la sección anterior.

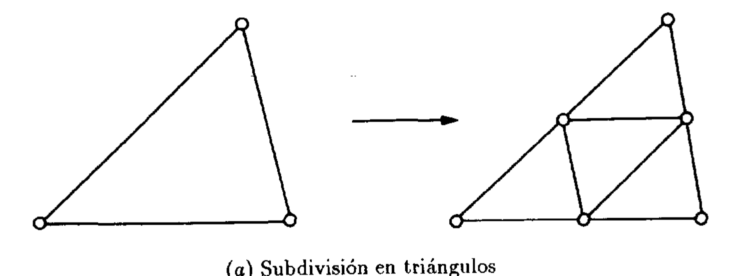
Para obtener la precisión deseada pueden utilizarse diferentes procedimientos. El más obvio es el proceso de *enriquecimiento de la malla* en el que la malla existente se subdivide localmente en elementos más pequeños manteniendo no obstante la configuración de la "malla vieja". La Figura 14.6(a) muestra como se pueden dividir triángulos de esta manera. Con dicho enriquecimiento aparece una clara dificultad en la conectividad entre elementos. Ésta afecta a la forma en que los elementos subdivididos se conectan con aquéllos en los que no se ha efectuado este proceso. En la Figura 14.6(b) se muestra un sencillo procedimiento para dividir los elementos por la mitad. Es bastante evidente que este proceso, descrito por primera vez en la referencia [26], puede aplicarse de manera gradual para obtener las subdivisiones predichas. Sin embargo, el alargamiento de elementos no es posible en este caso.

Pese a estos inconvenientes, el procedimiento es muy efectivo para localizar (o capturar) ondas de choque, como se ilustra en las Figuras 14.7 y 14.8.

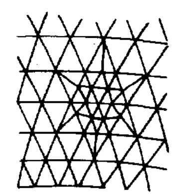
En la primera de ellas, la solución teórica es simplemente una onda de choque en forma de línea de discontinuidad a través de la cual existe un salto de todas las componentes de $\mathbf{U}$. El análisis original efectuado con una malla bastante uniforme muestra una considerable "difusión" de la onda de choque. En la Figura 14.7 se muestra también el remallado efectuado en dos etapas y se advierte cómo el ancho de la onda de choque se reduce progresivamente.

En la Figura 14.8 se muestra un caso similar, aunque menos sencillo, de análisis de un perfil de ala en "forma de cuchillo".

En ambos ejemplos, el enriquecimiento de la malla preservó la forma,



(a) Subdivisión en triángulos



(b) Restauración de la conectividad

Figura 14.6 Enriquecimiento de la malla.

casi equilátera, de los elementos sin alargamiento.

Sin embargo, cuando se presenta una fuerte discontinuidad, el refinamiento local seguiría hasta el infinito ya que el valor de las curvaturas aumenta sin límite. Precisamente la misma dificultad aparece también en el refinamiento de la malla cerca de las singularidades en problemas elípticos[40], si se utiliza como única guía el refinamiento local. En dichos problemas, sin embargo, los límites se establecen generalmente de acuerdo con el valor de la norma energética del error global y el refinamiento se detiene automáticamente. En el presente caso, es necesario fijar el límite del refinamiento y esto se consigue generalmente especificando el tamaño del *elemento más pequeño* en la malla.

El refinamiento tipo h propuesto puede, naturalmente, aplicarse de forma similar en el caso de elementos cuadriláteros. Aquí la utilización inteligente del almacenamiento de datos permite obtener el refinamiento necesario en pocas etapas,[41] haciendo uso de transiciones correctas.

14.7.4 *El proceso de refinamiento h y la regeneración de malla. Ejemplos bi y tridimensionales.* Muchas de las dificultades mencionadas en la sección anterior pueden resolverse mediante la *regeneración automática de mallas con una densidad prescrita.* Dicha regeneración automática ha sido objeto de muchos trabajos de investigación en muchas aplicaciones del método

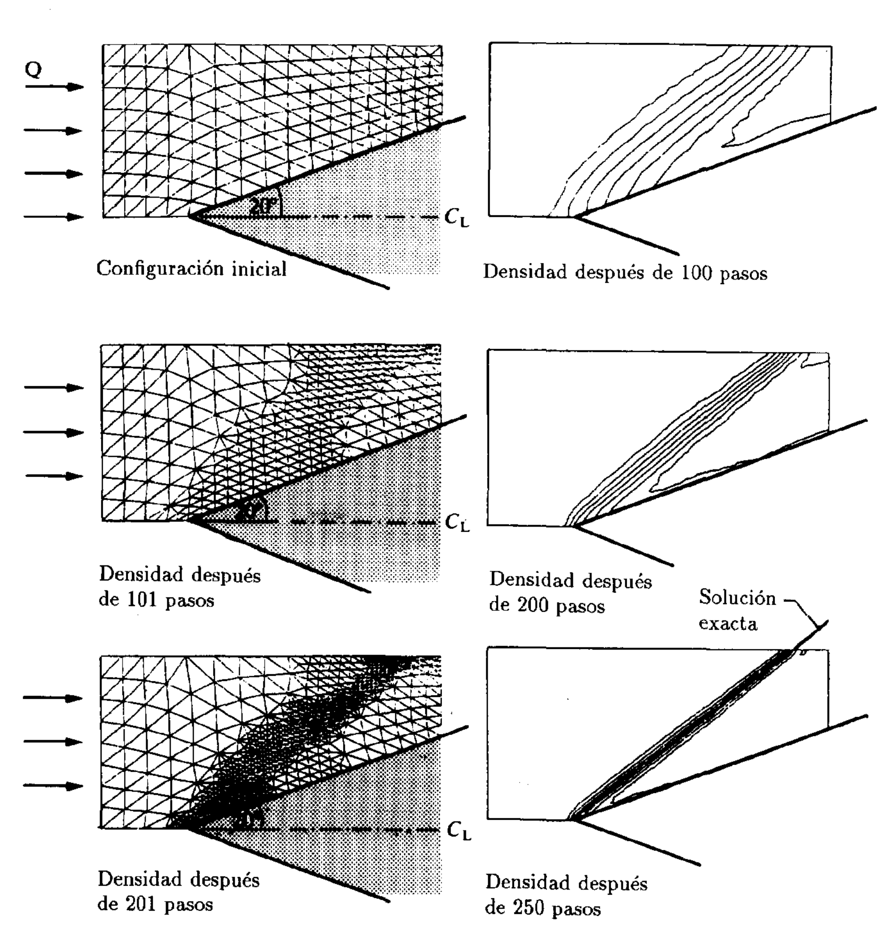
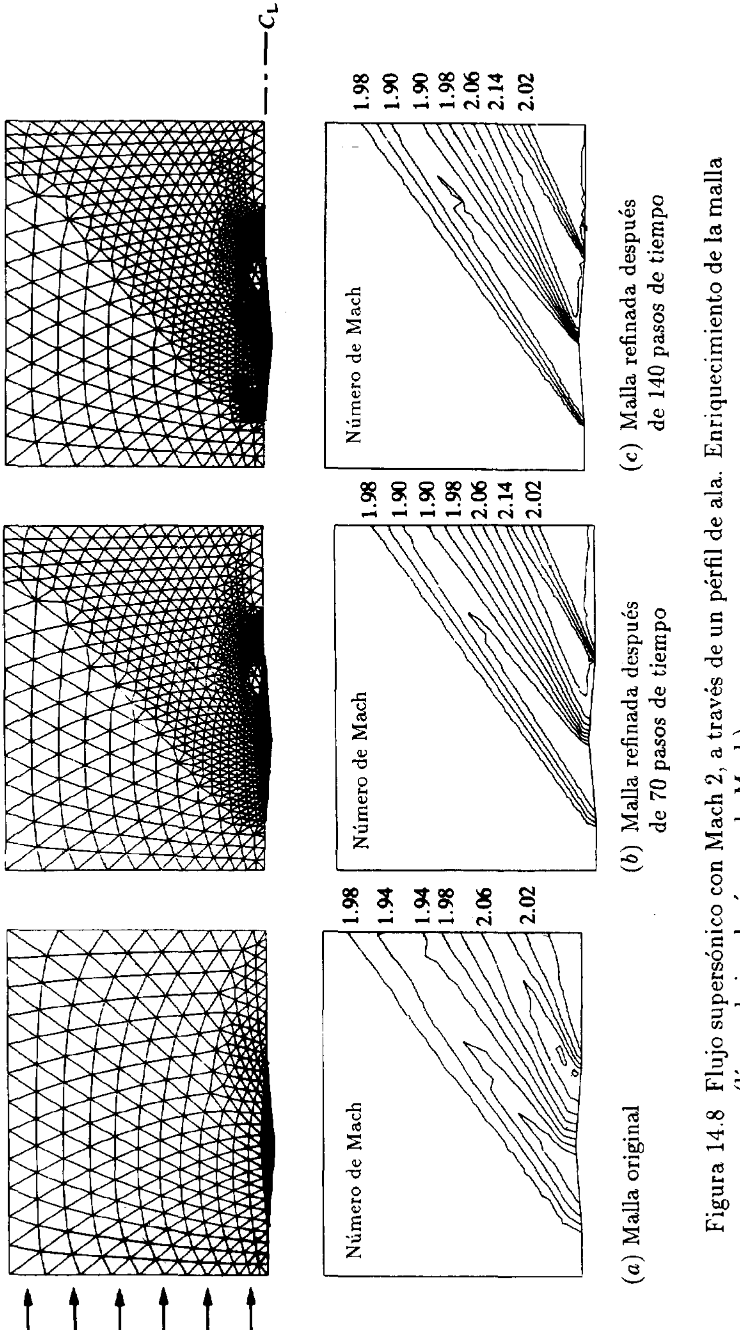


Figura 14.7 Flujo supersónico con Mach 3, a través de un pérfil en cuchilla. La solución exacta forma una onda de choque estacionaria. Enriquecimiento de la malla progresivo y líneas de isodensidad.

de los elementos finitos. De nuevo se presenta una selección de dichos trabajos en las referencias [42] a [46] que representan un ejemplo de la investigación en curso sobre este tema. Probablemente la obtención de la malla de elementos de tamaño y direccionalidad prescritas más precisa sólo puede obtenerse para el caso de triángulos y tetraedros. Aquí los procedimientos desarrollados por Peraire *et al.*[32,39] son muy directos y eficientes, permitiendo el alargamiento de los elementos en direcciones determinadas (aunque alternativamente la cantidad de dicho alargamiento está a veces restringida por consideraciones prácticas).



(*a*) Malla original

(*b*) Malla refinada después de 70 pasos de tiempo

(*c*) Malla refinada después de 140 pasos de tiempo

Figura 14.8 Flujo supersónico con Mach 2, a través de un pérfil de ala. Enriquecimiento de la malla (líneas de igual número de Mach).

Se dirige al lector a las publicaciones originales donde podrá encontrar detalles de dicho procedimiento de generación de malla. En los ejemplos que siguen utilizaremos solamente dicha técnica.

Hemos mencionado previamente las ventajas que pueden obtenerse utilizando mallas estructuradas de elementos cuadriláteros. Estas mallas son claramente deseables para cálculos en ordenadores paralelos, aunque, naturalmente, estos cálculos también pueden hacerse eficientemente en el caso no estructurado. Además, los requisitos de almacenamiento de datos son generalmente mayores para mallas no estructuradas. Sin embargo, en el momento actual las posibilidades de dichos generadores de mallas estructuradas son limitadas y su utilización práctica conduce a un gran número de elementos. Parece, por tanto, que la disminución del número total de grados de libertad que puede obtenerse con una técnica de adaptabilidad eficiente compensa sobradamente las desventajas de las mallas no estructuradas.

En la Figura 14.9 se muestra un sencillo ejemplo de la reflexión de una onda de choque contra una pared sólida.[32] Aquí solamente se analiza un "corte" típico con las condiciones de contorno apropiadas impuestas en la entrada o en la salida. Se muestra claramente el alargamiento de la malla a lo largo de la discontinuidad. La solución se remalló después que las iteraciones casi alcanzaron el estado estacionario.

En la Figura 14.10 se muestra un ejemplo algo más complejo de flujo hipersónico alrededor de un obstáculo sólido. Es interesante advertir que:

1. Se forma una onda de choque separada delante del cuerpo.
2. Delante de dicho choque basta utilizar una malla muy grosera ya que en esa zona el flujo es uniforme y la malla se hace "finita" prescribiendo un tamaño máximo de elemento.
3. Para un mismo tamaño de elemento mínimo se obtiene mediante el refinamiento una reducción en los grados de libertad y una mayor precisión.

En la Figura 14.11 se muestra un ejemplo todavía más sofisticado en el que una onda de choque entrante interacciona con otra. En este caso se utilizó una malla extremadamente fina para comparar los resultados numéricos con otros experimentales,[47] que se reprodujeron con gran precisión.

El refinamiento automático de la malla de forma adaptable tiene grandes ventajas en el análisis tridimensional, donde los requisitos de economía son mucho más severos. Aquí el número de mallas que se requieren para una análisis razonable aumentan muy rápidamente, incluso con dichas técnicas de remallado, y la utilización de mallas estructuradas es generalmente prohibitiva. En estos casos es obviamente necesario utilizar programas vectorizados de forma eficiente y superordenadores. El

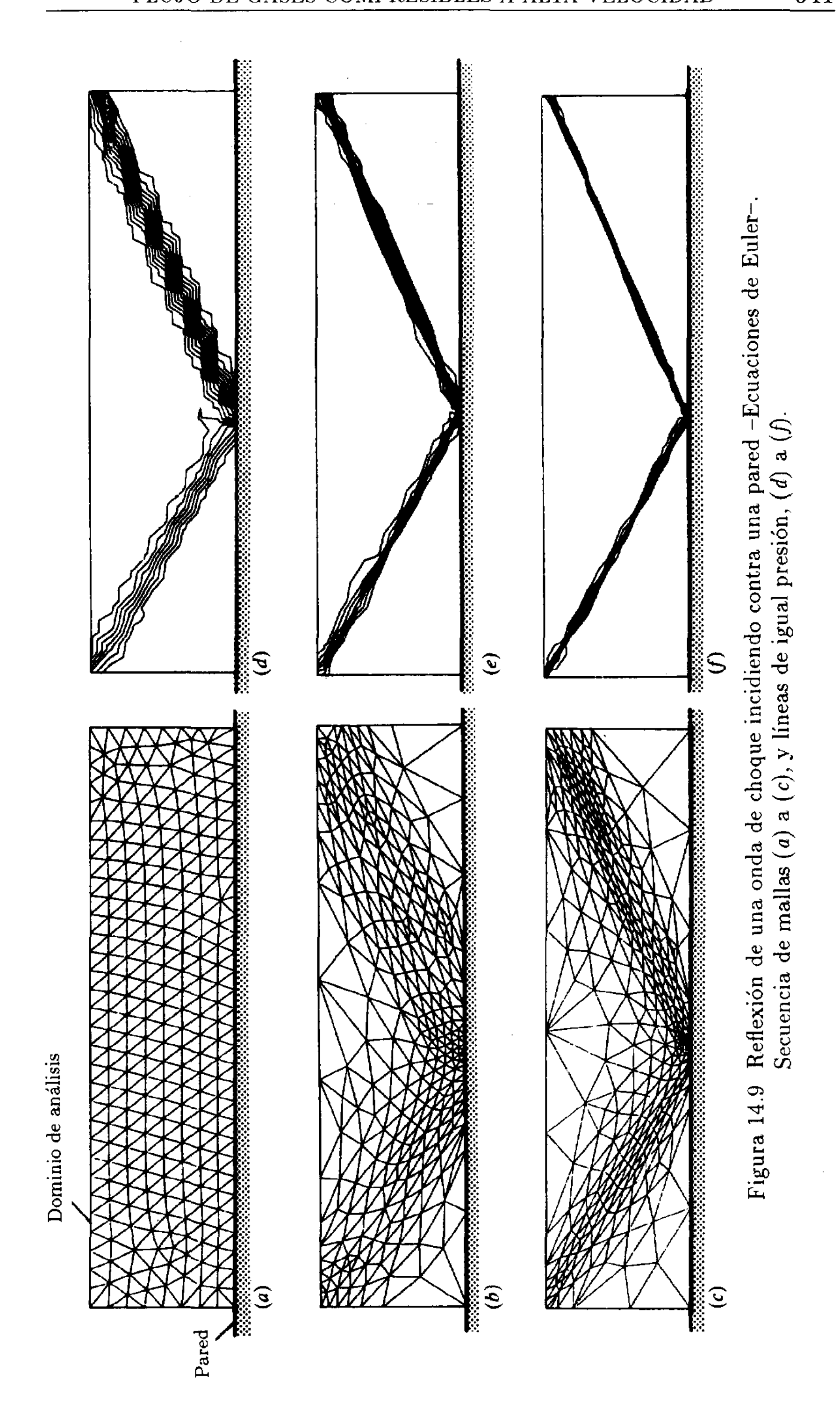
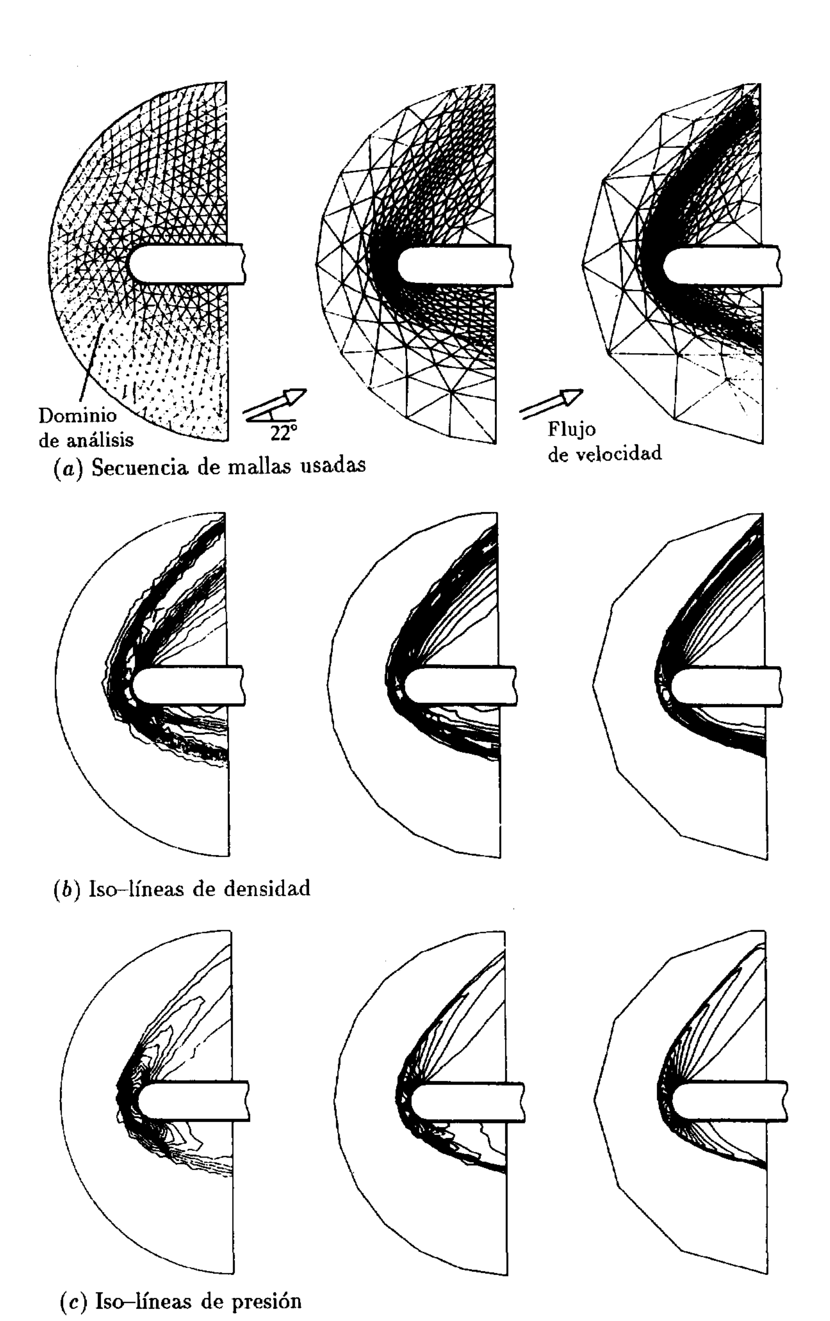


Figura 14.9 Reflexión de una onda de choque incidiendo contra una pared –Ecuaciones de Euler–. Secuencia de mallas (*a*) a (*c*), y líneas de igual presión, (*d*) a (*f*).

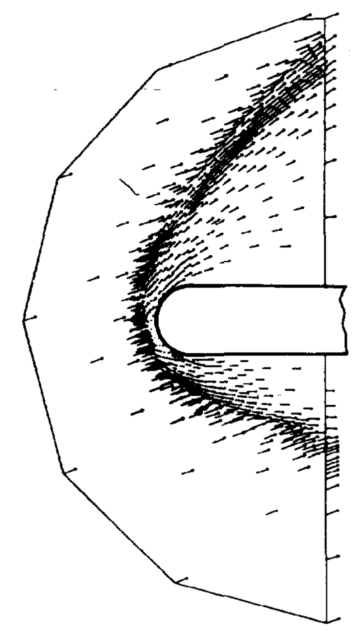


(*a*) Secuencia de mallas usadas

(*b*) Iso–líneas de densidad

(*c*) Iso–líneas de presión

Figura 14.10 Flujo hipersónico a través de un objeto sólido con un ángulo de ataque elevado.



(*d*) Vectores velocidad en la malla final

Figura 14.10 (*continuación*).

Cuadro 2 de los dibujos en color al inicio del libro, y las Figuras 14.12 y 14.13 ilustran algunas de estas soluciones tridimensionales para las ecuaciones de Euler en aplicaciones específicas de flujos estacionarios.[39] Adviértase el gran tamaño de todos estos problemas.

La utilización de mallas no estructuradas ha permitido el análisis de la aerodinámica de un avión completo. En este caso puede también utilizarse refinamiento adaptable del tipo discutido previamente para el caso bidimensional, como se muestra en la Figura 14.12, aunque el coste de cálculo es ahora sustancialmente mayor. La investigación en este campo continúa y con frecuencia se publican resultados que intentan combinar mallas estructuradas y no estructuradas para obtener la máxima economía de cálculo.[48,49]

14.7.5 *Refinamiento tipo h en problemas transitorios.* En las secciones anteriores se ha mostrado la mejora extraordinaria en la captura de las ondas de choque para problemas estacionarios. Sin embargo, los problemas transitorios son de un considerable interés práctico y aquí el proceso es

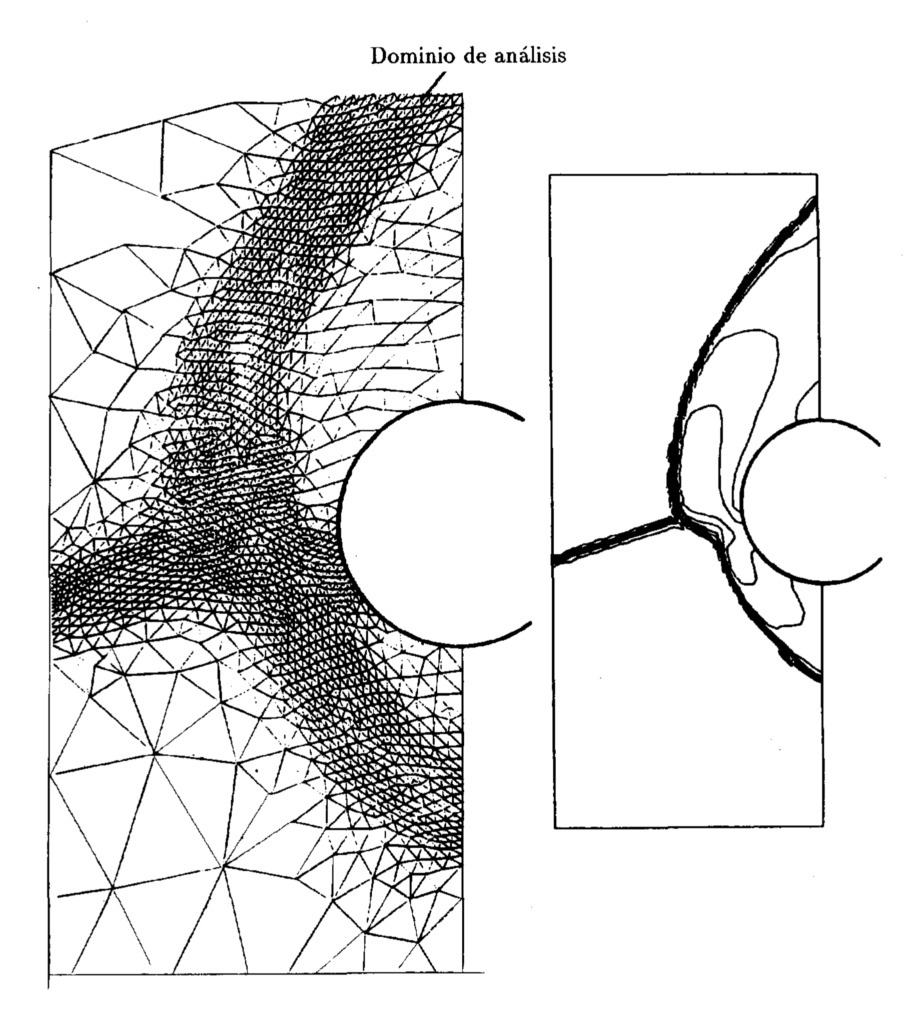
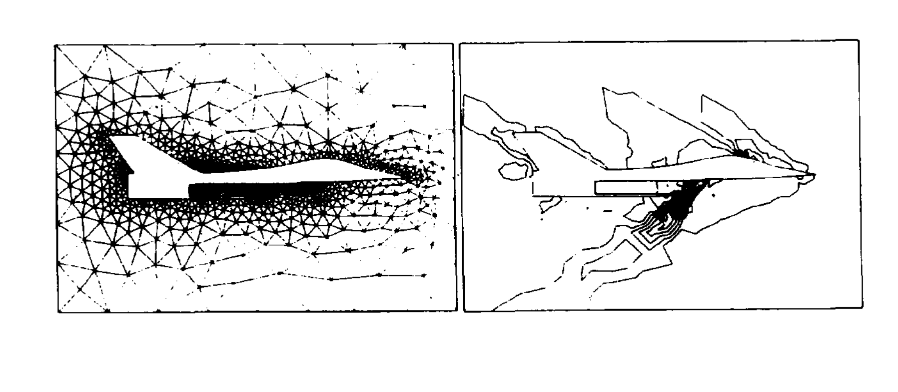
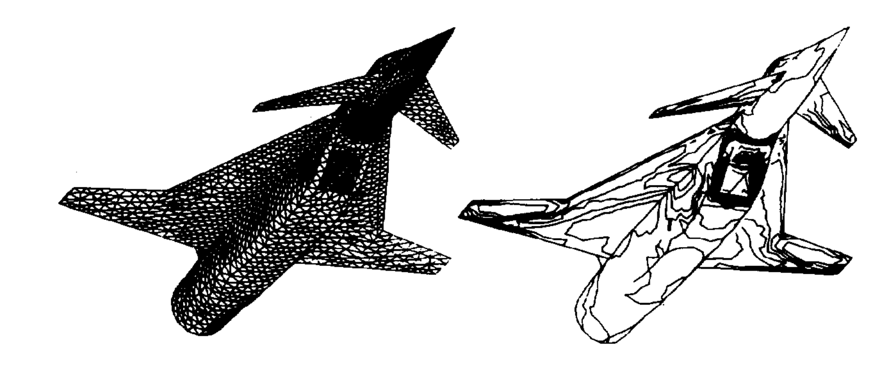


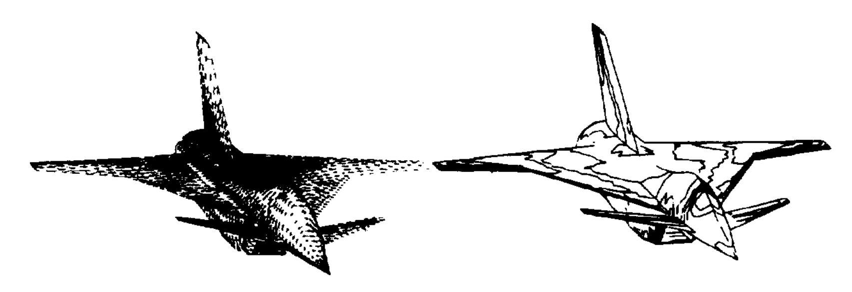
Figura 14.11 Interacción de dos ondas de choque. Malla obtenida tras el proceso de remallado automático y líneas isobáricas (no se muestran los resultados experimentales).

algo más difícil ya que la posición de la onda de choque cambia con el tiempo. En dichas aplicaciones se han utilizado con éxito tanto el método de enriquecimiento como el de regeneración de la malla.

El cálculo con enriquecimiento de malla implica ahora refinamiento y desrefinamiento, y hay que utilizar una malla de soporte razonablemente fina sobre todo el dominio. Las subdivisiones pueden efectuarse a intervalos frecuentes, por ejemplo, cuando los errores locales exceden un valor

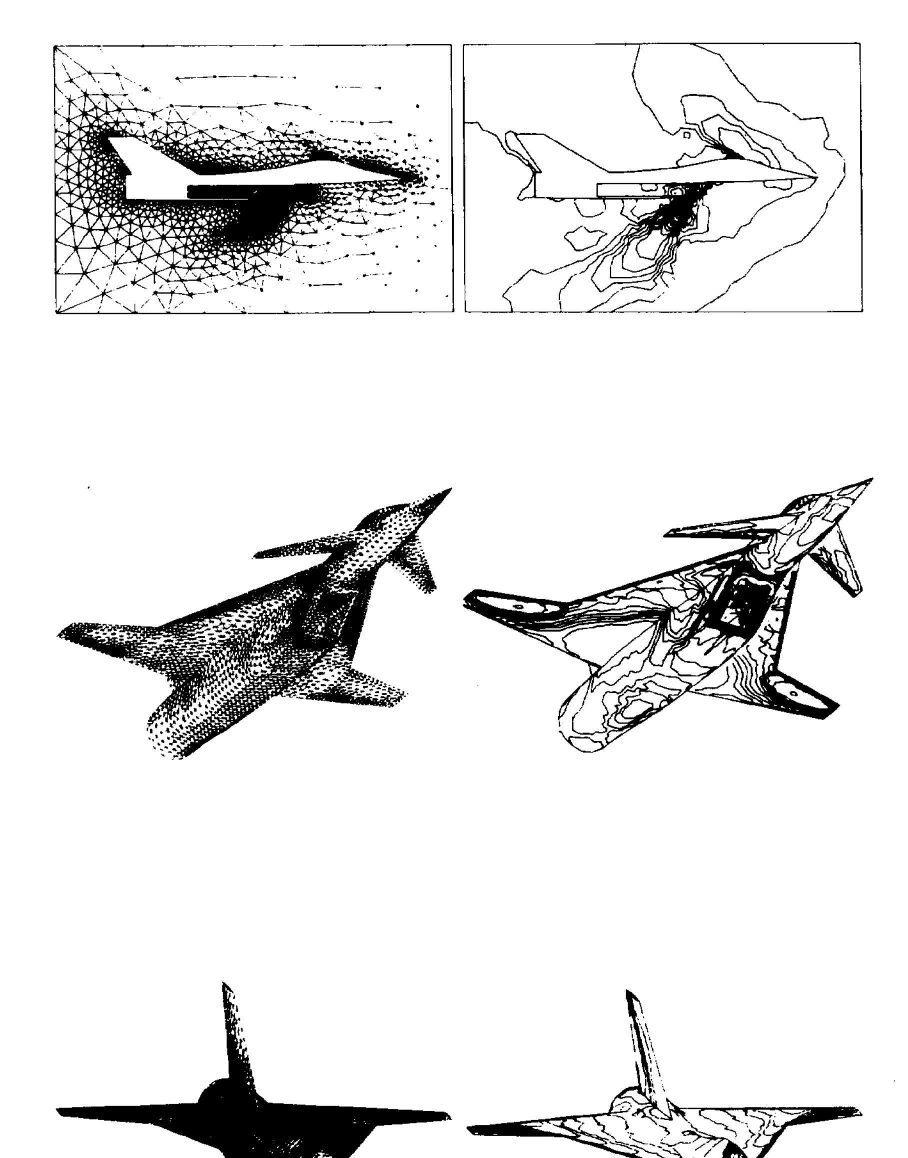






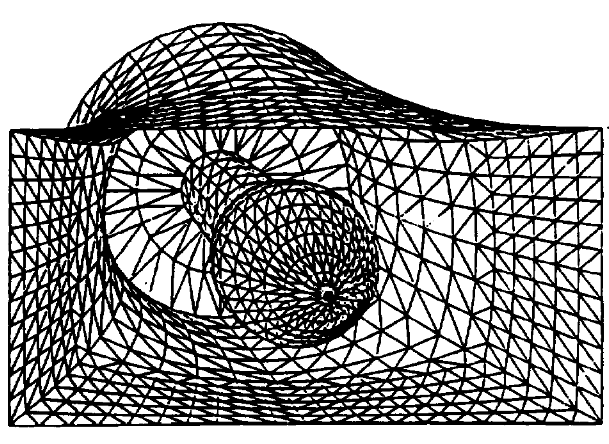
(*a*) Malla original e iso-líneas de presión

Figura 14.12 Solución adaptable tridimensional del flujo compresible no viscoso alrededor de un avión supersónico (Mach 2).[39] Los detalles son similares a los del dibujo en color del Cuadro 2 en las páginas iniciales del libro: 70000 y 125000 elementos.

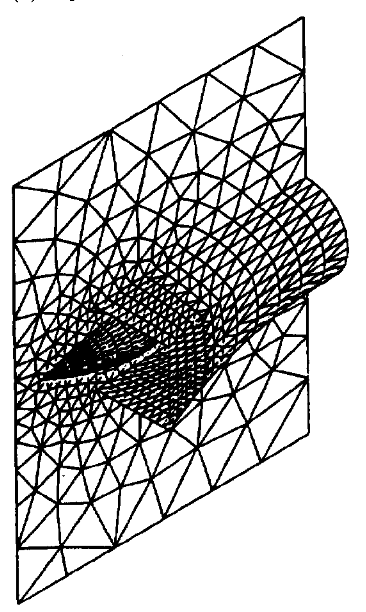


(*b*) Malla refinada adaptable e iso–líneas de presión

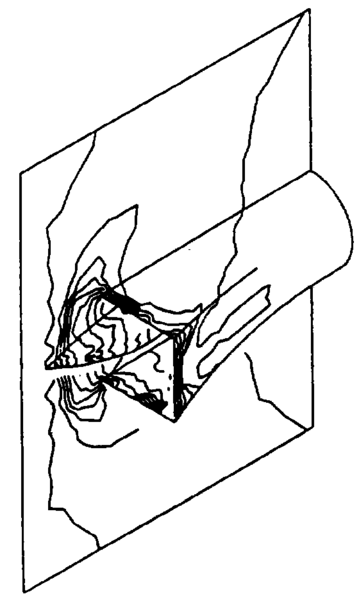
Figura 14.12 (*continuación*).



(*a*) Superficie de la malla de análisis



(*b*) Superficie de la malla de análisis



(*c*) Iso–líneas de presión

Figura 14.13 Análisis tridimensional de la entrada de una turbina a un número de Mach 2 (14000 elementos).[39]

máximo definido. La eliminación de dicho enriquecimiento puede efectuarse de forma simultánea si el error local en los elementos enriquecidos disminuye por debajo de un mínimo prescrito, evitando así la etapa más cara del proceso de generación. Utilizando estos procedimientos se han

obtenido resultados muy buenos en numerosos problemas.[50,53]

El método de regeneración de malla puede utilizarse con éxito en problemas transitorios y tiene ciertas ventajas si durante el proceso cambia la posición de los contornos. En general, el proceso de regeneración de malla puede confinarse a la zona donde el flujo no es uniforme. La Figura 14.14 muestra dichos cálculos transitorios para un problema en el cual se simula la evolución de una onda explosiva en una vasija de presión.[54]

En la Figura 14.15 se muestran cálculos similares que intentan simular el proceso de separación entre una cápsula y un cohete.

El cálculo adaptable en problemas transitorios presenta, por supuesto, algunos problemas de extrapolación ya que el remallado en un esquema de integración explícito "anticipa" la configuración del flujo. Además, como el remallado es caro, no puede efectuarse en cada incremento de tiempo. En la referencias citadas pueden encontarse más detalles de diversas técnicas de aproximación para estos casos.

14.8 El problema de Navier-Stokes –refinamiento en la capa límite–

El algoritmo de solución básica en su forma explícita es naturalmente aplicable con más facilidad a las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Ciertamente, el término viscoso contribuye poco al coste del cálculo; sin embargo, como es bien conocido, la condición de deslizamiento nulo en el contorno concentrará muy rápidamente los gradientes de velocidad (y, por tanto, la generación de calor) en una capa delgada próxima a la superficie del cuerpo (capa límite), y es necesario utilizar mallas extremadamente finas en esta zona, incluso si el flujo es laminar y existe la solución estacionaria. (Efectivamente, si aparecen turbulencias no será posible obtener soluciones estacionarias y la resolución del problema exigirá la modelización adicional del efecto turbulento. Sin embargo, incluso en este caso pueden existir estados estacionarios del flujo medio si la escala de la turbulencia es pequeña.)

En la Figura 14.16 se muestra uno de los primeros análisis realizados sobre este tema que ilustra algunas de las características de este tipo de problemas.[55] Se estudia el efecto de un promontorio en una capa límite totalmente desarrollada en una corriente de flujo supersónico. Esto puede simular el efecto de una imperfección en la superficie de una nave espacial. La solución exige definir los datos sobre la capa límite y las condiciones de flujo libre a la entrada. En este caso se utilizó una malla estructurada junto con un procedimiento de solución explícito.

Los resultados muestran claramente la formación de una onda de choque (lineas isobáricas) y la capa límite (número de Mach) en la cual se utilizó una malla más fina *a priori*.

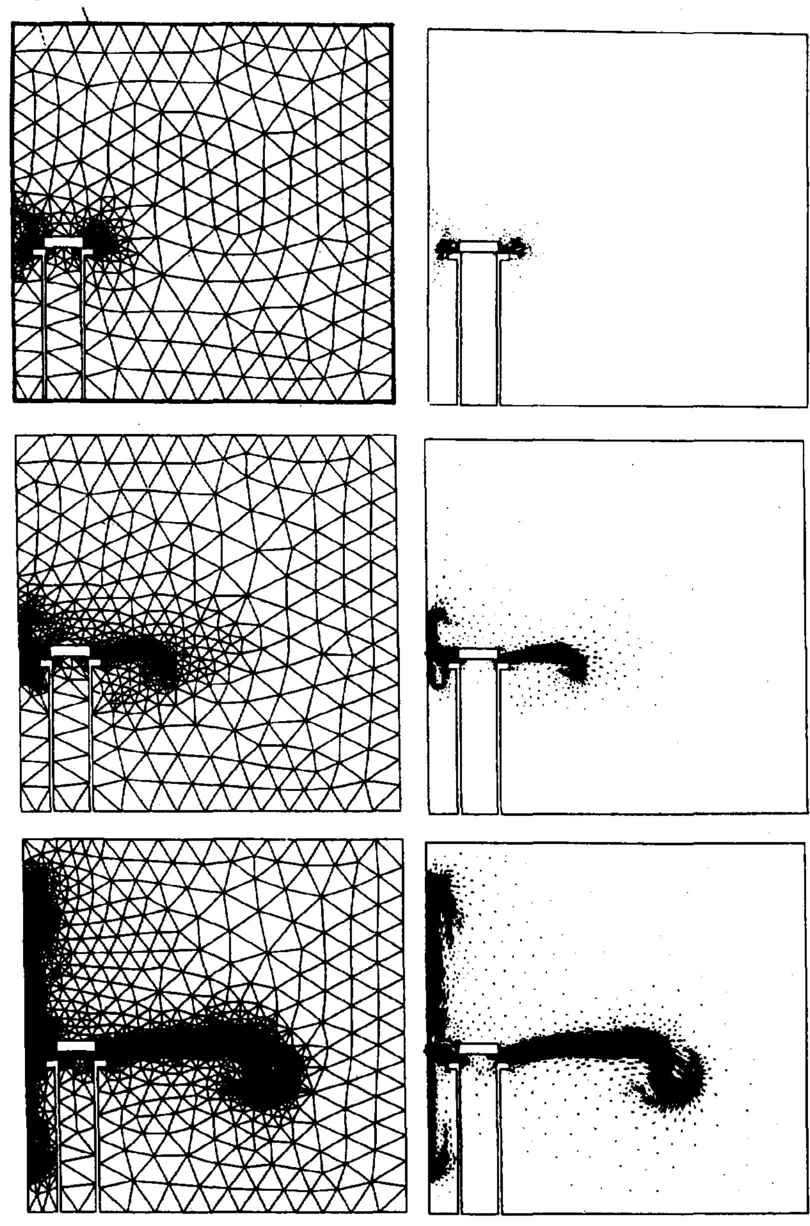


Figura 14.14 Un problema transitorio con remallado adaptable. Simulación de un fallo repentino de la tapa de una vasija de presión. Se muestran los vectores de velocidad y la progresión del refinamiento. Malla inicial de 518 nodos.[54]

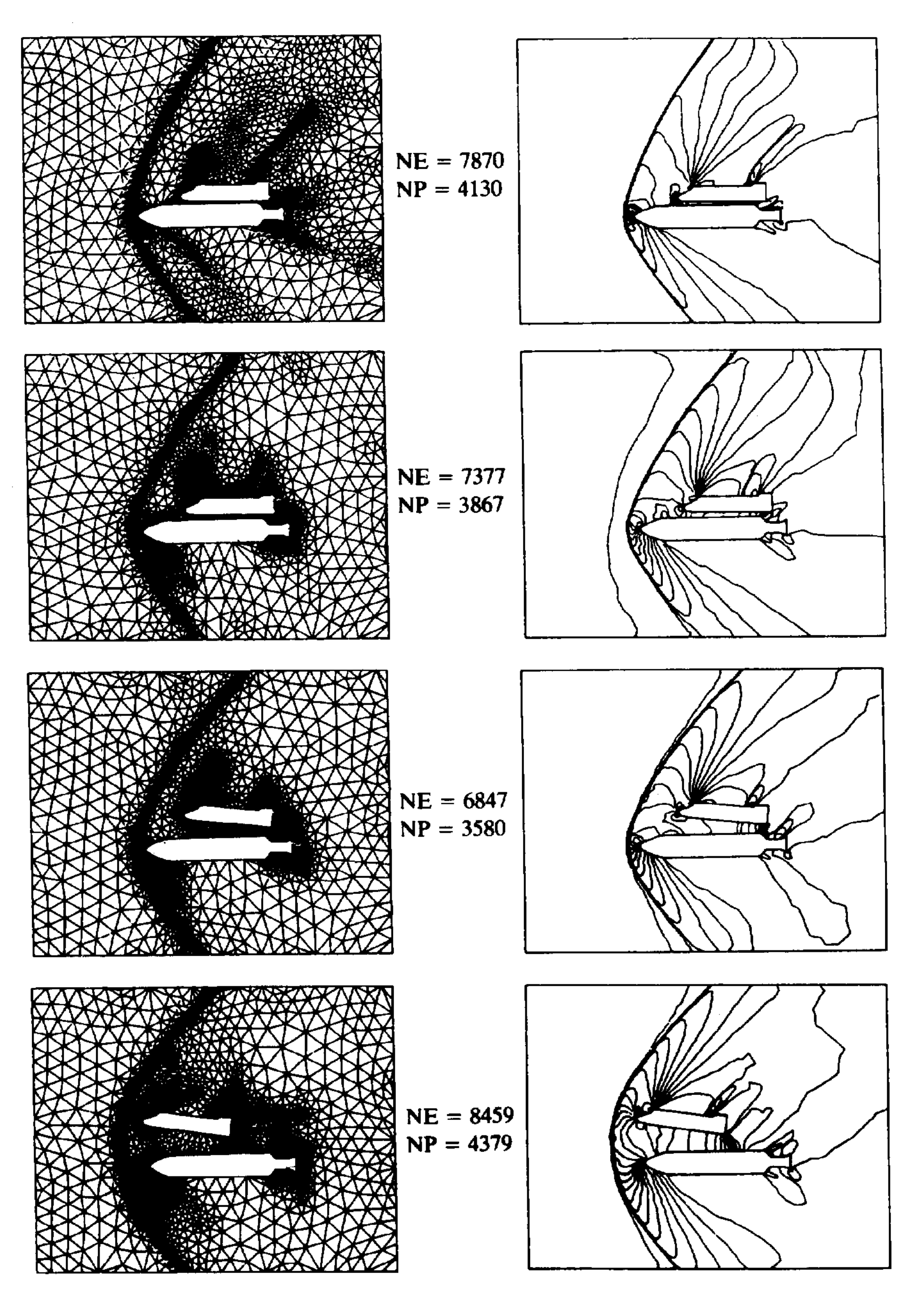


Figura 14.15 Un problema transitorio con remallado adaptable. Simulación de la separación de una cápsula y un cohete. Número de Mach 2, ángulo de ataque de unos −4°, malla inicial de 4130 elementos.[54]

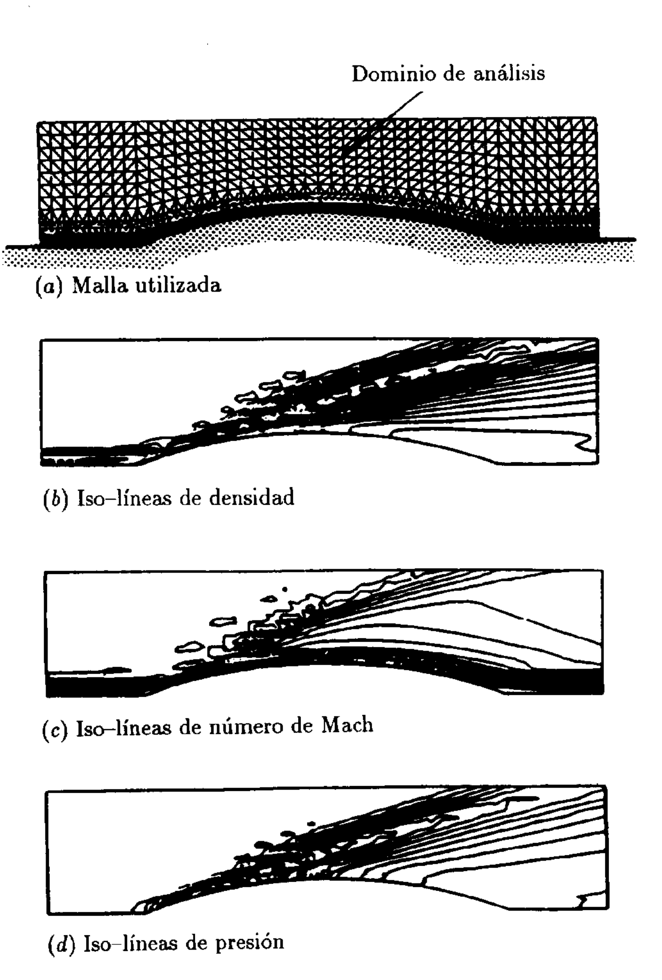
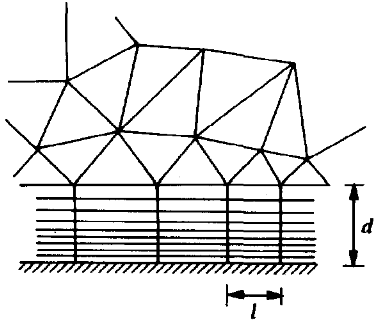


Figura 14.16 Promontorio en una capa límite totalmente desarrollada en un flujo hipersónico. Profundidad del promontorio ~ dos veces el espesor de la capa límite, número de Mach 7.

La utilización del remallado automático en problemas de capa límite es difícil. En estos casos bastaría, en principio, utilizar pocos elementos muy alargados ya que los principales gradientes de velocidad en las curvaturas ocurren en la direcciones normales a la superficie. En problemas en los que aparezcan dichas capas es conveniente utilizar una malla estructurada en la zona de la capa límite restringuiendo el refinamiento no estructurado a la zona exterior, como se muestra en la Figura 14.17(a). Dicha "malla próxima al cuerpo" se discretiza en capas de elementos estructurados cuyo espesor disminuye al acercarse al contorno. En dos dimensiones es usual

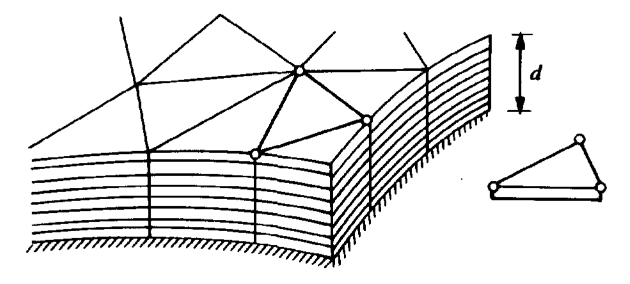
utilizar de 10 a 15 elementos cuadriláteros para modelar el espesor de la capa límite. En tres dimensiones, donde se desea compatibilizar esta malla con otra de tetraedros no estructurados, se utilizan capas de prismas triángulares como se muestra en la Figura 14.17(*b*).



Triángulos no estructurados con refinamiento adaptable

10–15 capas de elementos cuadriláteros de longitud *l*; el espesor total de las capas *d* y el número de capas son decididos por el usuario

(*a*) Una capa bidimensional de cuadriláteros estructurados



Subdivisión en capas tridimensionales enlazando una malla de tetraedros

(*b*) Una capa tridimensional de elementos prismáticos

Figura 14.17 Refinamiento en la capa límite.

El espesor de la capa límite tiene que decidirse por el usuario previamente recurriendo a su experiencia. Lo importante en dichos casos es que

a) los errores en cada elemento sean menores que en las capas exteriores y
b) los errores deben ser lo suficientemente pequeños para captar las características de la capa límite.

Al aplicar esta técnica de capa límite se encontró que la convergencia del algoritmo puramente explícito a la solución estacionaria es lenta,[11,56,57] incluso con la utilización de las técnicas de ajuste del incremento de tiempo explicadas en la Sección 14.5. Por esta razón se desarrollaron técnicas que combinan algoritmos implícitos locales con algoritmos explícitos. Los ejemplos que se muestran a continuación se han resuelto con este procedimiento.

Es interesante mencionar aquí otra posibilidad que en el momento de escribir este libro no ha sido todavía aplicada al tipo de problemas que aquí discutimos. Dicha técnica se basa en la aproximación de las ecuaciones básicas en la capa límite o en las proximidades de la pared.[58,59] En esta aproximación se omiten todas la derivadas de las ecuaciones que corresponden a la dirección tangencial y se impone velocidad nula en la dirección normal. Además se supone que la presión no varía en la dirección normal a la superficie. Esta aproximación conduce a un elemento "unidimensional" acoplado a la solución general del problema del flujo, lo que puede conducir a grandes economías de cálculo.

14.9 Algunos ejemplos de análisis de flujo compresible viscoso

En las Figuras 14.18 a 14.20 se muestran algunos resultados de problemas de flujo compresible en los que se incluyen los efectos viscosos completos. En todos ellos se utilizaron capas de elementos estructurados en la proximidad de la capa límite y después de la primera solución se obtuvo una malla adaptable en el exterior de dicha capa. Se observa en la figura la mejora cualitativa de los resultados obtenidos por este procedimiento.

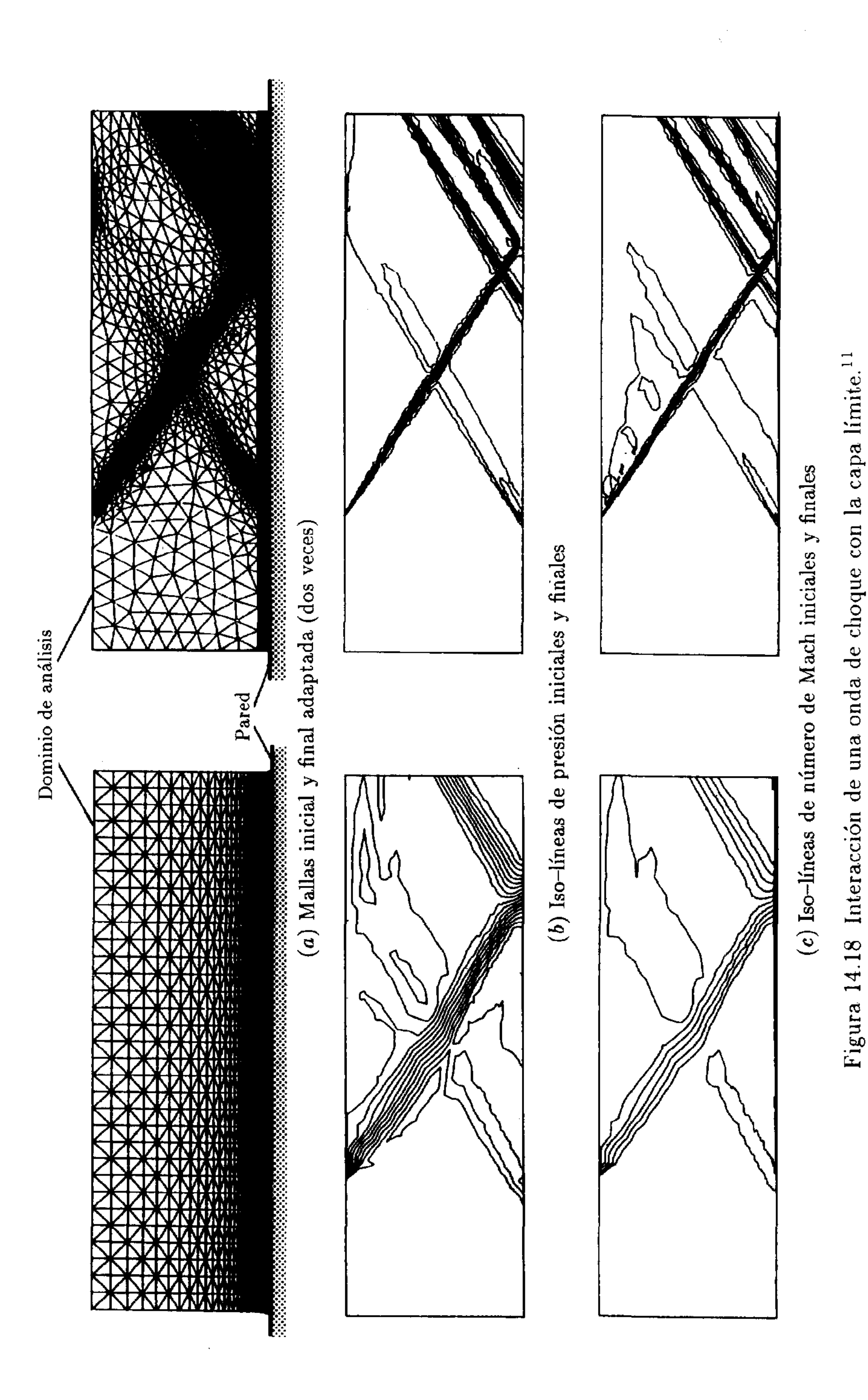
En la Figura 14.18 se comparan los resultados numéricos con otros experimentales para la reflexión de ondas y su interacción con una capa límite.[60] La coincidencia de ambos resultados es muy buena en todo el dominio, teniendo en cuenta que los resultados para el coeficiente de rozamiento sobre la superficie en la zona negativa de las ordenadas no pudieron medirse experimentalmente.

14.10 Comportamiento compresible e incompresible

Es interesante examinar con más detalle las ecuaciones básicas de flujo compresible (14.1) y compararlas con las de flujo incompresible del Capítulo 13 [ver Ecs. (13.10) y (13.11)].

Escribiendo ahora estas ecuaciones con notación indicial se advierte que la ecuación de conservación de masa es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(\rho u_i) = 0 \qquad (14.29)$$

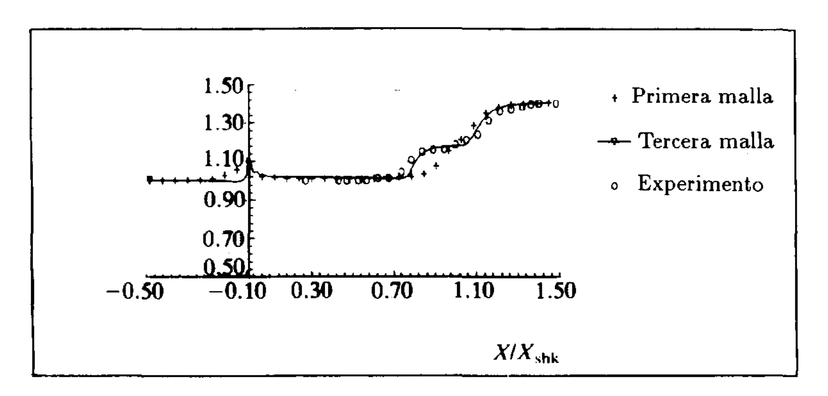


(*a*) Mallas inicial y final adaptada (dos veces)

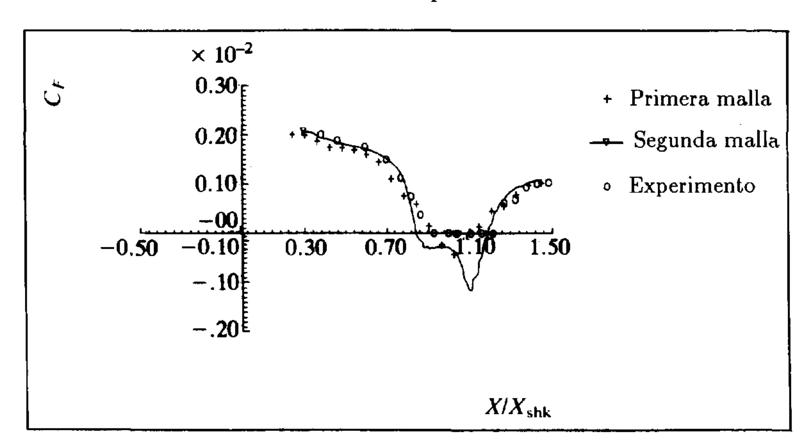
(*b*) Iso-líneas de presión iniciales y finales

(*c*) Iso-líneas de número de Mach iniciales y finales

Figura 14.18 Interacción de una onda de choque con la capa límite.[11]



Presión en la superficie



Fricción en la superficie

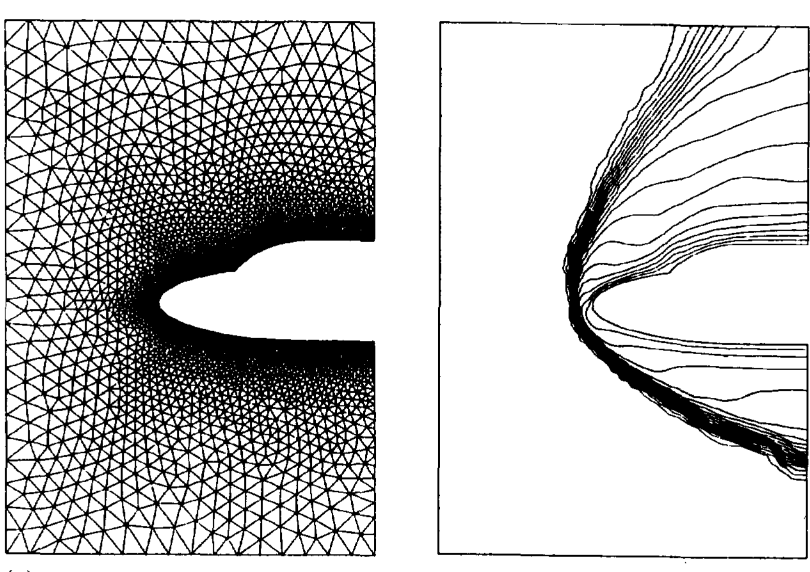
Figura 14.18 (*continuación*).

la ecuación de conservación de la cantidad movimiento es

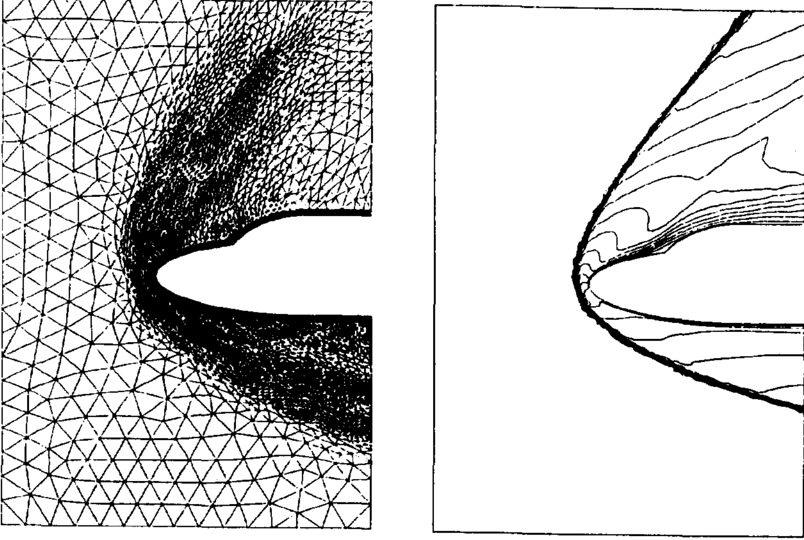
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\rho u_i) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(\rho u_i u_j) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) p - \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tau_{ij} + \rho f_i = 0 \quad (14.30)$$

Diferenciando ahora la primera ecuación, se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho \partial u_i}{\partial x_i} + \boxed{u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j}} = 0 \quad (14.31)$$

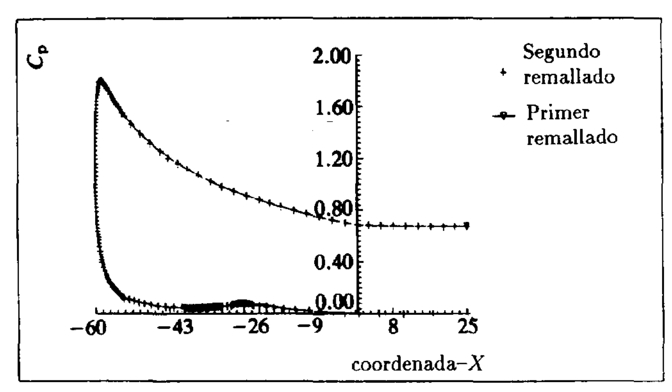


(*a*) Malla inicial de 2775 nodos e iso–líneas de número de Mach

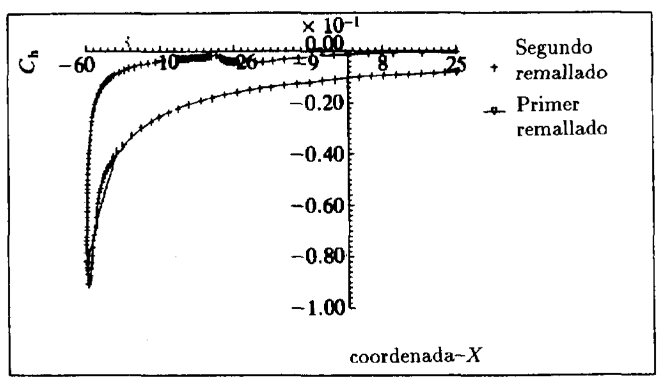


(*b*) Primera malla refinada con 2655 nodos en triángulos y 15 × 200 nodos estructurados en la capa límite e iso–líneas de número de Mach

Figura 14.19 Flujo viscoso alrededor de un modelo bidimensional de la parte frontal de una nave espacial a Mach 2.



(*c*) Distribución de presión-superficies superior e inferior



(*d*) Distribución de velocidad de calentamiento–superficies superior e inferior

Figura 14.19 (*continuación*).

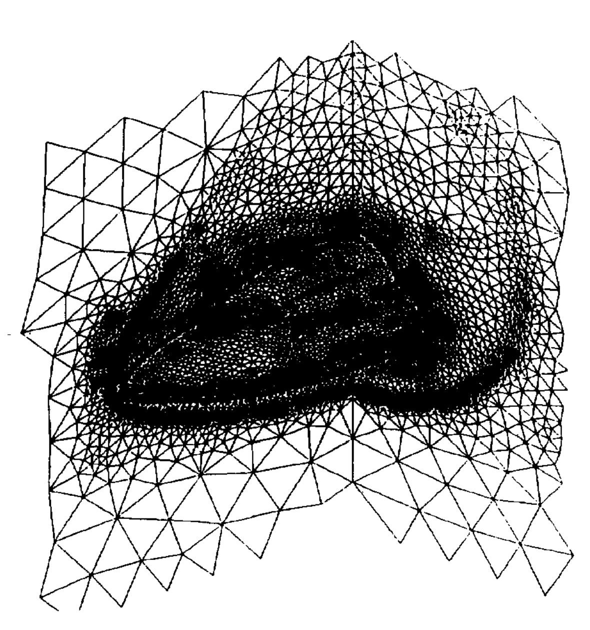
y sustrayendo (14.29) de (14.30), se obtiene

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\rho f_i=0 \tag{14.32}$$

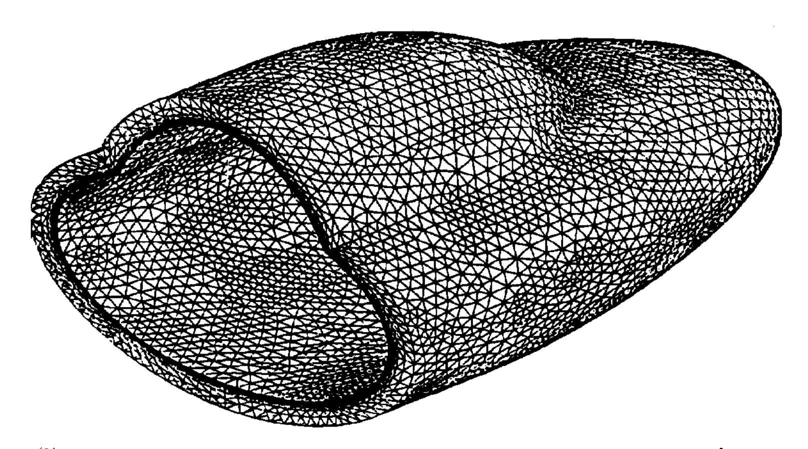
Además, si se supone un comportamiento isotérmico de manera que C es constante, se tiene

$$\rho=\frac{p}{C^2}$$

y las ecuaciones son idénticas en estado estacionario a las del flujo incompresible si el *término marcado en la Ec. (14.31) es despreciable.* (Esto ocurrirá si la velocidad del sonido C es grande o las velocidades del flujo son pequeñas.)



(*a*) Malla adaptada no estructurada de 289 806 elementos y 50 592 nodos

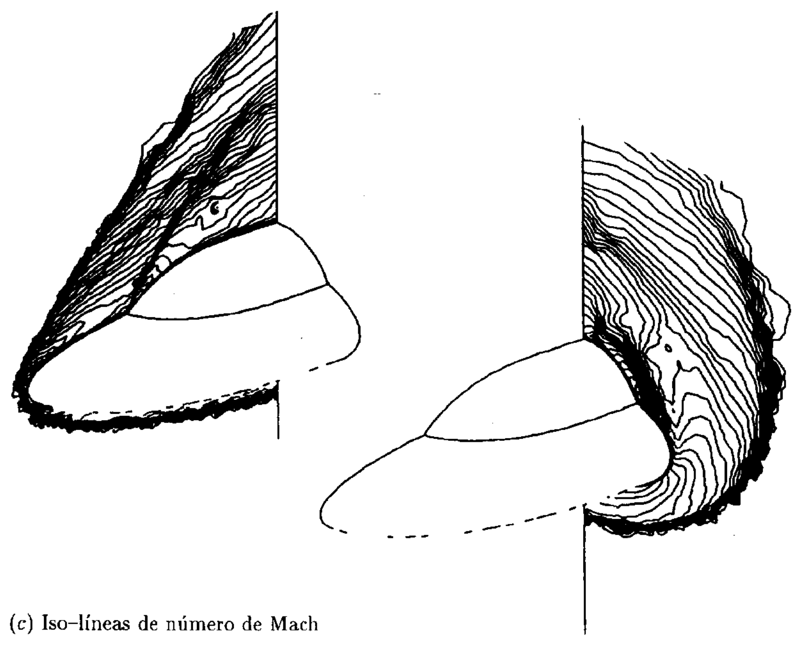


(*b*) Malla adaptada de 151 956 elementos y 28 431 nodos, capa estructurada

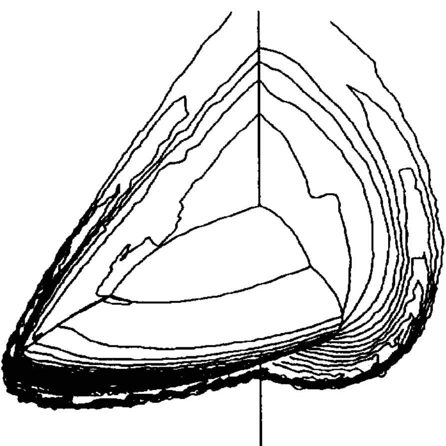
Figura 14.20 Flujo viscoso a Mach = 8.15 alrededor de la parte frontal de un modelo de vehículo espacial (cortesia de Computational Dynamics Research Ltd., Swansea).

Inmediatamente pueden extraerse las siguientes conclusiones:

1. A números de Mach más pequeños, las soluciones del problema de



(*c*) Iso–líneas de número de Mach



(*d*) Iso–líneas de densidad

Figura 14.20 (*continuación*).

flujo corresponderán con las de flujo incompresible –y en ausencia de viscosidad pueden aplicarse simples soluciones basadas en la teoría potencial–.

2. Para cualquier número de Mach, el flujo se comportará como casi incompresible en las proximidades de puntos de estancamiento donde las velocidades son bajas

Lo anterior significa que, como se sugirió en el Capítulo 13, pueden obtenerse soluciones para flujo incompresible utilizando códigos desarrollados para flujo compresible. Esto ocasionalmente es una ventaja ya que dichos códigos pueden tratar con problemas mayores usando procedimientos explícitos. Sin embargo, se plantea otro problema. Como sabemos, en un flujo incompresible sólo se permiten ciertas interpolaciones de la presión (densidad) y la velocidad, si se quiere obtener convergencia. Estas condiciones, por ejemplo, impiden utilizar interpolaciones C_0 de igual orden para todas las variables, tal como es usual en los programas para flujo compresible. Se concluye, por tanto, que:

3. Pueden anticiparse dificultades en las aplicaciones en la solución de flujo compresible utilizando igual interpolación para todas componentes de **U** cerca de los puntos de estancamiento del flujo.

Este hecho se advirtió por Bristeau *et al.*[62,63] quienes sugirieron utilizar interpolaciones que satisfagan las condiciones de incompresibilidad. En el caso de triángulos, los impedimentos que se muestran en la Figura 14.21 son naturalmente satisfactorios. En la referencia [62] se ilustra la importante mejora de los resultados cerca de los puntos de estancamiento utilizando dichos elementos y una simple aproximación de Galerkin. En este caso, por supuesto, los resultados con interpolación del mismo orden fueron totalmente inestables, pero se obtuvo un comportamiento razonablemente bueno sin utilizar ninguna de las técnicas "contracorriente", tales como las que son implícitas en el proceso de Taylor-Galerkin.

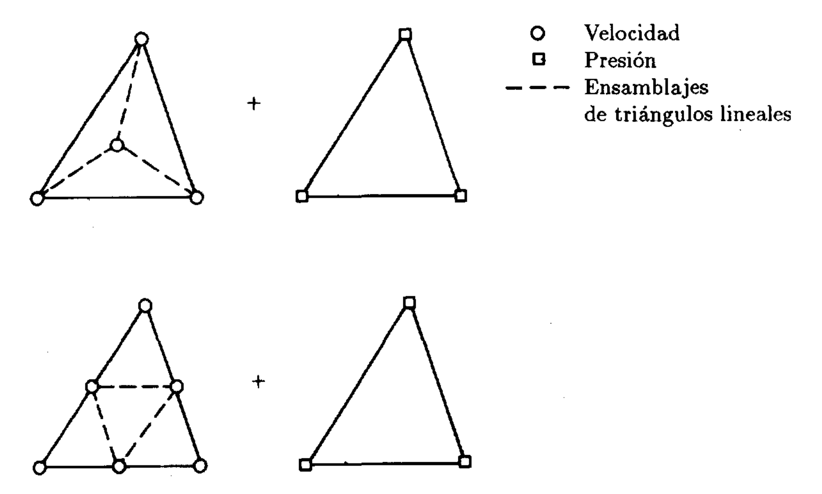


Figura 14.21 Dos elementos triángulares con interpolación C_0 para la velocidad y la presión que satisfacen las condiciones de estabilidad.

Es interesante observar que en muchos de estos problemas, incluso aunque existe el problema del punto de estancamiento, se obtuvieron muy buenos resultados utilizando una cierta cantidad de viscosidad artificial, introducida inicialmente en el algoritmo para tratar las ondas de choque. Las investigaciones en curso se dirijen a tratar de introducir dicha viscosidad de una manera más racional en la ecuación de conservación de masa únicamente para tratar dicho problema de incompresibilidad. Puede mostrarse que con una técnica de desacople de operadores similar a la utilizada en la Sección 13.8.2 se introduce automáticamente la difusión correcta y se evitan los problemas mencionados.[64]

14.11 Conclusiones finales

El lector habrá observado la importante progresión en la solución de problemas de flujo compresible por el método de elementos finitos desde 1984, cuando los procedimientos de Galerkin a lo largo de las líneas características se introdujeron por primera vez. Principalmente nos hemos concentrado en este capítulo en la descripción de está metodología (utilizando el algoritmo de Taylor-Galerkin de dos pasos y adaptabilidad de la malla basada en medidas de error). Esta metodología ha demostrado ser muy prometedora y pueden obtenerse ahora soluciones satisfactorias para problemas anteriormente irresolubles utilizando mallas estructuradas de diferencias finitas. Sin embargo, muchas otras alternativas son posibles y queda todavía mucho por hacer para que los cálculos sean más económicos. Ciertamente, el incremento de la demanda para utilizar métodos computacionales en ingeniería aeronáutica ha crecido más rápidamente que el de las prestaciones de los ordenadores, y esto ha sido un incentivo vital para el desarrollo de la investigación en este campo.

Referencias

1. C HIRSCH, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. **I**, Wiley, Chichester, 1988.
2. L. DEMKOWICZ, J.T. ODEN y W. RACHOWICZ,"A new finite element method for solving compressible Navier-Stokes equations based in an operator splitting method and h-p adaptivity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **84** , 275-326, 1990.

3. R. LÖHNER, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 4 , 1043–63, 1984.
4. R. LÖHNER, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Domain splitting for an explicit hyperbolic solver", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **45** , 313–29, 1984.
5. O.C. ZIENKIEWICZ, R. LÖHNER, K. MORGAN y J. PERAIRE "High speed compressible flow and other advection dominated problems of fluid mechanics" en *Finite Elements in Fluids* (eds R.H. Gallagher, G.F. Carey, J.T. Oden y O.C. Zienkiewicz), Vol. **6**, cap. 2, pp. 41–88, Wiley, Chichester, 1985.
6. R. LÖHNER. K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "An adaptive finite element procedure for compressible high speed flows", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **51**, 441–65, 1985.
7. A. LAPIDUS, "A detached shock calculation by second-order finite differences", *J. Comp. Phys.*, **2**, 154–77, 1967.
8. F. ANGRANT, V. BILLEY, A. DERVIEUX, C. PUOLETTY y B. STOUFFLET, "2-D and 3-D Euler flow calculations with a second order accurate Galerkin finite element method", in *18th Fluids Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conf.*, 16-18 July, Cincinatti, Ohio, AIAA paper 85–1706, 1985.
9. R. LÖHNER, K. MORGAN, J. PERAIRE, O.C. ZIENKIEWICZ y L. KONG, "Finite element methods for compressible flow", en *ICFD Conf. on Numerical Methods in Fluids Dynamics* (ed. K.W. Morton y M.J. Baines), Vol II, pp. 27–53, Clarendon press, Oxford, 1986.
10. R.W. MACCORMACK y B.S. BALDWIN,"A numerical method for solving the Navier-Stokes equations with application to shock boundary interaction", *AIAA*, paper 75–1, 1975.
11. O. HASSAN, "Finite element computations of high speed viscous compressible flows", Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1990.
12. S.T. ZALESAK, "Fully multidimesional flux-corrected transport algorithms for fluids", *J. Comp. Phys.*, **31** 355–62, 1979.
13. J.P. BORIS y D.L. BOOK, "Flux-corrected transport, I, SHASTA–a fluid transport algorithm that works", *J. Comp. Phys.*, **11**, 38–69, 1973.
14. G. ERLEBACHER, "Solution adaptive triangular meshes wih application to the simulation of plasma equilibrium", Ph.D. thesis, Columbia University, 1984.
15. R. LÖHNER, K. MORGAN, J. PERAIRE y M. VAHDATI, "Finite element, flux corrected transport (FEM-FCT) for the Euler and Navier-Stokes equations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **7**, 1093–109, 1987.
16. P. HANSBO y C. JOHNSON, "Adaptive streamline diffusion methods for compressible flow using conservation variables", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **84**, 175–192, 1990.
17. T.J.R. HUGHES y M. MALETT, "A new finite element formulation for fluid dynamics, IV: A discontinuity capturing operator for multidimensional advective–diffusive systems", *Comp. Meth. Appl. Eng.*, **58**, 329–36, 1986.
18. G. SOD, "A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws", *J. Comp. Phys*, **27**, 1–31, 1978.
19. T.E. TEZDUYAR y T.J.R. HUGHES, "Development of time accurate finite element techniques for first order hyperbolic systems with particular emphasis on Euler equation", Stanford University paper, 1983.
20. P. WOODWARD y P. COLELLA, "The numerical simulation of two dimensional flow with strong shocks", *J. Comp. Phys.*, **54**, 115–73, 1984.
21. P.A. GNOFFO, "A finite volume, adaptive grid algorithm applied to planetary entry flow fields", *JAIAA*, **29**, 1249-54, 1983.
22. R. LÖHNER, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Adaptive grid refinement for the Euler and compressible Navier-Stokes equation" en *Proc. Int. Conf. on Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations*, Lisboa, 1984.
23. M.J. BERGER y J. OLIGER, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations", *J. Comp. Phys.*, **53**, 484–512, 1984.
24. G.F. CAREY y H. DINH, "Grading functions and mesh redistribution", *SIAM J. Num. Anal.*, **22**, 1028–40, 1985.
25. R. LÖHNER, K. MORGAN, J. PERAIRE y O.C. ZIENKIEWICZ, "Finite element methods for high speed flows", *AIAA*, paper 85–1531-CP, 1985.
26. O.C. ZIENKIEWICZ, K. MORGAN, J. PERAIRE, M. VAHDATI y R. LÖHNER, "Finite elements for compressible gas flow and similar systems", en *7th Int. Conf. in Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Versailles, December, 1985.
27. B. PALMEIRO, V. BILLEY, A. DERVIAUX y J. PERIAUX, "Self adaptive mesh refinement and finite element methods for solving Euler equations", en *Proc. ICFD Conf. on Numerical Methods for Fluid Dynamics* (eds K. Morton y M.J. Baines), Clarendon Press, Oxford, 1986.
28. J.T. ODEN, P. DEVLOO y T. STROUBOULIS, "Adaptive finite element methods for the analysis of inviscid compressible flow", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **59**, 327–62, 1986.

29. O.C. ZIENKIEWICZ, K. MORGAN, J. PERAIRE y J.Z. ZHU, "Some expanding horizons for computational mechanics; error estimates, mesh generation and hyperbolic problems", en *Computational Mechanics-Advances and Trends* (ed. A.K. Noor), AMD 75, American Society of Mechanical Engineers, 1986.
30. J.F. DANNENHOFER y J.R. BARON, "Robust grid adaptation for coupled trans-sonic flows", *AIAA* paper 86–0495, 1986.
31. R. LÖHNER, K MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Adaptive grid refinement for the Euler and compressible Navier-Stokes equations", en *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations* (eds I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J. Gago y E.R. de A. Oliveira), cap. 15, pp. 281–98, Wiley, Chichester, 1986.
32. J. PERAIRE, M. VAHDATI, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Adaptive remeshing for compressible flow computations", *J. Comp. Phys.*, **72**, 449–66, 1987.
33. J.T. ODEN, T. STROUBOULIS y P. DEVLOO, "Adaptive finite element methods for high speed compressible flows", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **7**, 1211–28, 1987.
34. J.H.S. LEE, J. PERAIRE y O.C. ZIENKIEWICZ, "The characteristic Galerkin method for advection dominated problems-an assessment", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **61**, 359–69, 1987.
35. J. PERAIRE, K. MORGAN, J. PEIRO y O.C. ZIENKIEWICZ, "An adaptive finite element method for high speed flow", en *AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, Nevada, AIAA paper 87–0558, 1987.
36. O.C. ZIENKIEWICZ, J.Z. ZHU, Y.C. LIU, K. MORGAN y J. PERAIRE, "Error estimates and adaptivity; from elasticity to high speed compressible flow", en *The Mathematics of Finite Elements and Application (MAFELAP 87)* (ed. J.R. Whiteman), pp. 483–512, Academic Press, London, 1988.
37. L. FORMAGGIA, J. PERAIRE y K. MORGAN, "Simulation of state separation using the finite element method", *Appl. Math. Modelling*, **12**, 175–81, 1988.
38. O.C. ZIENKIEWICZ, K. MORGAN, J. PERAIRE, J. PEIRO y L. FORMAGGIA, "Finite elements in fluid mechanics. Compressible flow, shallow water equations and transport", en *ASME Conf. on Recent Development in Fluid Dynamics*, AMD 95, American Society of Mechanical Engineers, December, 1988.
39. J. PERAIRE, J. PEIRO, L. FORMAGGIA, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Finite element Euler computations in 3-dimensions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **26**, 2135–59, 1985 (ver también: *AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, AIAA paper 87–0032, 1988).

40. O.C. ZIENKIEWICZ y J.Z. ZHU, "A simple error estimator and adaptive procedures for practical engineering analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, 337–57, 1987.
41. J.T. ODEN y L. DEMKOWICZ, "Advance in adaptive improvements: a survey of adaptive methods in computational fluid mechanics", en *State of the Art Survey in Computational Fluid Mechanics* (eds A.K. Noor y J.T. Oden), American Society of Mechanical Engineers, 1988.
42. S.H LO, "A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, **21**, 1403–26, 1985.
43. D.N. SHENTON y Z.J. CENDES, "Three dimensional finite element mesh generation using Delaunay tesselation", *IEEE Trans. on Magnetism*, **MAG-21**, 2535–8, 1985.
44. M. TENEMURA, T. OGAWA y N. OGITTA, "A new algorithm for three dimensional Voronoi tesselation", *J. Comp. Phys.*, **51**, 191–207, 1983.
45. M.A. YERRY y M.S. SHEPHERD, "Automatic three dimensional mesh generation by a modified OCTREE technique", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, **20**, 1965–90, 1984.
46. W.J. SCHOEDER y M.S. SHEPHERD, "A combined Octree/Delaunay method for fully automatic 3–D mesh generation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **29**, 37–56, 1990.
47. J.R. STEWART, R.R. THAREJA, A.R. WIETING y K. MORGAN, "Application of finite elements and remeshing techniques to shock interference on a cylindrical leading edge", Reno, Nevada, AIAA paper 88–0368, 1988
48. A. JAMESON, T.J. BAKER y N.P. WEATHERILL, "Calculation of inviscid transonic flow over a complete aircraft", *AIAA 24th Aerospace Sci. Meeting.*, Reno, Nevada, AIAA paper 86–0103, 1986.
49. N.P. WEATHERILL, "Mixed structured-unstructured meshes for aerodynamic flow simulation", *Aeronaut. J.*, **94**, 111–23, 1990.
50. R.R. THAREJA, J.R. STEWART, O. HASSAN, K. MORGAN y J. PERAIRE, "A point implicit unstructured grid solver for the Euler and Navier-Stokes equation", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **9**, 405–25, 1989.
51. R. LÖHNER, "Adaptive remeshing for transient problems with moving bodies", en *National Fluid Dynamics Congress*, Ohio AIAA paper 88–3736, 1988.
52. R. LÖHNER, "The efficient simulation of strongly unsteady flows by the finite element method", en *25th Aerospace Sci. Meeting*, Reno, Nevada, AIAA paper 87–0555, 1987.
53. R. LÖHNER, "Adaptive remeshing for transient problems", *Comp.*

Meth. Appl. Mech. Eng., **75**, 195–214, 1989.
54. E.J. PROBERT, "Finite element methods for transient compressible flow", Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1989.
55. J. PERAIRE, "A finite element method for convection dominated flows", Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1986.
56. O. HASSAN, K. MORGAN y J. PERAIRE, "An implicit-explicit scheme for compressible viscous high speed flows", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **76**, 245–58, 1989.
57. P. ROSLAND y B. STOUFFLET, "Simulation of compressible viscous flows by an implicit method on unstructured meshes", en *Proc. 7th Int. Conf. on Finite Element Methods in Flow Problems*, pp. 345-50, University of Alabama Press, Huntsville, 1989.
58. J.Y. XIA, C. TAYLOR y J.O. MEDWELL, "Finite element modelling of the near wall zone of confined turbulent flows", *Eng. Comp*, **6**, 127–32, 1989.
59. C.E. THOMAS, K. MORGAN y C. TAYLOR, "A finite element analysis of flow over a backward facing step", *Comp. Fluids*, **9**, 265–78, 1981.
60. R.J. HAKKINEN, I. GREBERM, L. TRILLING y S.S. ABARBANEL, 'The interaction of an oblique shock with a laminar boundary layer", memo, 2–28-59W, NASA, 1989.
61. M.O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, B. MANTEL, J. PERIAUX y G. ROGÉ, "Self adaptive finite element methos for 3-D compressible, Navier-Stokes flow simulation in aerospace engineering", en *Proc. 11th Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Williamsburg, Pa, 1988.
62. M.O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, L. DUTTO, J. PERIAUX y G. ROGÉ, "Compressible viscous flow calculations using compatible finite element approximations", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **11**, 719–49, 1990.
63. M.O. BRISTEAU, M. MALLET, J. PERIAUX y G. ROGÉ, "Developments of finite element methods for compressible Navier-Stokes flow simulations in aerospace design", Reno, Nevada, AIAA paper 90–0403, 1990.
64. O.C. ZIENKIEWICZ, "Explicit (or semiexplicit) general algorithm for compressible and incompressible flows with equal finite element interpolation", Report 90.5, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1990.

Capítulo 15

ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS

15.1 Introducción

El flujo de agua en capas delgadas, tal como ocurre en estuarios costeros, oceanos, ríos, etc., tiene una importancia práctica obvia. La predicción de las elevaciones ocurrentes en mareas es vital para la navegación y para determinar la dispersión de la polución que, desafortunadamente, se deposita con frecuencia en dichas zonas. El transporte de sedimentos asociados con dichos flujos es también otro campo de interés.

En el flujo con superficie libre en capas relativamente delgadas las velocidades horizontales son de una gran importancia y el problema puede aproximarse razonablemente en dos dimensiones. Aquí encontramos que las ecuaciones resultantes, que incluyen además de las velocidades horizontales la altura de la superficie libre, pueden escribirse de nuevo en forma conservativa [véase Ecs. (12.1) y (14.1)] como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q} = 0 \qquad \text{para} \quad i = 1,2 \tag{15.1}$$

Ciertamente, la forma detallada de estas ecuaciones tiene una gran similitud con las del flujo de gas compresible –a pesar del hecho de que ahora se considera un flujo puramente incompresible (agua)–. Se deduce por consiguiente que:

1. Pueden aplicarse en general los métodos desarrollados en el capítulo previo.
2. El tipo de fenómenos que hemos encontrado en el Capítulo 14 (por ej., ondas de choque, etc.) aparecerá de nuevo.

Se encontrará, naturalmente, que el interés práctico se orienta en aspectos diferentes. El objetivo de este corto capítulo es, por tanto, la introducción de las ecuaciones básicas de la discretización e ilustrar las técnicas de aproximación numérica mediante una serie de ejemplos.

Las aproximaciones hechas en la formulación del flujo en aguas poco profundas son similares en esencia a las que describen el flujo de aire en el contorno de la tierra y, por tanto, se usan frecuentemente en meteorología. En particular, la solución de estas ecuaciones tiene una aplicación cotidiana en la predicción del tiempo, un tema en el que se necesita un gran esfuerzo de cálculo. El lector interesado encontrará gran parte de lo básico sobre este tema en libros de texto estándar, tales como los de las referencias [1] y [2].

Un área de particular interés surge de la versión linealizada de las ecuaciones de aguas poco profundas que, en respuesta periódica, son similares a las que describen fenómenos acústicos (ver Capítulo 11). En la segunda parte de este capítulo discutiremos, por consiguiente, algunos de estos fenómenos periódicos que aparecen en la acción de fuerzas debidas a olas.[3]

15.2 Base de las ecuaciones de aguas poco profundas

En el Capítulo 13 se han introducido las ecuaciones esenciales de Navier-Stokes y presentado su forma incompresible isoterma en las Ecs. (13.25a) y (13.25b) que se repiten más abajo suponiendo incompresibilidad total. Se tienen ahora las ecuaciones de conservación de masa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{15.2a}$$

y la conservación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i u_j) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ij} - f_j = 0 \tag{15.2b}$$

con i, j siendo 1,2,3.

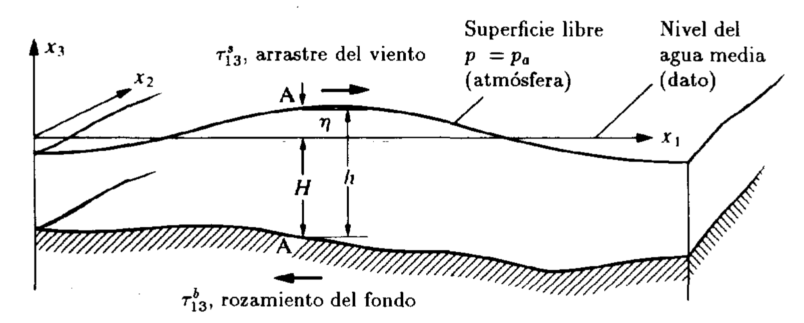
En el caso de flujo de aguas poco profundas que se muestra en la Figura 15.1 y en donde la dirección x_3 es vertical, la velocidad vertical u_3 es pequeña y las correspondientes aceleraciones son despreciables. Las ecuaciones de cantidad de movimiento en la dirección vertical pueden reducirse, por tanto, a

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3} + g = 0 \tag{15.3}$$

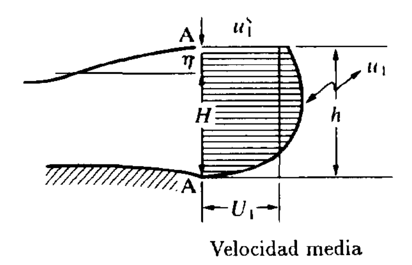
donde $f_3 = -g$, es la aceleración de la gravedad. Después de la integración, se obtiene

$$p = \rho g(\eta - x_3) + p_a \tag{15.4}$$

para $x_3 = \eta$, la presión es atmosférica (p_a) (lo que puede, en ocasiones, no ser constante sobre el dominio del agua y, por tanto, influenciar su movimiento).



(*a*) Coordenadas



(*b*) Distribución de velocidad

Figura 15.1 El problema de aguas poco profundas. Notación.

En la superficie libre, la velocidad vertical u_3 puede relacionarse de manera natural con la derivada temporal total de la elevación de la superficie, es decir

$$u_3^s = \frac{D\eta}{dt} \equiv \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1^s\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_2^s\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \tag{15.5a}$$

Similarmente, en el fondo,

$$u_3^b = \frac{DH}{dt} \equiv u_1^b\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_2^b\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \tag{15.5b}$$

ya que la profundidad total H, naturalmente, no varía con el tiempo. Más aún, si se supone que para un flujo viscoso no ocurre deslizamiento, entonces

$$u_1^b = u_2^b = 0 \tag{15.6}$$

y también por continuidad

$$u_3^b = 0$$

Se efectúa ahora una aproximación adicional. En ésta las ecuaciones fundamentales se integran con la coordenada de profundidad x_3, obteniéndose las *ecuaciones típicas de gobierno* sobre la profundidad. Partiremos de la ecuación de continuidad (15.2a) e integraremos ésta en la dirección x_3, escribiendo

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\, dx_3 + \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\, dx_3 + \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\, dx_3 = 0 \qquad (15.7)$$

Como las velocidades u_1 y u_2 son incógnitas y no son uniformes, como se muestra en la Figura 15.1(b), es conveniente en este momento introducir la noción de velocidad media definida tal como

$$\int_{-H}^{\eta} u_i\, dx_3 = U_i(H+\eta) \equiv U_i h \qquad (15.8)$$

con $i = 1, 2$. Recordaremos ahora la regla de Leibnitz de las integrales por la cual para cualquier función $F(r,s)$ puede escribirse

$$\int_{-a}^{b} \frac{\partial}{\partial s} F(r,s)\, dr \equiv \frac{\partial}{\partial s}\int_{-a}^{b} F(r,s)\, dr - F(b,s)\frac{\partial b}{\partial s} + F(a,s)\frac{\partial a}{\partial s} \qquad (15.9)$$

Partiendo de la ecuación anterior pueden reescribirse los dos últimos términos de la Ec. (15.7) e introduciendo la Ec. (15.6) se obtiene

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\, dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i h) - u_i^s \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \qquad (15.10)$$

con $i = 1, 2$. El primer término de la Ec. (15.7) está, por simple integración, dado por

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\, dx_3 = u_3^s \qquad (15.11)$$

utilizando (15.5a), se tiene

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\, dx_3 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_i^s \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \qquad (15.12)$$

Sumando las Ecs. (15.10) y (15.12) se obtiene la ecuación de continuidad media sobre el espesor, como

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (hU_i)}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hU_i)}{\partial x_i} = 0 \qquad (15.13)$$

Realizaremos ahora integraciones sobre el espesor similares para las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones horizontales. Se tiene, por tanto

$$\int_{-H}^{\eta} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - f_i\right] dx_3 = 0 \qquad (15.14)$$

con $i = 1, 2$.

Procediendo como en el caso anterior, se encuentra después de algunas operaciones algebraicas que la forma conservativa de las ecuaciones medias sobre el espesor, se escribe como

$$\frac{\partial (hU_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[hU_iU_j + \delta_{ij}\frac{1}{2}g(h^2 - H^2) - \frac{1}{\rho}\int_{-H}^{\eta} \tau_{ij}\, dx_3\right]$$
$$- \frac{1}{\rho}(\tau_{3i}^s - \tau_{3i}^b) - hf_i - g(h-H)\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{h}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x_i} = 0 \qquad (15.15)$$

En la ecuación anterior pueden prescribirse las tensiones cortantes sobre la superficie, conociendo, por ejemplo, el arrastre del viento. El cortante en el fondo se expresa frecuentemente por una fórmula de resistencia hidráulica adecuada, por ej., la expresión de Chézy, que da

$$\tau_{3i}^b = \frac{\rho g |U| U_i}{C h^2} \qquad (15.16)$$

donde

$$|U| = \sqrt{U_i U_i}$$

y C es el coficiente de Chézy.

En la Ec. (15.15) f_i denota la aceleración de Coriolis, importante en poblemas de gran tamaño, definida como

$$f_1 = \hat{f} U_2 \qquad f_2 = -\hat{f} U_1 \qquad (15.17)$$

donde $\hat{f}$ es el parámetro de Coriolis.

Las tensiones τ_{ij} requieren la definición de un coeficiente de viscosidad μ_H, generalmente de un tipo de turbulencia media, lo que permite escribir

$$\tau_{ij} = \mu_H \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \qquad (15.18)$$

Aproximando la integral restante de la Ec. (15.15) en función de las velocidades medias, puede escribirse

$$\frac{1}{\rho}\int_{-H}^{\eta} \tau_{ij}\, dx_3 \approx \frac{1}{\rho}\mu_H h\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)=\frac{h}{\rho}\bar{\tau}_{ij} \tag{15.19}$$

Las Ecs. (15.13) y (15.15) describen el problema de aguas poco profundas en la forma general de la Ec. (15.1), en la que los términos apropiados se definen más abajo.

Así, con $i = 1, 2$,

$$\mathbf{U}=\begin{Bmatrix} h \\ hU_1 \\ hU_2 \end{Bmatrix} \tag{15.20a}$$

$$\mathbf{F}_i=\begin{Bmatrix} hU_i \\ hU_1U_i+\delta_{1i}\frac{1}{2}g(h^2-H^2) \\ hU_2U_i+\delta_{2i}\frac{1}{2}g(h^2-H^2) \end{Bmatrix} \tag{15.20b}$$

$$\mathbf{G}_i=\begin{Bmatrix} 0 \\ -(h/\rho)\bar{\tau}_{1i} \\ -(h/\rho)\bar{\tau}_{2i} \end{Bmatrix} \tag{15.20c}$$

$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -h\hat{f}U_2-g(h-H)\dfrac{\partial H}{\partial x_1}+\dfrac{h}{\rho}\dfrac{\partial p_a}{\partial x_1}-\dfrac{1}{\rho}\tau_{31}^s+\dfrac{gU_1|U|}{Ch^2} \\ h\hat{f}U_1-g(h-H)\dfrac{\partial H}{\partial x_2}+\dfrac{h}{\rho}\dfrac{\partial p_a}{\partial x_2}-\dfrac{1}{\rho}\tau_{32}^s+\dfrac{gU_2|U|}{Ch^2} \end{Bmatrix} \tag{15.20d}$$

en la cual se ha utilizado la relación (15.19) para obtener el valor medio para $\bar{\tau}$ en función de los gradientes de velocidad medios.

La forma anterior, conservativa, de las ecuaciones de aguas poco profundas se presentó por primera en la referencias [4] y [5] y se utiliza generalmente en la práctica. Sin embargo, existen muchas variantes de las ecuaciones generales de aguas poco profundas en la literatura, introduciendo varias aproximaciones.

Las secciones siguientes de este capítulo se dividirán en dos partes. En la primera, Parte I, se discutirán las técnicas de integración en el tiempo del sistema completo de las ecuaciones anteriores en situaciones transitorias y en las aplicaciones estacionarias correspondientes. Aquí se incluirá, naturalmente, el comportamiento no lineal, pero por simplicidad se prescindirá de algunos términos. En particular, omitiremos en la mayoría de los ejemplos la consideración de las tensiones viscosas, tales como $\bar{\tau}_{2i}$ y $\bar{\tau}_{1i}$, cuya influencia es pequeña comparada con la de las tensiones de arrastre en

el fondo. Esto ayudará incidentalmente en la solución, ya que desaparecen ahora las segundas derivadas y pueden eliminarse las capas límite.

La segunda, Parte II, tratará las formas linearizadas de las Ecs. (15.13) y (15.15). Veremos inmediatamente que al omitir todos los términos no lineales de arrastre en el fondo, etc., y al aproximar $h \sim H$, pueden escribirse estas ecuaciones como

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(HU_i)=0 \tag{15.21a}$$

$$\frac{\partial (HU_i)}{\partial t}+gH\frac{\partial}{\partial x_i}(h-H)=0 \tag{15.21b}$$

Advirtiendo que

$$\eta = h-H \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

las expresiones anteriores se transforman en

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(HU_i)=0 \tag{15.22a}$$

$$\frac{\partial (HU_i)}{\partial t}+gH\frac{\partial \eta}{\partial t}=0 \tag{15.22a}$$

La eliminación de HU_i proporciona inmediatamente

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(gH\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)=0 \tag{15.23}$$

que es la ecuación de ondas estándar de Helmholtz. Para esta ecuación existen, naturalmente, muchas soluciones especiales mediante la utilización de los procedimientos descritos en los Capítulo 9 y 11 y aquí volveremos a prestar atención a ellos.

Las ecuaciones de aguas poco profundas obtenidas en esta sección consideran solamente los flujos medios sobre la profundidad y, por tanto, no pueden reproducir ciertos fenómenos que ocurren en la naturaleza y en los que debe incluirse la variación de la velocidad con la profundidad. En muchos de estos problemas las hipótesis básicas de una distribución de presiones hidrostáticas vertical es todavía válida y puede aceptarse una cierta forma de comportamiento similar al de aguas poco profundas.

La extensión de esta formulación puede efectuarse mediante una división *a priori* del flujo en estratos en los que se supone que existen velocidades diferentes. El sistema final de ecuaciones discretizadas se compone, entonces, de varias aproximaciones bidimensionales acopladas. Alternativamente puede introducirse el mismo efecto utilizando diferentes funciones

de interpolación para modelizar la distribución de velocidades vertical, como fue sugerido por Zienkiewicz y Heinrich.[5] Dichas generalizaciones son útiles pero están fuera del ámbito del presente texto.

PARTE I: DISCRETIZACIÓN Y SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES COMPLETAS DE AGUAS POCO PROFUNDAS

15.3 Aproximación numérica

Durante muchos años se han utilizado ampliamente los métodos de diferencias finitas y elementos finitos para resolver las ecuaciones de aguas poco profundas. Los elementos finitos se han aplicado más recientemente y en el trabajo de Kawahara[7] se encuentra una panorámica de las aplicaciones pioneras en ingeniería costera y oceanográfica. En la mayoría de éstas se adoptaron procedimientos basados en la discretización espacial seguida de esquemas apropiados de integración en el tiempo.[8–15] La primera aplicación del método de los elementos finitos en meteorología data de 1972, como se describe en la referencia [16], y el rango de aplicaciones ha aumentado continuamente desde esa fecha.[17–30] De nuevo, los procedimientos utilizados siguieron líneas similares a los empleados para problemas costeros u oceanográficos y en ambos casos se han utilizado métodos totalmente implícitos y semi-implícitos para tratar el dominio tiempo. Similarmente, para obtener soluciones estacionarias se adoptaron generalmente métodos basados en la aceleración gaussiana.

Como las ecuaciones son de convección dominante y de forma similar a las de flujo compresible, se sugiere utilizar un procedimiento idéntico al adoptado en el capítulo anterior. Está técnica ya ha demostrado su eficacia en diversas aplicaciones a problemas de aguas poco profundas.[4,5] Efectivamente, la evaluación de este método con otros alternativos muestra una comparación muy ventajosa.[31] No hay, por tanto, necesidad de insistir sobre esto ya que el esquema explícito de dos pasos de Taylor-Galerkin se ha descrito totalmente con anterioridad. Ciertamente, en este momento el lector puede observar que con la excepción de algunos términos de fuente, las ecuaciones de flujo compresible isotérmico pueden transformarse en ecuaciones de aguas poco profundas con el cambio de variables siguiente

$$\rho \quad \text{(densidad)} \longrightarrow h \quad (profundidad)$$
$$u_i \quad \text{(velocidad)} \longrightarrow U_i \quad (velocidad\ media)$$
$$p \quad \text{(presión)} \longrightarrow \frac{1}{2}g(h^2 - H^2)$$

Así no es necesario escribir un nuevo programa de solución y basta con

introducir los cambios anteriores.

En los ejemplos que siguen ilustraremos todos esos problemas resueltos por los procedimientos mencionados. Sin embargo, debemos remarcar que en ocasiones las limitaciones que establece el método explícito, que en general requiere que

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{h}{c} \tag{15.24}$$

donde $c = \sqrt{gh}$ es la velocidad de las ondas gravitatorias, pueden ser demasiado restrictivas. Para dichas situaciones puede ser necesario utilizar diversas modalidades de los procedimientos de solución implícitos indicados en el Capítulo 12. Como alternativa puede utilizarse la técnica de separación de operadores descrita en el Capítulo 13, Sección 13.8.2, con algunas modificaciones.

15.4 Ejemplos de aplicación

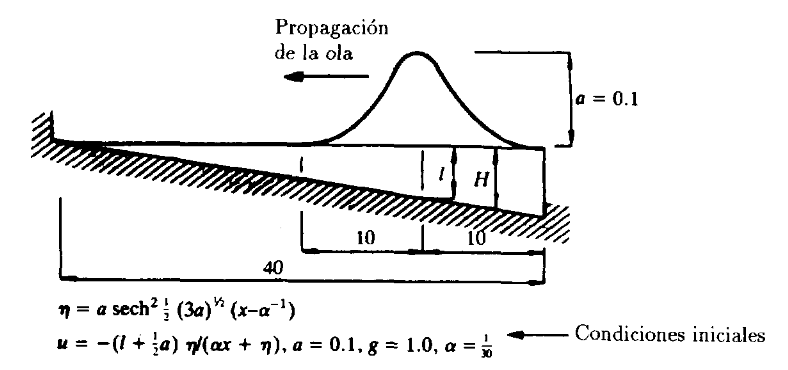
15.4.1 *Problemas transitorios unidimensionales -una evaluación del comportamiento-*. En esta sección se presentan algunos ejemplos relativamente simples en una dimensión espacial para demostrar la aplicabilidad del algoritmo de dos pasos.

El primer ejemplo, ilustrado en la Figura 15.2, muestra la progresión de una onda solitaria en una playa escalonada.[32] Este problema, frecuentemente estudiado,[33,34] muestra muy bien la elevación progresiva del frente de la ola oscurecida a menudo por esquemas que son muy disipativos.

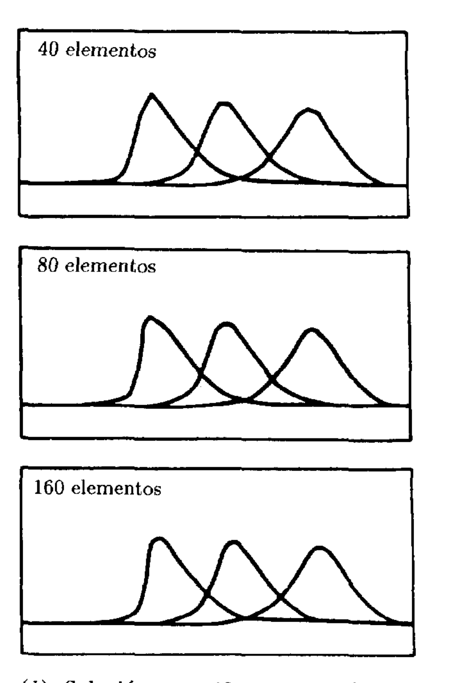
El segundo ejemplo, de la Figura 15.3, ilustra el llamado problema de "rotura de presa" en forma esquemática. En este caso una presa, separando dos niveles de agua estancada, se elimina de forma repentina y las ondas casi verticales progresan en los dos dominios. Este problema es de alguna manera similar a los de un tubo de choque en flujo compresible y se ha resuelto con bastante éxito incluso sin difusión artificial.

El ejemplo final de esta sección, Figura 15.4, muestra la formación de un "montículo" idealizado como una onda muy inclinada que progresa en un canal que transporta agua a una velocidad uniforme, causada por un incremento gradual del nivel de agua abajo. A pesar de que la velocidad del flujo es "subcrítica" (esto es, la velocidad $< \sqrt{gh}$), se desarrolla claramente una onda de choque que se transporta y viaja progresivamente inclinada.

15.4.2 *Movimientos de corrientes periódicas bidimensionales.* La extensión del cálculo a problemas bidimensionales sigue la misma pauta que la descrita en la formulación compresible ya estudiada. Por eso se utilizan de nuevo triángulos lineales para interpolar los valores de h, hU_1 y hU_2. La principal diferencia en las soluciones es la del tipo de respuesta. En los problemas de aguas poco profundas las ondas de choque no se desarrollan



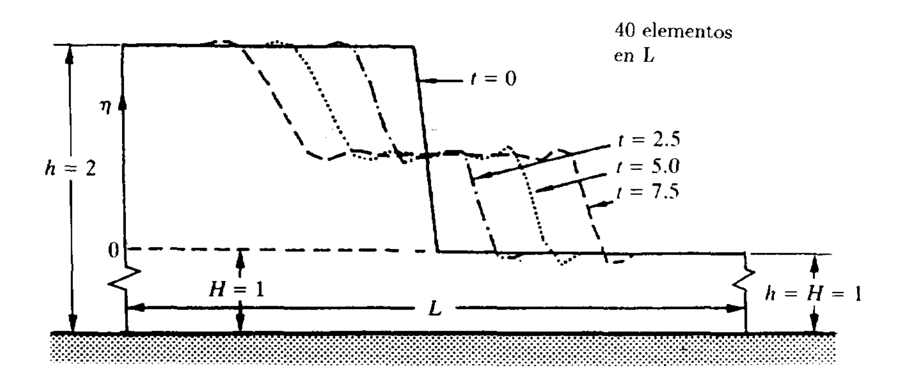
(a) Planteamiento del problema



(b) Solución para 40, 80 y 160 elementos en tiempos vacios

Figura 15.2 Rompiente de una ola.

o se disipan suficientemente por la existencia del rozamiento en el fondo, de manera que, generalmente, no es necesario utilizar viscosidad artificial y refinamientos locales. Por esta razón no se han introducido aquí las me-



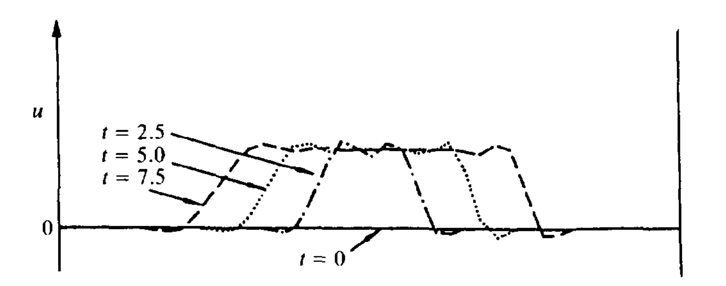


Figura 15.3 Propagación de ondas debida a un fallo en un presa ($C_{Lap} = 0$), 40 elementos en el dominio de análisis $C = \sqrt{gH} = 1$, $\Delta t = 0.25$.

didas de error y adaptividad –encontrando que las mallas suficientemente finas para describir la geometría también suelen proporcionar resultados suficientemente precisos–.

El primer ejemplo de la Figura 15.5 se presenta como un problema de test. En este caso la resistencia friccional se linealiza y se utiliza para comparación una solución exacta conocida para una respuesta periódica.[35] La respuesta periódica se obtiene numéricamente realizando unos cinco ciclos con las condiciones de contorno a la entrada. Aunque el problema es esencialmente unidimensional se utilizó una malla uniforme bidimensional y se encontró una coincidencia muy razonable con los resultados analíticos.

En el segundo ejemplo se introduce un ámbito de aplicaciones más realistas.[4,5] Aquí el problema lo proporciona el canal de Bristol y el estuario del río Severn, conocido por tener algunos de los movimientos de mareas más altos en el mundo. La Figura 15.6 muestra la localización y la escala del problema

El objetivo aquí es determinar las elevaciones de la marea y las corrientes existentes (como un posible caso preliminar a un estudio posterior de

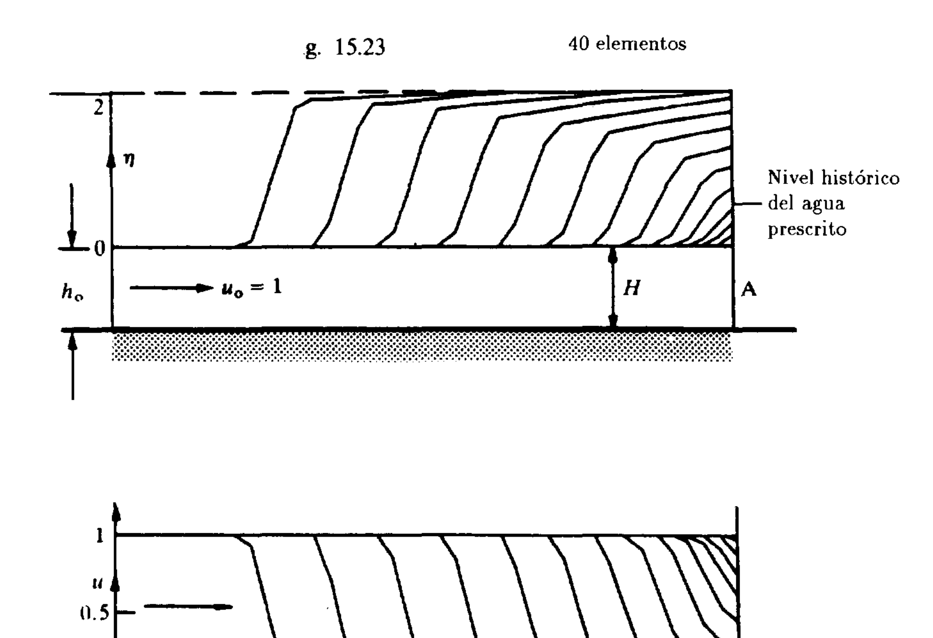


Figura 15.4 Creación de un "montículo" con una corriente debida a la elevación del nivel de agua abajo (A) nivel en $A, \eta = 1 \cos \pi/30 (0 \leq t \leq 30)$, $2(30 \leq t)$. Niveles y velocidades a intervalos de 5 unidades de tiempo, con $\Delta t = 0.5$.

la influencia de una presa que pueda construirse algún día para aprovechar la energía de la marea). Antes de comenzar el análisis debe determinarse la extensión del dominio a analizar mediante un contorno de la superficie del mar arbitrario. Sobre este contorno se imponen las alturas de la marea medida. Aquí de nuevo podría hacerse uso de ondas de entrada y salida en la forma descrita en la Sección 12.12.3, siempre que estas ondas de entrada fueran conocidas.

El análisis se efectúa mediante cuatro mallas de elementos lineales que se muestran en la Figura 15.7. Estas mallas incluyen dos posiciones del contorno exterior, encontrándose pequeñas diferencias entre los resultados obtenidos en los cuatro análisis. En todos los casos se incluye la aceleración de Coriolis y las viscosidades turbulentas.

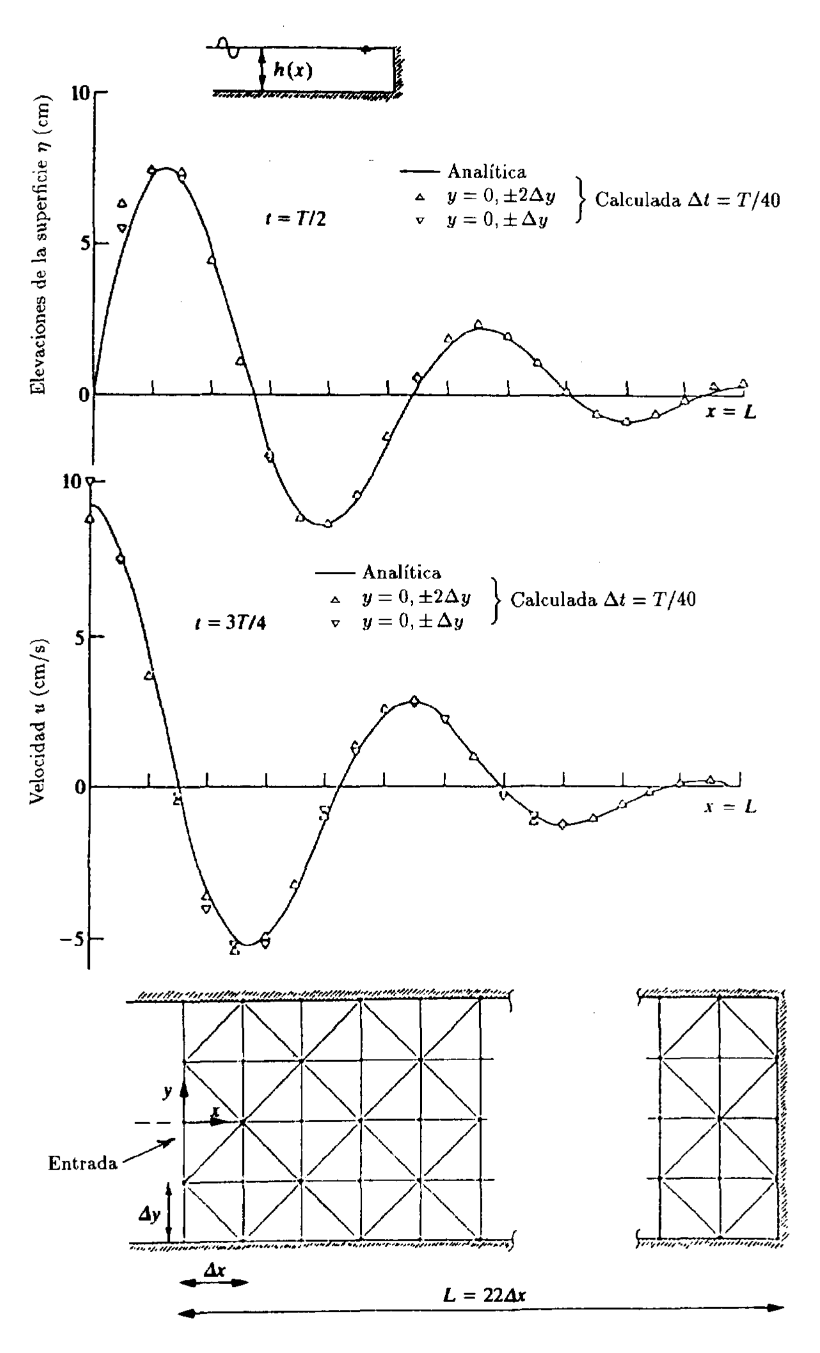


Figura 15.5 Oscilaciones estacionarias en un canal rectangular debidas a una elevación de la superficie en la entrada. Disipación friccional lineal.[31]

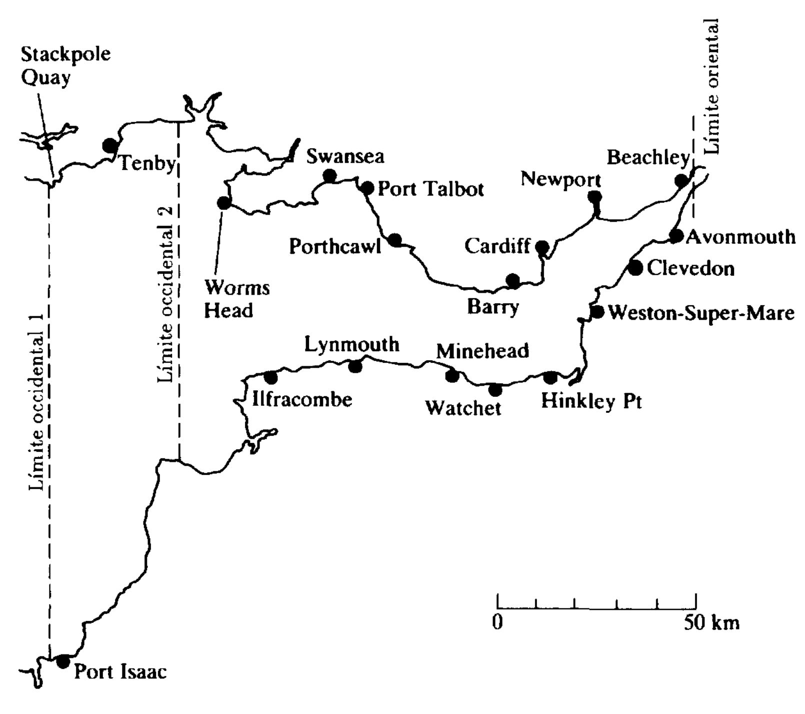


Figura 15.6 Mapa mostrando la localización del canal de Bristol y el estuario del río Severn.

El tamaño mínimo de los elementos varía de 2 a 5 km en la malla más fina a más gruesa, efectivamente. La profundidad media es aproximadamente 50 m pero, naturalmente, se utilizaron informaciones batimétricas más precisas asignando las profundidades apropiadas a cada punto nodal.

La "resonancia" del estuario es tal que la entrada de marea media con amplitud de unos 4.5 m en mar abierto se aumenta en unos 9.5 m en la zona este. En la tabla 15.1 se muestran algunas comparaciones de las alturas de mareas calculadas con las realmente observadas en varias estaciones de medida. Los resultado muestran un acuerdo muy remarcable. Finalmente, en la Figura 15.8 se indica la distribución de las velocidades en diferentes momentos del ciclo de marea.

En este análisis se ha supuesto una onda de entrada puramente senoidal y se han omitido los detalles del río Severn. Es, sin embargo, de interés ampliar el dominio de análisis ya que es bien conocido que durante las mareas de primavera se forma un "montículo" u onda solitaria muy espectacular en esa zona. Así, en la Figura 15.9 se muestra una malla ampliada. En este caso el análisis indica claramente que la oscilación de la marea originalmente senoidal se distorsiona progresivamente a medida

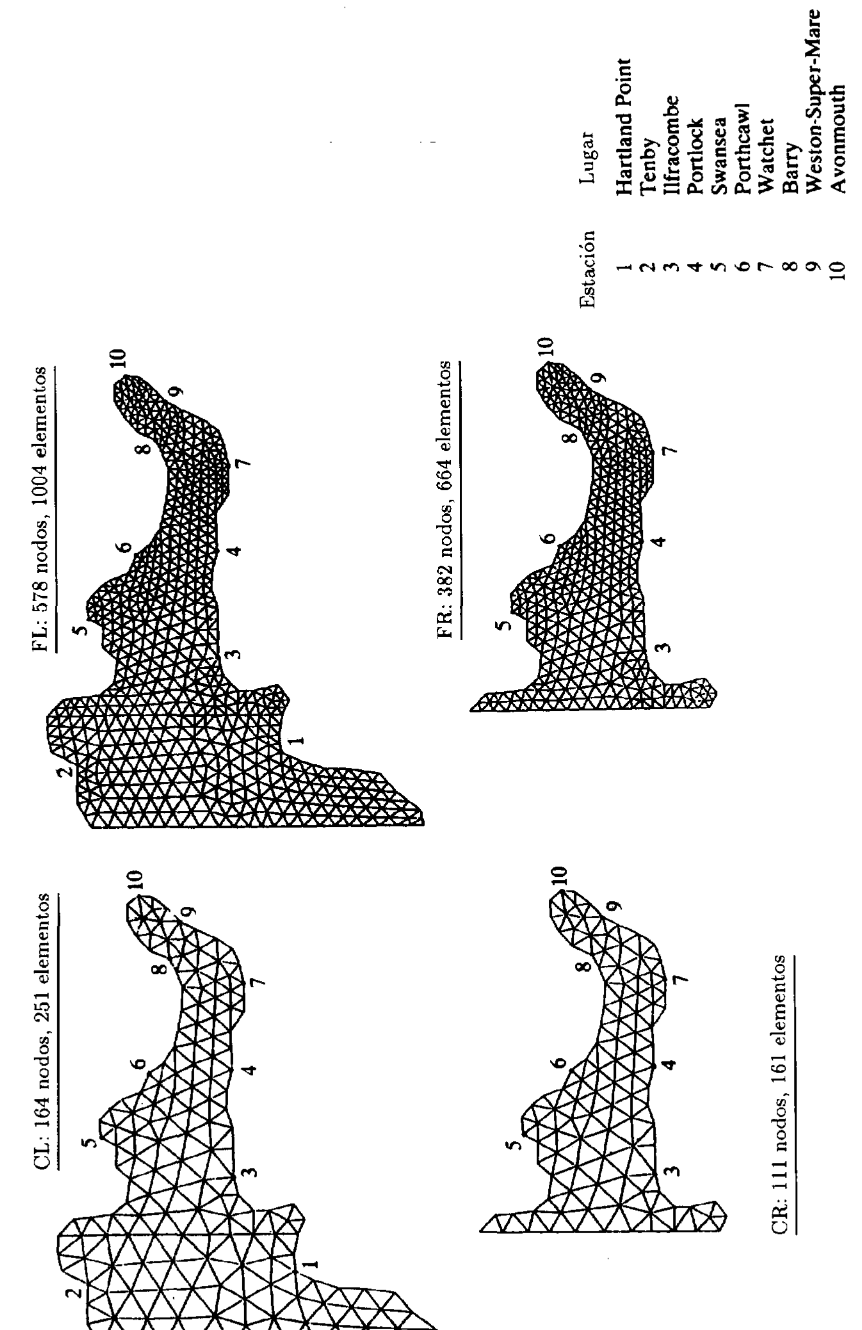


Figura 15.7 Mallas de elementos finitos. Canal de Bristol y estuario del río Severn.

TABLA 15.1
CANAL DE BRISTOL Y ESTUARIO DEL RÍO SEVERN
RESULTADOS MEDIDOS Y SOLUCIÓN CON EL MEF
(MALLA FL) DE LA AMPLITUD MEDIA DE LA MAREA $(m \times 10^2)$

Posición	Observado	MEF
Temby	262	260 (−1%)
Swansea	315	305 (−3%)
Port Talbot	316	316 (0%)
Porthcawl	317	327 (+3%)
Barry	382	394 (+3%)
Cardiff	409	411 (0%)
Newport	413	420 (+2%)
Ilfracombe	308	288 (−6%)
Minehead	358	362 (+1%)

que penetra en el río y representa razonablemente el fenómeno observado de la elevación muy rápida del nivel de la marea y disminución lenta en la boca del río. Naturalmente, los detalles de la ola real no pueden modelarse con esta representación tan grosera.

El intervalo de tiempo típico en los cálculos anteriores fue de $\Delta t = 1$ minuto (dos minutos en la malla más grosera), requiriéndose un gran número de incrementos de tiempo para representar el ciclo de marea completo. Pese a esto, los cálculos se realizaron de forma rápida y en un ordenador pequeño, ya que el tamaño total del problema es relativamente insignificante comparado con los problemas típicos de flujo compresible.

15.4.3 *Olas tsunami.* Un problema de considerable interés en zonas sísmicas es el denominado olas de marea o tsunamis. Estos fenómenos se originan por movimientos rápidos de la corteza terrestre y pueden en ocasiones ser extremadamente destructivos. El análisis de dichas olas no presenta dificultades en el marco del proceso general explicado anteriormente y ciertamente es computacionalmente más barato, ya que solamente es necesario utilizar períodos cortos de tiempo. Para ilustrar un posible tsunami típico se ha generado uno en el estuario del río Severn analizado previamente (para ahorrar los problemas de generación de mallas, etc., en el caso de otra configuración más probable).

Ahora el tsunami origina un incremento instantáneo del nivel de agua de unos 6 m en un elemento situado cerca del centro del estuario y se utilizó la malla (FL) del problema anterior. En la Figura 15.10 se muestra

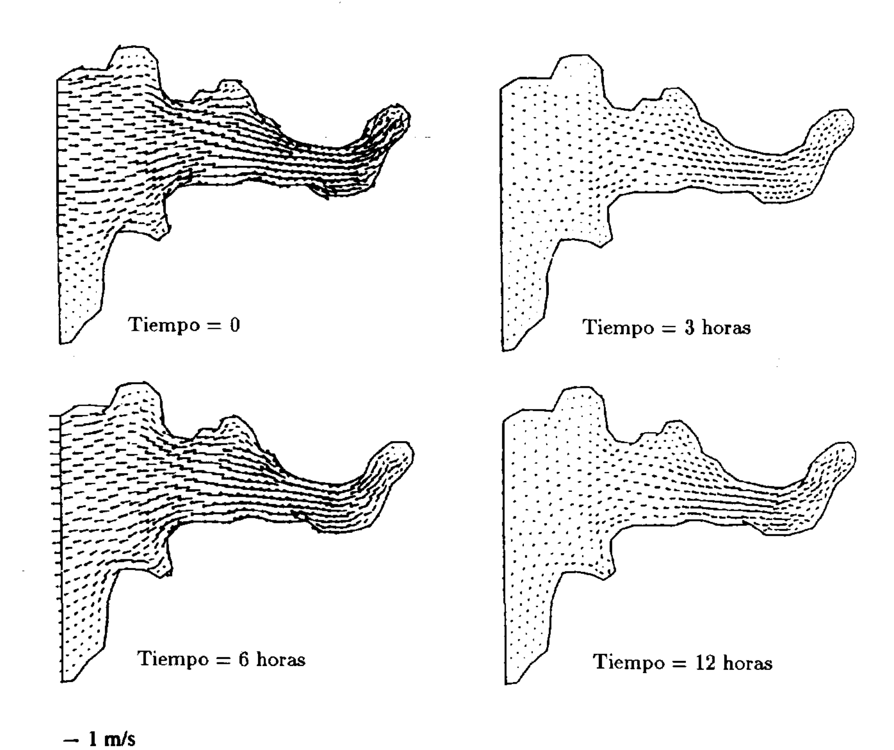


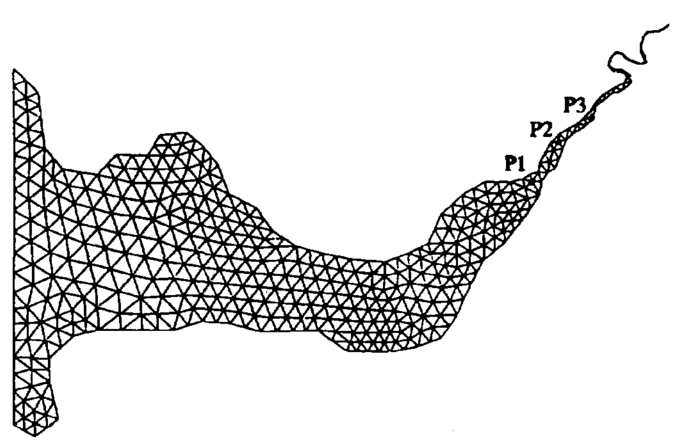
Figura 15.8 Dibujo del vector de velocidades (malla FL).

la progresión de la onda. La onda de tsunami se superpuso a la marea en el nivel más alto –aunque, naturalmente, se permitieron los movimientos típicos de la marea–.

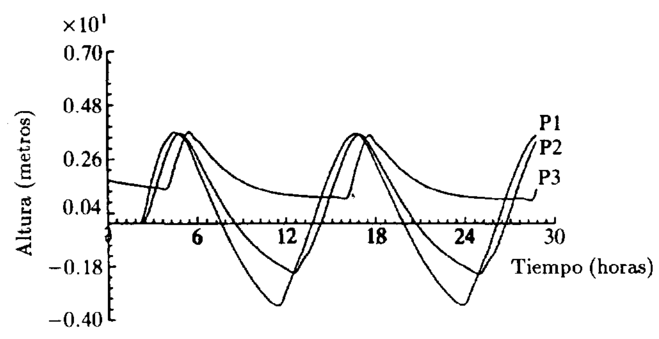
En este cálculo es preciso mencionar un punto adicional. Éste se refiere a la condición de contorno en mar abierto. Aquí, si se quieren incorporar los efectos de movimiento de la marea hay que hacer uso de la descomposición de Riemann del tipo discutido con anterioridad (Sección 12.13.4) y advertir el hecho de que el tsunami origina solamente una ola de salida. Esto, en ausencia de mareas, equivale simplemente a aplicar la condición de frontera libre en esa zona.

La limpieza con que el tsunami deja el dominio de la Figura 15.10 demuestra la efectividad de este proceso.

15.4.4 *Soluciones estacionarias.* En algunos casos hay que considerar corrientes estacionarias como las que pueden originarse por el movimiento persistente del viento u otras causa. Aquí de nuevo la forma transitoria del cálculo explícito demuestra ser muy efectiva y la convergencia es



(*a*) Malla de elementos finitos incluyendo el rio

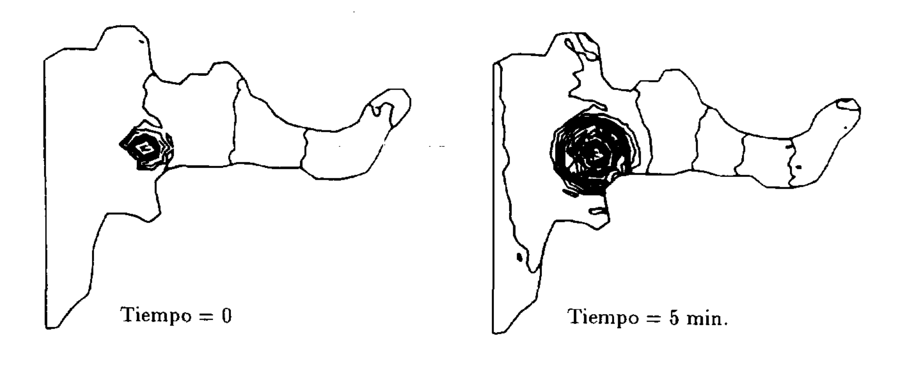


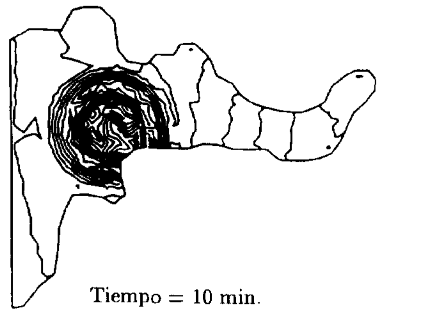
(*b*) Curvas de elevación de la superficie con el tiempo en varios puntos del rio

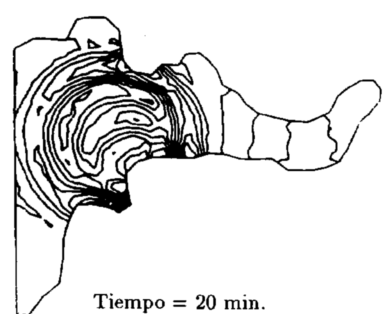
Figura 15.9 "Montículo" por subida de la marea en el río Severn.

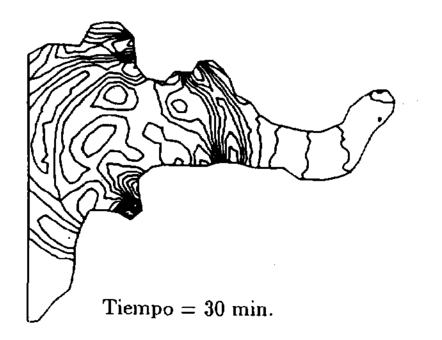
generalmente más rápida que en el caso de flujo incompresible, ya que el efecto de rozamiento en el fondo juega un papel más importante.

El lector interesado encontrará muchas de estas soluciones estacionarias en la literatura. En la Figura 15.11 se muestra un ejemplo típico. Aquí, las corrientes se inducen en la zona de rompiente donde las olas alcanzan profundidades pequeñas creando las denominadas tensiones radiantes.[6,29,36] Obviamente, primero hay que calcular las formas de la ola utilizando los procedimientos que se darán más tarde. Las fuerzas debidas a la ruptura del curso de las olas son la causa de las corrientes marinas y de las corrientes en aguas revueltas en general. La figura ilustra este efecto en un puerto.









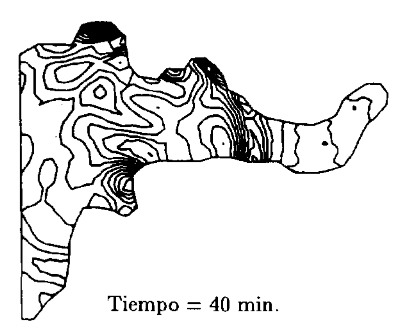


Figura 15.10 Tsunami en el río Severn. Generación durante la marea alta. Contornos con profundidades del agua (tiempos después de la generación).

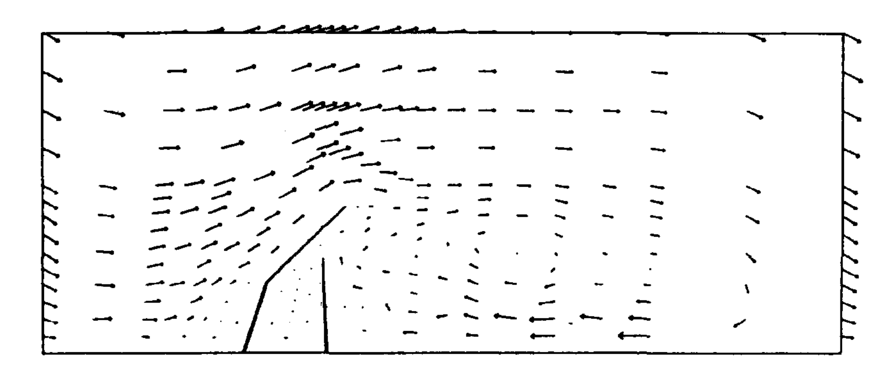


Figura 15.11 Corriente estacionaria inducida por una ola atravesando un puerto.[29]

Es interesante advertir que en el problema discutido anteriormente los contornos laterales se han repetido para modelar una serie infinita de puertos.[36]

15.5 Zonas secas

Un problema especial encontrado en cálculos de marea transitoria es el de los cambios en el contorno debidos a modificaciones en la profundidad del agua. Este efecto se ha ignorado en el análisis presentado para el canal de Bristol y el estuario del río Severn, ya que los movimientos del contorno son razonablemente pequeños en la escala del análisis. Sin embargo, en este ejemplo estos movimientos pueden ser del orden de 1 km, y en mareas cerca del Mont St. Michel, en Francia, pueden alcanzar 12 km. Claramente en algunas ocasiones es necesario considerar dichos movimientos en el análisis y se han sugerido procedimientos diferentes para tratar este problema. La Figura 15.12 muestra la técnica más sencilla, que es efectiva si el movimiento total puede confinarse al tamaño de un solo elemento. En este caso los nodos del contorno se trasladan a lo largo de la dirección normal en la medida en que lo requieran los cambios de profundidad $\Delta\eta$.

Si las variaciones son mayores que las que puede absorver un solo elemento, entonces es necesario un tratamiento más completo que incluye una regeneración automática de la malla en las zonas secas.

15.6 Transporte en aguas poco profundas

Las corrientes en aguas poco profundas transportan frecuentemente cantidades que pueden dispersarse o disolverse en el proceso. Un caso

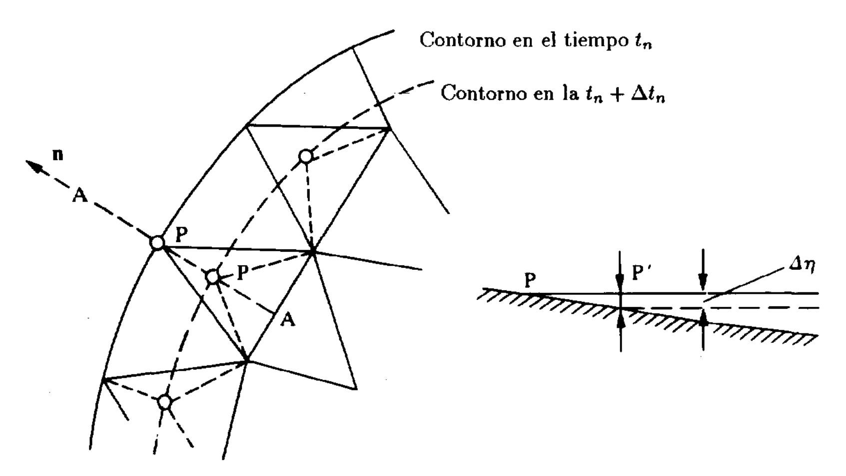


Figura 15.12 Ajuste de un contorno debido a la variación de la altura de marea.

típico es el transporte de agua caliente debido a descargas de plantas nucleares o el de sedimentos o contaminantes. El mecanismo de transporte de sedimentos es bastante complejo,[37] pero en principio seguiremos reglas similares a las de otras ecuaciones. En todos los casos es posible escribir *ecuaciones de transporte medias sobre la profundidad* en las que las velocidades medias U_i se determinan independientemente.

Una ecuación media típica puede escribirse –utilizando la temperatura (T) como la cantidad que se transporta– como

$$\frac{\partial(hT)}{\partial t}+\frac{\partial(hU_iT)}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(Hk\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+R(T-T_a)=0 \quad \text{para } i=1,2 \quad (15.25)$$

donde h y U_i son cantidades definidas y calculadas previamente, k es un coeficiente de difusión, R una constante de radiación y T_a la temperatura ambiente del aire.

Poco hay que decir acerca del método para resolver dichas ecuaciones. Naturalmente pueden utilizarse procedimientos de discretización idénticos a los utilizados para resolver el problema del flujo. Ciertamente, en la forma explícita el cálculo podría efectuarse simultáneamente para las ecuaciones de flujo y dispersión. En general, sin embargo, no se recomienda dicho cálculo simultáneo ya que:

1. Las ecuaciones no están completamente acopladas y el problema de flujo puede resolverse independientemente.

2. Los incrementos de tiempo que pueden utilizarse en el cálculo de la Ec. (15.25) pueden ser mucho mayores para la estabilidad, con

$$\Delta t_{crit} < \frac{h}{|U|}$$

dependiendo de las velocidades del transporte, más que de las de la ola.

En la Figura 15.13 se muestra como ejemplo la dispersión de una descarga de agua caliente *continua* en un área del estuario del río Severn. Aquí se advierte no sólo el movimiento de convección, sino también la difusión de las líneas de isotemperatura.

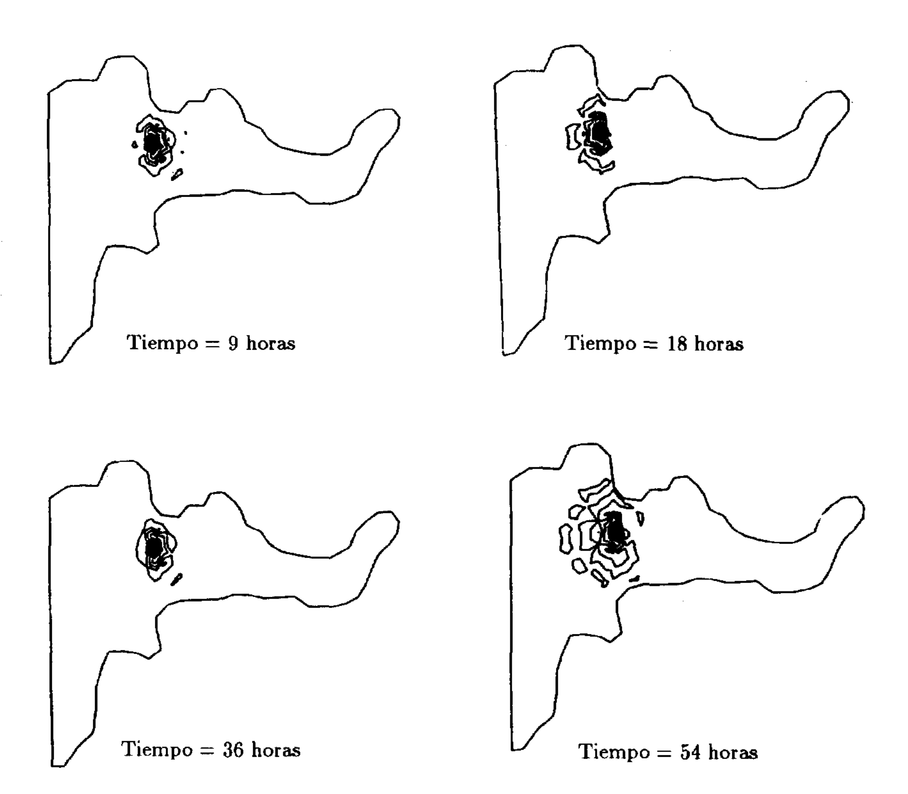


Figura 15.13 Difusión y convección del calor en corrientes de marea. Líneas de igual temperatura para diferentes tiempos después de la descarga de un fluido caliente.

PARTE II: ECUACIONES LINEALIZADAS DE AGUAS POCO PROFUNDAS Y OLAS†

15.7 Introducción y ecuaciones

Partiremos de la ecuación de ondas (15.23) que se obtuvo de las ecuaciones de equilibrio, cantidad de movimiento y conservación de masa, y en la que se han omitido los siguientes efectos: viscosidad (real y turbulenta), aceleración de Coriolis, rozamiento en el fondo y aceleración convectiva. Adicionalmente, la altura de ola η es pequeña en comparación con la profundidad del agua, H. Si el problema es periódico se puede escribir la elevación de ola η de forma general como

$$\eta(x, y, t) = \bar{\eta}(x, y) \exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{15.26}$$

donde ω es la frecuencia angular y $\bar{\eta}$ debe ser un número complejo. La Ec. (15.23) se convierte ahora en

$$\nabla(H\nabla\bar{\eta}) + \frac{\omega^2}{g}\bar{\eta} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(H\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x_i}\right) + \frac{\omega^2}{g}\bar{\eta} = 0 \tag{15.27}$$

y, para una profundidad de ola constante H,

$$\nabla^2\bar{\eta} + k^2\bar{\eta} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2\bar{\eta}}{\partial x^2} + k^2\bar{\eta} = 0 \tag{15.28}$$

donde el número de onda $k = \omega/\sqrt{gH}$ y la velocidad de onda $c = \omega/k$. La Ec. (15.28) es la ecuación de Helmholtz que modela muchos problemas de ondas. Ésta es solamente una forma de dicha ecuación para ondas de superficie, para la que existe una literatura muy extensa.[38–41] A partir de ahora todos los problemas se supondrán periódicos, y se prescindirá de la barra sobre η.

La Ec. (15.27) es cierta cuando la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$ es grande en relación con la profundidad H. Si no se cumple esta última condición, entonces un análisis más complicado[38,39] muestra que para una profundidad de agua constante las velocidades y el potencial varían verticalmente como $\cosh kz$. Berkhoff[42] obtuvo las ecuaciones de onda para profundidades intermedias, para el caso de profundidad variable, utilizando desarrollos asintóticos, lo que es una variante de la Ec. (15.27). Una derivación completa de las ecuaciones se presenta en el trabajo

† Aportado por Peter Bettes, Department of Marine Technology, University of Newcastle upon Tyne.

de Zienkiewicz y Bettess[43] y debe advertirse que ahora la hipótesis de las velocidades medias uniformes que hemos utilizado para obtener las ecuaciones de aguas poco profundas se abandona. La ecuación completa puede escribirse ahora como

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(cc_g\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)+\omega^2\frac{c_g}{c}\eta=0 \qquad \text{o} \qquad \nabla(cc_g\nabla\eta)+\omega^2\frac{c_g}{c}\eta=0 \tag{15.29}$$

donde el coeficiente de velocidad de grupo $c_g = nc$,

$$n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2kH}{\operatorname{senh} 2kH}\right) \tag{15.30}$$

y la *relación de dispersión*

$$\omega^2 = gk\tanh kH \tag{15.31}$$

relaciona la frecuencia angular ω y la profundidad del agua H con el número de onda k. (Esto incluye como casos particulares el de las ecuaciones de aguas profundas estudiado anteriormente, con $k=\omega\sqrt{gH}$, y el de las ecuaciones de aguas profundas, con $k=\omega^2/g$.) Esta relación se denomina relación de dispersión, porque las olas de diferente longitud de onda en aguas de profundidades intermedias viajan a diferentes velocidades, de manera que una perturbación arbitraria se desdobla en sus componentes con diferentes velocidades, que se dispersan con el tiempo. Para aguas profundas la Ec. (15.28) se convierte en

$$\nabla^2\eta+\frac{\omega^4}{g^2}\eta=0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial {x_i}^2}+\frac{\omega^4}{g^2}=0 \tag{15.32}$$

15.8 Ondas en recipientes cerrados–modelos de elementos finitos

Consideraremos un recipiente cerrado de cualquier forma y profundidad variable. En planta puede dividirse en elementos bidimensionales de cualquiera de los tipos discutidos en el Volumen 1. La elevación de la ola η en cualquier punto (ξ,η) puede expresarse en función de las velocidades nodales utilizando las funciones de forma del elemento $\mathbf{N}$. Así pues

$$\eta \simeq \hat{\eta} = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\eta}} \tag{15.33}$$

a continuación la Ec. (15.23) se pondera con la función de forma y se integra por partes en la forma usual, para obtener

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}H\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}-\mathbf{N}^T\frac{\omega^2}{g}\mathbf{N}\right)d\Omega\bar{\boldsymbol{\eta}}=0 \tag{15.34}$$

La integral se efectúa sobre todos los elementos del dominio y $\boldsymbol{\eta}_i$ representa todos los valores nodales de η. Claramente las integrales pueden calcularse por subdominios sobre todos los elementos utilizados. La condición de contorno natural que surge es $\partial\eta/\partial n=0$, donde n es la normal al contorno. Esto corresponde a un flujo normal cero a través del contorno, lo que se deduce de la ecuación de equilibrio de cantidad de movimiento (15.15). Físicamente esto corresponde a una pared vertical perfectamente reflejante. La Ec. (15.34) puede reformularse en la forma familiar

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\bar{\boldsymbol{\eta}}=0 \tag{15.35}$$

donde

$$\mathbf{M}=\sum_{\substack{\text{todos los}\\ \text{elementos}}}\int \mathbf{N}^T\frac{1}{g}\mathbf{N}\,d\Omega_{elemento}$$

$$\mathbf{K}=\sum_{\substack{\text{todos los}\\ \text{elementos}}}\int \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,d\Omega_{elemento} \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} h & 0\\ 0 & h\end{bmatrix}$$

El problema es, por tanto, del tipo de *valores propios* ya discutido en el Capítulo 9. Las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{M}$ son análogas a las de rigidez y de masa. Los *valores propios* proporcionan las frecuencias naturales de oscilación del agua en el recinto y los *vectores propios* dan las formas nodales de la superficie del agua. Dicho análisis fue efectuado por primera vez utilizando elemento finitos por Taylor y *et al.*[44] y los resultados se muestran en la Figura 9.10 del Capítulo 9. Naturalmente, existen soluciones analíticas para puertos de forma regular y profundidad constante.[38] El lector debería encontrar sencilla la modificación de la rutina de elemento estándar dada en el Capítulo 15 del Volumen 1 para generar las matrices de "rigidez" y "masa" para la ecuación de ondas. En todos los modelos de ondas es necesario utilizar una malla de elementos suficientemente fina, con unos ocho elementos lineales o cuatro cuadráticos por longitud de onda. El modelo descrito más arriba proporciona buenos resultados para problemas de resonancia en cuerpos. No obstante, sus defectos principales son los siguientes:

1. Falta de precisión cuando la altura de la ola se hace grande. Las ecuaciones son sólo válidas cuando η se hace grande, y para valores muy grandes de η las olas se romperán, lo que introduce pérdidas de energía.
2. No incluye la modelización del rozamiento del fondo. Este tema se discutirá más adelante.

3. No incluye la modelización de la separación del flujo en las esquinas entrantes. En dichas zonas existe una singularidad en la velocidad de la forma $1/\sqrt{r}$. Las velocidades se hacen grandes, y físicamente los efectos viscosos, despreciados más arriba, se hacen importantes. Esto causa retardos, separación de flujo y turbulencias. Este efecto puede modelarse teóricamente de manera aproximada. (Los mismos fenómenos causan efectos de amortiguamiento por rotaciones en barcos y otras hidronaves.)

Todos los efectos anteriores introducen pérdidas de energía en el sistema, lo que se traduce en una oscilación amortiguada y ya no es más un problema de valores propios. En este caso la respuesta del sistema puede determinarse para una frecuencia de oscilación dada, como se discutió en el Capítulo 9.

15.8.1 *Rozamiento del fondo y otros efectos.* El término de rozamiento en el fondo de Chézy no es lineal y si se incluye en su forma original hace que las ecuaciones sean muy difíciles de resolver. El procedimiento usual es suponer que su efecto principal es amortiguar el sistema, mediante absorción de energía, e introducir un término lineal, el cual en un período absorve la misma cantidad de energía que el término de Chézy. La versión linearizada del rozamiento en el fondo de la Ec. (15.27) es

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(H\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right) = -\frac{\omega^2}{g}\eta + \mathrm{i}\omega M\eta \quad \text{o} \quad \nabla(H\nabla\eta) = -\frac{\omega^2}{g}\eta + \mathrm{i}\omega M\eta \qquad (15.36)$$

donde M es un coeficiente de rozamiento linearizado, dado por $M = 8u_{max}/3\pi C^2 H$, C es la constante de Chézy y u_{max} es la velocidad máxima del fondo en ese punto. En general, los resultados para η serán ahora complejos y tendrán que utilizarse procedimientos iterativos, ya que no dependen de la incógnita u_{max}. Desde el punto de vista de elementos finitos, ya no tiene sentido separar las matrices de "rigidez" y de "masa". En vez de ello, se pondera la Ec. (15.36) utilizando las funciones de elementos finitos y se forma la matriz completa del elemento en forma *compleja*. Las matrices del segundo miembro surgen de las fuerzas actuantes. El efecto entrante en la esquina y las paredes absorventes y ambientes permeables pueden modelarse de manera similar, ya que todos introducen un efecto de amortiguamiento debido a disipación viscosa. El método se explica en la referencia [45], donde se resuelve un ejemplo que muestra el flujo a través de una pared perforada de una estructura en alta mar.

15.9 Olas en dominios no acotados (problemas de ondas de superficie exteriores)

Los problemas de esta categoría incluyen la difracción y refracción de ondas en las proximidades de estructuras fijas y flotantes y la determinación de las fuerzas de las olas y de su movimiento en estructuras marinas y barcos, así como la determinación de la forma de las olas en las proximidades de la costa, puertos abiertos y rompientes. En el interior o parte finita del dominio se pueden utilizar elementos finitos exactamente como se ha descrito en la Sección 15.8. Sin embargo, deben utilizarse procedimientos especiales para la parte del dominio que se extiende al infinito. Esto es incluso más importante que en los problemas estáticos descritos en el Capítulo 8 del Volumen 1, ya que una modelización incorrecta del contorno causa reflexiones en las olas, lo que puede dar lugar a grandes errores en la región interior. Computacionalmente la dificultad principal es que el problema no tiene contorno exterior. Esto hace necesario utilizar una condición de *radiación.* Dicha condición se introdujo en el Capítulo 11 por la Ec. (11.15) para el caso de una onda unidimensional, o una onda plana incidiendo ortogonalmente en dos o más dimensiones.

Hasta muy recientemente no ha estado disponible una versión completa de la condición de radiación para problemas transitorios de más de una dimensión. Sin embargo, Bayliss *et al.*[46,47] han desarrollado hace poco una condición de radiación adecuada por medio de unas series infinitas de operadores. El punto inicial es la representación de la onda de la ola saliente en forma de series infinitas. Cada término de la serie se obtiene utilizando un operador de contorno. La secuencia de operadores de contorno constituye aquí la condición de radiación. Adicionalmente existe la forma clásica de la condición de contorno para problemas periódicos dada por Sommerfield.

En la Tabla 15.2 se muestra un resumen de todas las condiciones de radiación disponibles. Las condiciones de contorno periódicas aparecen a veces con signos diferentes, debido a que la dependencia con el tiempo puede introducirse mediante una multiplicación por $\exp(-\mathrm{i}\omega j)$ o $\exp(\mathrm{i}\omega j)$, lo que conduce a un cambio de signo en los términos que contienen derivadas temporales.

15.9.1 *Antecedentes de los problemas de ondas.* La forma más sencilla de problemas de ondas en contornos no acotados y exteriores es la de un artificio excitado que genera ondas que no regresan. Un ejemplo sencillo podría ser el de un objeto que flota en medio del mar, y que se mueve de arriba hacia abajo generando ondas hacia afuera. El ejemplo transitorio es una piedra que se arroja en medio de una laguna. Este caso se denomina problema de *radiación*, y solamente es necesario tratar la onda saliente.

TABLA 15.2

CONDICIONES DE RADIACIÓN PARA PROBLEMAS DE ONDAS EXTERIORES

Dimensiones		
1	2	3
Condiciones de contorno generales		
Transitorias		
$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$	$B_m \eta = 0, m \to \infty$ $B_m = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2j - \frac{3}{2}}{r} \right)$	$B_m \eta = 0, m \to \infty$ $B_m = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2j - 1}{r} \right)$
Periódicas		
$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathrm{i}k\eta = 0$	$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} + \mathrm{i}k\eta \right) = 0$ o $B_m \eta = 0, m \to \infty$ $B_m = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mathrm{i}k + \frac{2j - \frac{3}{2}}{r} \right)$	$\lim_{r \to \infty} r \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} + \mathrm{i}k\eta \right) = 0$ o $B_m \eta = 0, m \to \infty$ $B_m = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \mathrm{i}k + \frac{2j - 1}{r} \right)$
Condiciones de contorno simétricas		
Transitorias		
$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\eta}{2r} + \frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$ Problemas de revolución	$\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\eta}{r} + \frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$ Simetría esférica
Periódicas		
$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathrm{i}k\eta = 0$	$\frac{\partial \eta}{\partial r} + \left(\frac{1}{2r} + \mathrm{i}k \right) \eta = 0$ Problemas de revolución	$\frac{\partial \eta}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} + \mathrm{i}k \right) \eta = 0$ Simetría esférica

El siguiente tipo de problemas de ondas exteriores se presenta cuando una onda entrante conocida encuentra un objeto que modifica la onda y de nuevo produce una radiación hacia fuera hasta el infinito. El ejemplo sería el de una onda incidente que golpea una estructura marina y radía hacia afuera, o en el caso transitorio, una ola sumergida que choca con un submarino y radía hacia afuera. Este caso es conocido como el problema de *difracción* y es más complicado, ya que hay que tratar ambos casos de ondas incidentes y radiantes. Incluso cuando ambas olas son lineales, este caso

puede conducir a complicaciones. Finalmente, los casos anteriores pueden complicarse por la *refracción* de ondas, donde las velocidades de onda cambian debido a cambios en el medio, en este caso debido a cambios en la profundidad del agua. Usualmente estos fenómenos conducen a cambios en la dirección de la onda. Las olas pueden también *reflejarse* en los contornos, tanto reales, como en aquéllos fruto de la discretización.

15.9.2 *Difracción de ondas.* Consideraremos ahora el problema de una onda incidente difractada por un objeto. El problema consiste en un objeto en un cierto medio, que difracta las ondas incidentes. Dividiremos el medio en dos regiones, como se muestra en la Figura 15.14, con contornos Γ_A, Γ_B, Γ_C y Γ_D. Estos contornos tienen el siguiente significado: Γ_A es el contorno del cuerpo que difracta las ondas; Γ_B el contorno entre los dos dominios computacionales y en el cual se utiliza la elevación de onda total (u otra variable de campo) y la elevación de la onda radiada; Γ_C el contorno exterior del modelo computacional; y Γ_D el contorno en el infinito. Algunos de estos contornos pueden superponerse.

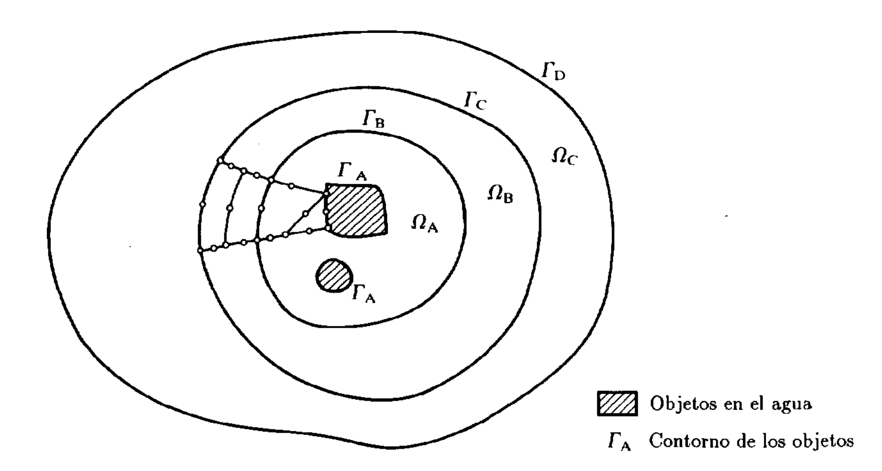


Figura 15.14 Dominios generales de las ondas.

Se utilizará una formulación variacional, como se describió en el Capítulo 9 del Volumen 1. Es también posible un tratamiento basado en residuos ponderados. La elevación de la onda total, η_T, se separa en la de las ondas incidentes y radiadas, η_I y η_R. Por consiguiente

$$\eta_T = \eta_I + \eta_R \tag{15.37}$$

La elevación de la onda incidente, η_I, se supone conocida. Para el problema de ondas superficiales, el funcional en el exterior puede escribirse como

$$\Pi = \iint_{\Omega_B} \frac{1}{2}\left[H(\nabla\eta)^2 - \frac{\omega^2}{g}\eta^2\right] dxdy \tag{15.38}$$

en la que hacer Π estacionario con respecto a variaciones de η equivale a satisfacer la ecuación de ondas en aguas poco profundas (15.23) con la condición de contorno natural $\partial\eta/\partial n = 0$, o la velocidad normal al contorno igual a cero. El funcional se reescribe en función de las elevaciones incidentes y radiadas, y se aplica el teorema de Green en el plano (Apéndice 6 del Volumen 1) sobre el domino exterior a Γ_n. Consultar la referencia [45] para mayores detalles. El funcional final para el exterior es

$$\Pi = \iint_{\Omega_B} \frac{1}{2}\left[H(\nabla\eta_R)^2 - \frac{\omega^2}{g}\eta_R^2\right] dxdy + \oint_{\Gamma_B} H\left(\frac{\partial\eta_I}{\partial x}\eta_R\, dy - \frac{\partial\eta_I}{\partial y}\eta_R\, dx\right) \tag{15.39}$$

La infuencia de la onda incidente es, por tanto, la de generar un "término de fuerza" sobre el contorno Γ_B.

15.9.3 *Ondas incidentes e integrales sobre el dominio y valores nodales.* Es posible seleccionar cualquier función conocida de la solución de ondas como onda incidente. Definitivamente se escoge una onda plana monocromática, cuya elevación viene dada por

$$\eta_I = a_0 \exp(\mathrm{i}kr)\cos(\theta - \gamma) \tag{15.40}$$

donde γ es el ángulo que las ondas incidentes forman con el eje x positivo, r y θ son las coordendas polares y a_0 es la amplitud de la onda incidente. Sobre el contorno Γ_B se tienen dos tipos de variables, la elevación total η_T en el interior y la elevación de radiación sobre el exterior, η_R. Claramente los valores nodales en el modelo de elementos finitos deben ser únicos, y sobre este contorno, como sobre la integral de línea de la Ec. (15.39), debemos transformar los valores nodales, bien a η_T o a η_R. Esto se hace simplemente imponiendo el cambio de variable, que conduce a una contribución del segundo miembro o término "de fuerza". La matriz elemental y el "segundo miembro" se escriben, para un elemento en el exterior, con valores nodales de la elevación de onda radiada η_R,

$$\mathbf{k}\eta_R = \mathbf{f}$$

los nodos se dividen ahora en dos conjuntos: el *conjunto 1* lo forman los nodos que se transforman en la elevación total $\boldsymbol{\eta}_T$, y el *conjunto 2*, los nodos

que permanecen como $\boldsymbol{\eta}_R$. Claramente, $\boldsymbol{\eta}_T = \boldsymbol{\eta}_I + \boldsymbol{\eta}_R$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{11}\boldsymbol{\eta}_R^1 + \mathbf{k}_{12}\boldsymbol{\eta}_R^2 &= \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{k}_{21}\boldsymbol{\eta}_R^1 + \mathbf{k}_{22}\boldsymbol{\eta}_R^2 &= \mathbf{f}^2 \end{aligned} \tag{15.41}$$

Sustituyendo para $\boldsymbol{\eta}_R$, las Ecs. (15.40) se transforman en

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{11}\boldsymbol{\eta}_R^1 + \mathbf{k}_{12}\boldsymbol{\eta}_T^2 &= \mathbf{f}^1 + \mathbf{k}_{12}\boldsymbol{\eta}_I \\ \mathbf{k}_{21}\boldsymbol{\eta}_R^1 + \mathbf{k}_{22}\boldsymbol{\eta}_T^2 &= \mathbf{f}^1 + \mathbf{k}_{22}\boldsymbol{\eta}_I \end{aligned} \tag{15.42}$$

Lo que se traduce en una simple modificación del segundo miembro de las ecuaciones elementales.

Hay diferentes métodos para tratar problemas exteriores utilizando elementos finitos en combinación con otros métodos. Esto incluye:

a) amortiguadores de contorno, tanto planos comos cilíndricos,
b) enlazar la solución de elementos finitos con soluciones exteriores, y
c) elementos infinitos.

15.10 Amortiguadores de contorno

Como vimos en el Capítulo 11, se puede aplicar simplemente el amortiguador plano en el contorno de la malla. Esto se hizo por primera vez en problemas de fluidos por Zienkiewicz y Newton.[48] Sin embargo, pueden utilizarse los amortiguadores más sofisticados propuestos por Bayliss *et al.* con un coste de cálculo adicional pequeño y un gran aumento de la precisión. Los amortiguadores se desarrollan a partir de las series dadas en la Tabla 15.2. En la referencia [49] pueden encontrarse completos detalles. Para el caso de ondas bidimensionales la integral de línea que debe aplicarse sobre el contorno circular de radio r es

$$A = \int_\Gamma \left[\frac{\alpha}{2}\eta^2 + \frac{\beta}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial s}\right)^2\right] ds \tag{15.43}$$

donde ds es el diferencial de longitud a lo largo del contorno, y

$$\alpha = \frac{3/4r^2 - 2k^2 + 3\mathrm{i}k/r}{2/r + 2\mathrm{i}k} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{2/r + 2\mathrm{i}k} \tag{15.44}$$

Para el amortiguador plano, $\beta = 0$ y $\alpha = \mathrm{i}k$. Para el amortiguador cilíndrico, $\beta = 0$ y $\alpha = \mathrm{i}k - 1/2r$. Las expresiones correspondientes para ondas tridimensionales son diferentes. Los contornos no circulares pueden

también tratarse, pero las expresiones se hacen *mucho* más complicadas. Algunos resultados sobre estos problemas se obtuvieron por Bando *et al.*[49] La Figura 15.15 muestra las ondas difractadas en un problema de un sólido cilíndrico para el que existe una solución, debida a MacCamy y Fuchs. Los amortiguadores de alto orden presentan una mejora importante sobre los amortiguadores plano y cilíndrico, con un incremento de coste computacional pequeño.

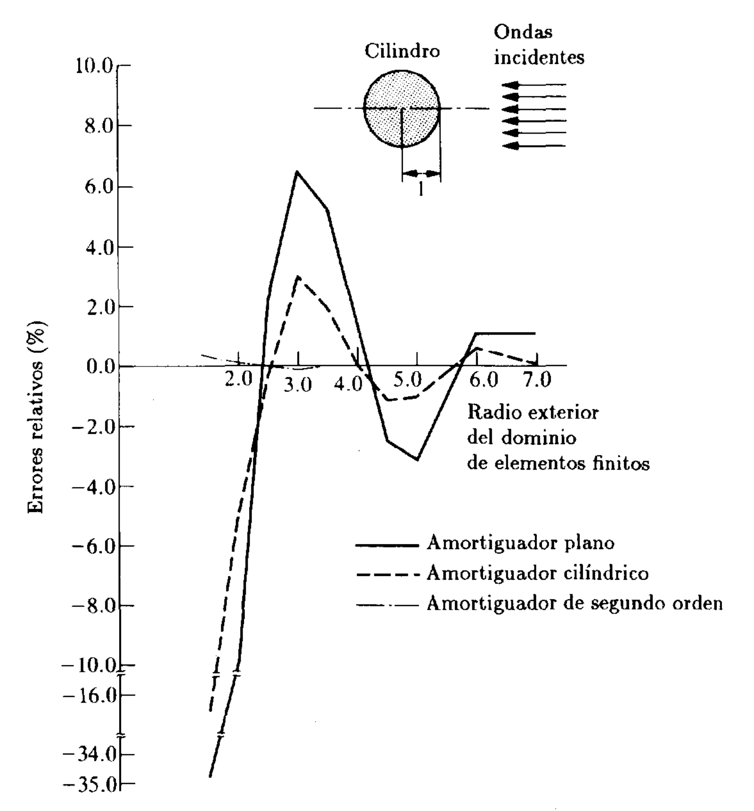


Figura 15.15 Comparación de los errores relativos para varios valores exteriores ($k = 1.0$). Error relativo= $(|\eta_n^A| - |\eta_a^A|)/|\eta_n^A|$.[49]

15.11 Acoplamiento con soluciones exteriores

La metología para acoplar los elementos finitos con soluciones exteriores fue propuesta por Zienkiewicz *et al.*[50,51] y se discutió en el Volumen 1, particularmente en el Capítulo 13. La solución exterior puede

tomar cualquier forma, y las más utilizadas son: (*a*) soluciones de serie exteriores y (*b*) integrales de contorno exteriores, aunque son posibles otros procedimientos. Los dos mayores innovadores en este campo han sido Berkhoff,[42,52] para el caso de acoplamiento con integrales de contorno, y Chen y Mei[53,54] para el acoplamiento de soluciones en serie. Aunque los métodos propuestos son muy diferentes, es útil formularlos en la misma forma general. Más detalles de este procedimiento se dan en la referencia [45]. Básicamente se utiliza de nuevo el funcional de energía dado en las Ecs. (15.38) y (15.39). Si las funciones usadas en el exterior satisfacen automáticamente la ecuación de onda, entonces la contribución sobre el contorno se reduce a una integral de línea de la forma

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Gamma \eta \frac{\partial \eta}{\partial n}\, d\Gamma \tag{15.45}$$

Puede mostrarse[45,50,51] que si los parámetros libres en el interior y el exterior son $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}$, respectivamente, las ecuaciones acopladas pueden escribirse como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \bar{\mathbf{K}}^T \\ \bar{\mathbf{K}} & \hat{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{15.46}$$

donde

$$\hat{K}_{ji} = \frac{1}{2}\int_\Gamma [(PN_j)^T N_i + N_j^T (PN_i)]\, d\Gamma \tag{15.47}$$

$$\bar{K}_{ji} = \int_\Gamma (PN_j)^T \bar{N}_i\, d\Gamma \tag{15.48}$$

En lo anterior, P es el operador de derivada normal, o sea, $P \equiv \partial/\partial n$, $\bar{\mathbf{N}}$ es la función de forma de elementos finitos, $\mathbf{N}$ la función de forma exterior y $\mathbf{K}$ corresponde a la matriz usual de elementos finitos. El procedimiento descrito más arriba puede utilizarse con cualquier forma de solución exterior adecuada, como veremos. Todos los nodos del contorno permanecen acoplados.

15.11.1 *Acoplamiento con integrales de contorno.* Berkhoff adoptó el procedimiento expedito de identificar los valores nodales del potencial de velocidades utilizando la integral de contorno con los valores nodales de elementos finitos. Esto conduce a un sistema de ecuaciones bastante burdo, en parte simétrico, real y en banda, y en parte no simétrico, complejo y denso. El método integral directo de contorno de la ecuación de Helmholtz en el exterior conduce a otro esquema básico de ecuaciones,[50,51] como

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial n} \tag{15.49}$$

(Puede utilizarse también el método integral de contorno indirecto.) Los valores de η y $\partial\eta/\partial n$ sobre el contorno se expresan a continuación mediante funciones de forma, de manera que

$$\eta \approx \hat{\eta} = \mathbf{N}\boldsymbol{\eta} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial n} \approx \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial n} = \mathbf{M}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial n}\right\} \tag{15.50}$$

$\mathbf{N}$ y $\mathbf{M}$ son equivalentes a $\mathbf{N}$ en la sección anterior. Utilizando esta relación, la integral sobre el dominio exterior puede escribirse como

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial n}\mathbf{M}^T\mathbf{N}\boldsymbol{\eta}\, d\Gamma \tag{15.51}$$

donde Γ es el contorno entre los elementos finitos y las integrales de contorno. Las derivadas normales pueden ahora eliminarse, usando la relación (15.48), y $\boldsymbol{\eta}$ puede identificarse con los valores nodales de elementos finitos para dar

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\mathbf{b}^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})^T \int_{\Gamma} \mathbf{M}^T\mathbf{N}\, d\Gamma \mathbf{b} \tag{15.52}$$

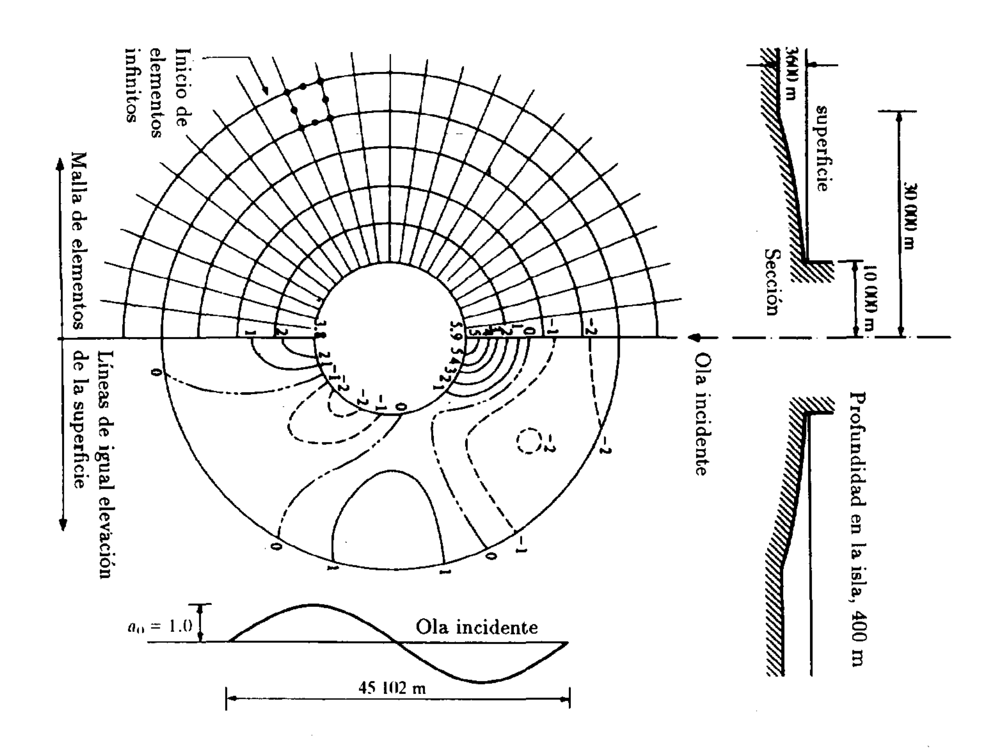
Las variaciones de este funcional con respecto a $\mathbf{b}$ pueden hacerse cero, obteniéndose

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\left\{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\int_{\Gamma}\mathbf{M}^T\mathbf{N}\, d\Gamma + \left[(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\int_{\Gamma}\mathbf{M}^T\mathbf{N}\, d\Gamma\right]^T\right\}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{b} \tag{15.53}$$

donde $\bar{\mathbf{K}}$ es una matriz de "rigidez" efectiva para la región anterior. Es simétrica y puede calcularse y ensamblarse como cualquier otra matriz elemental. Las integrales anteriores deben calcularse con cuidado ya que incluyen singularidades. En la Figura 15.16 se muestran los resultados para el problema de una isla sobre un banco de arena parabólico. Se comparan con la solución analítica.

15.11.2 *Acoplamiento con soluciones en serie.* Chen y Mei[53] partieron de la solución en series para ondas exteriores y dieron soluciones explícitas para las matrices exterior y de acoplamiento, $\bar{\mathbf{K}}$ y $\hat{\mathbf{K}}$, haciendo uso de elementos finitos con funciones de forma $\bar{\mathbf{N}}$ lineales. Las series utilizadas en el exterior consisten en funciones de Hankel y trigonométricas que satisfacen automáticamente las ecuaciones de gobierno del problema (ecuación de Helmholtz) y la condición de radiación:

$$\eta = \sum_{j=0}^{m} H_j(kr)(\alpha_j \cos j\theta + \beta_j \operatorname{sen} j\theta) \tag{15.54}$$



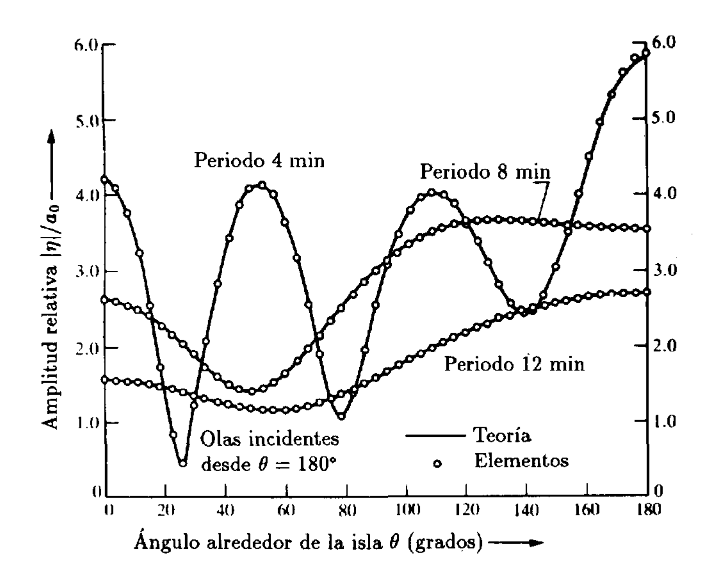


Figura 15.16 Difracción de onda por un banco de arena parabólico.

El método descrito más arriba conduce a la siguiente matriz:

$$\bar{\mathbf{K}}^T = \frac{-knL_c}{2}\begin{bmatrix} 2H_0' \cdots H_n'(\cos n\theta_p + \cos n\theta_1), & H_n'(\operatorname{sen} n\theta_p + \operatorname{sen} n\theta_1), & \cdots \\ 2H_0' \cdots H_n'(\cos n\theta_1 + \cos n\theta_2), & H_n'(\operatorname{sen} n\theta_1 + \operatorname{sen} n\theta_2), & \cdots \\ 2H_0' \cdots H_n'(\cos n\theta_2 + \cos n\theta_3), & H_n'(\operatorname{sen} n\theta_2 + \operatorname{sen} n\theta_3), & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 2H_0' \cdots H_n'(\cos n\theta_{p-1} + \cos n\theta_p), & H_n'(\operatorname{sen} n\theta_{p-1} + \operatorname{sen} n\theta_p), & \cdots \end{bmatrix} \qquad (15.55)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \pi rkh\{diag|2H_0H_0', H_1H_1', H_1H_1', \cdots, H_mH_m', H_mH_m'|\} \qquad (15.56)$$

donde m = número de términos de las series de Hankel

r = radio del contorno

L_c = distancia entre los nodos equidistantes sobre Γ

k = número de onda

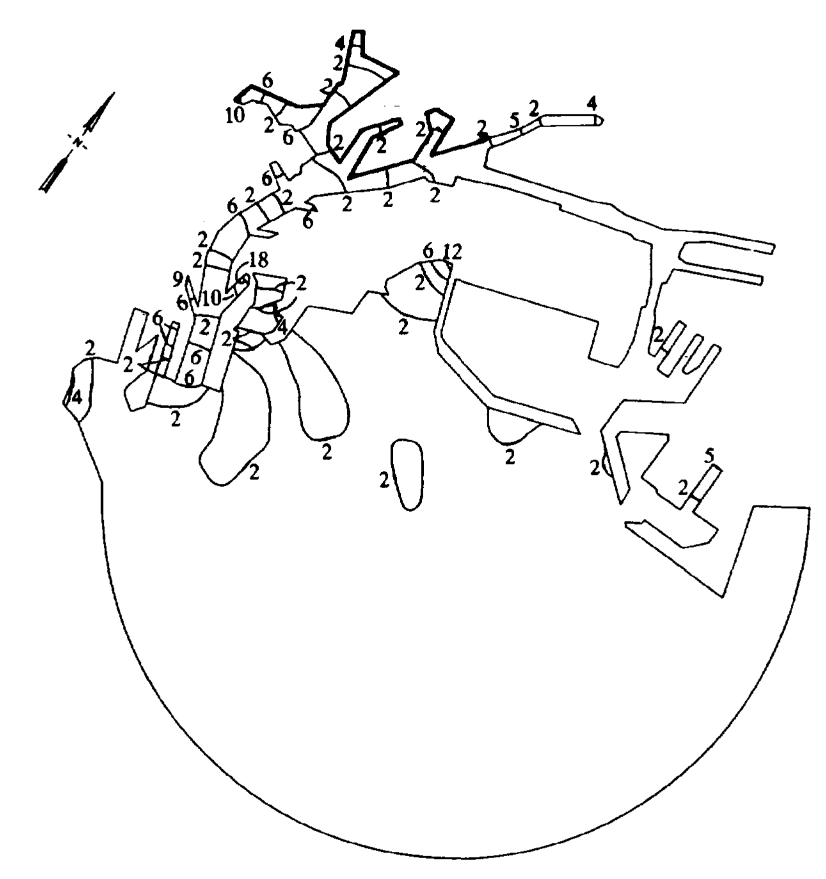
p = número de nodos

H_n y H_n' = funciones de Hankel y sus derivadas

Otros autores han obtenido una forma distinta de las matrices anteriores para las funciones de forma lineales, y es posible obtenerlas para cualquier tipo de función utilizando, si es necesario, integración numérica. Se advertirá que la matriz $\hat{\mathbf{K}}$ es diagonal. Esto es debido a que el contorno Γ_B es circular y las funciones de Hankel son ortogonales. Si se utiliza un dominio no circular, la matriz $\hat{\mathbf{K}}$ se hace densa. Chen y Mei [54] aplicaron el método con éxito a un rango de problemas y, en particular, al estudio de los efectos de resonancia en un puerto en alta mar. Los resultados de este análisis se muestran en la Figura 9.12 del Capítulo 9. El método fue también utilizado por Houston,[55] quien lo aplicó a un número de problemas reales, incluyendo el estudio de la resonancia en el puerto de Long Beach, como se muestra en la Figura 15.17.

15.12 Elementos infinitos

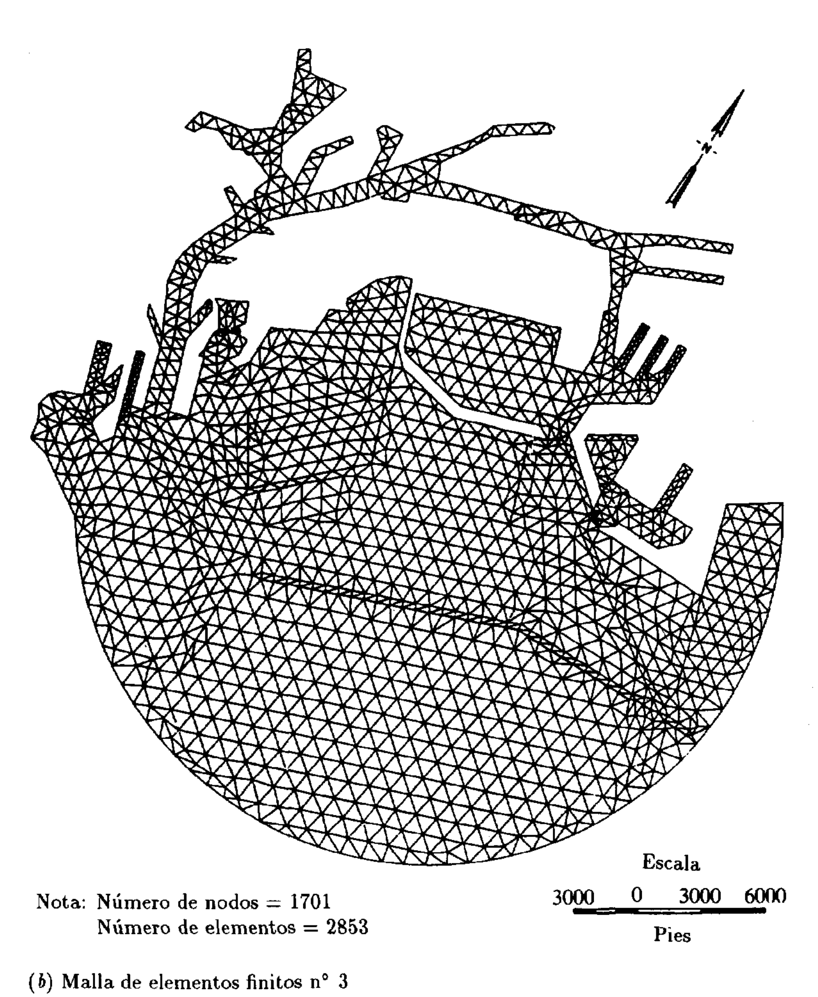
Los métodos descritos en el Capítulo 8 del Volumen 1 pueden ser desarrollados para incluir efectos periódicos. Esto fue planteado por primera vez por Bettess y Zienkiewicz, usando el llamado procedimiento de la "función decreciente" de forma muy efectiva.[56] En la Figura 15.18 se muestran los resultados obtenidos usando estos elementos para la difraccion por un rompeolas.[57] Una inusual característica de este problema es la singularidad de la forma $1/\sqrt{r}$ en la velocidad en la punta del



(*a*) **Líneas de igual amplificación de la altura de ola, malla 3, periodo 232-s**

Figura 15.17 Malla de elementos finitos y amplificación de la altura de ola para el puerto de Long Beach.[55]

rompeolas. Este efecto se trató utilizando elementos singulares con nodos en el cuarto de lado. En el Capítulo 8 del Volumen 1 se dan detalles de este método. Se obtuvo un acuerdo excelente con la solución analítica (en función de integrales de Fresnel y derivadas desarrolladas originalmente en óptica). El problema es en gran medida artificial, ya que en la situación real los altos gradientes de velocidad originan fuerzas viscosas muy altas, retardo en el flujo, separación y formación de remolinos en el extremo. En la Figura 9.12 se muestra la comparación de los resultados obtenidos con los de Chen y Mei para el problema de la isla artificial. Posteriormente se desarrollaron elementos infinitos para el problema de ondas, y como



(b) Malla de elementos finitos n° 3

Figura 15.17 (*continuación*).

éstos parecen ser los más precisos hasta la fecha para tratar este tipo de problemas se describirán con detalle en la sección siguiente.

15.12.1 *Elementos infinitos periódicos tranformados.* Recordaremos brevemente la teoría desarrollada en el Capítulo 8 del Volumen 1 para elementos infinitos estáticos, ya que se utilizará aquí de nuevo para elementos periódicos. En las referencias [58] a [60] se pueden encontrar los detalles al respecto. Consideremos primero la geometría para el problema unidimensional. Como antes, el elemento se extiende desde el punto x_1 a través

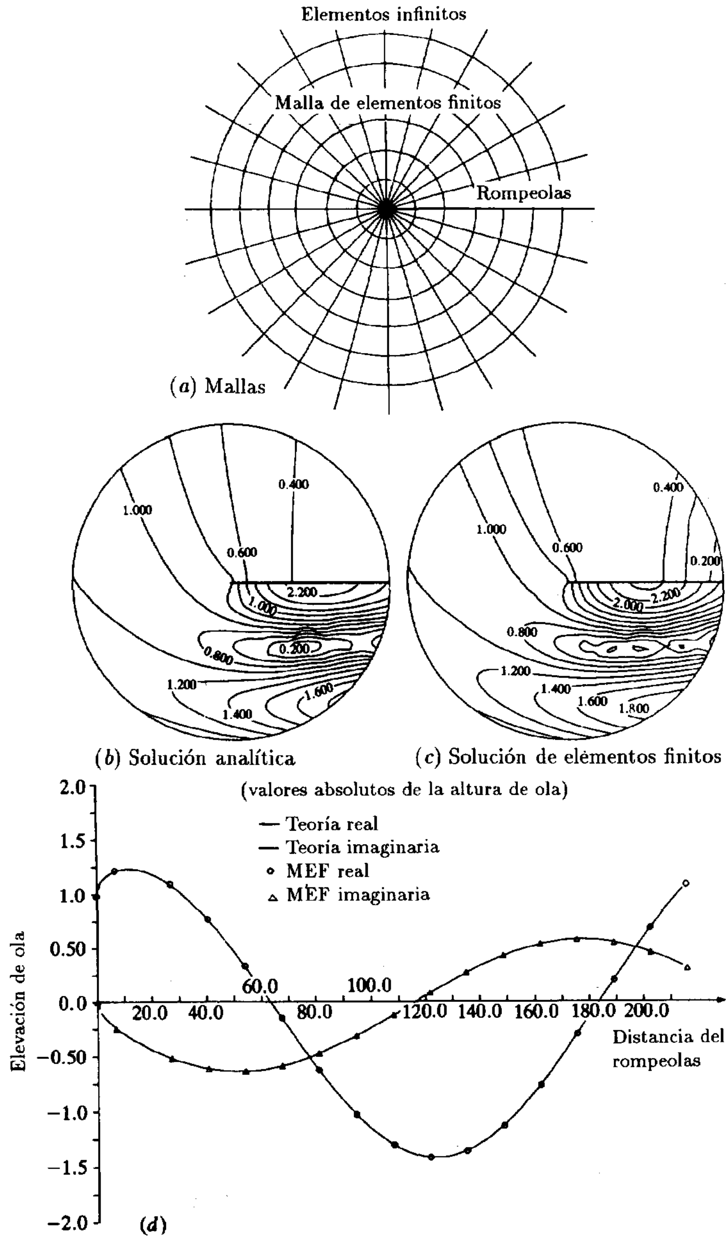


Figura 15.18 Rompeolas semi-infinito –alturas de las olas difractadas–. Las alturas de ola en una línea perpendicular al rompeolas a través del borde; ángulo de incidencia de 90° con el rompeolas; longitud de onda = 242, 610780 m; periodo de las olas = 20 s; nodos intermedios colocados en el cuarto de cada lado.

de x_2 hasta x_3, que está en el infinito. Este elemento se transforma en un dominio finito $-1 < \xi < 1$ como se muestra en la Figura 15.19. Una transformación adecuada es

$$x = \tilde{N}_0(\xi)x_0 + \tilde{N}_2(\xi)x_2 \tag{15.57}$$

donde

$$\tilde{N}_0(\xi) = \frac{-\xi}{1-\xi} \quad \text{y} \quad \tilde{N}_2(\xi) = 1 + \frac{\xi}{1-\xi} \tag{15.58}$$

cumpliéndose que para

$$\begin{aligned} \xi = 1: &\quad x = \frac{\xi}{1-\xi}(x_2 - x_0) + x_2 = x_3 = \infty \\ \xi = 0: &\quad x = x_2 \\ \xi = -1: &\quad x = \frac{x_0 + x_2}{2} = x_1 \end{aligned} \tag{15.59}$$

El punto $\xi = -1$ corresponde con el x_1 y ahora define la posición intermedia entre x_0 y x_2. Como se ha visto previamente, un polinomio

$$P = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \cdots \tag{15.60}$$

en el dominio finito, se transforma en un polinomio de potencias inversas de r, en un dominio infinito:

$$P = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \frac{\beta_3}{r^3} + \cdots \tag{15.61}$$

donde las β_i pueden determinarse de los valores de los parámetros α_i. Sí se requiere que el polinomio se haga cero en el infinito, entonces, $\beta_0 = 0$.

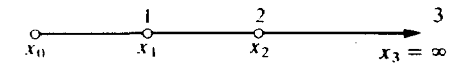


Figura 15.19 Transformación unidimensional utilizada para la formulación de elementos infinitos.[58]

Muchos problemas de ondas exteriores tienen soluciones en las cuales la amplitud de onda decae como $1/r$ y la transformación anterior puede representar muy bien este tipo de situaciones. En algunos casos, sin embargo, la amplitud decae aproximadamente como $1/\sqrt{r}$, y este caso es más difícil de aproximar. En general, la precisión puede aumentar añadiendo términos extras a las series (15.60). El punto x_0 que no se ha definido hasta ahora se trata como el polo del desarrollo de P.

15.12.2 *Introducción de la componente de la onda.* En dominios bidimensionales exteriores la solución de la ecuación de Helmholtz puede escribirse por una combinación de funciones trigonométricas y de Hankel, siendo la solución más sencilla de la ecuación de Helmhlotz $H_0(kr)$. Para valores de r grandes la función de Hankel de orden cero oscila aproximadamente como $\cos(kr) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kr)$ mientras que su amplitud decrece como $r^{-1/2}$. Usaremos series de términos $1/r$, $1/r^2$, etc., generadas por la transformación, multiplicadas por $r^{1/2}$ y la componente periódica $\exp(\mathrm{i}kr)$ para modelar la función decreciente $r^{-1/2}$.

La función de forma es, por tanto, la función original descrita anteriormente, multiplicada por estos términos adicionales, dando

$$N^*(\xi,\eta) = M(\xi,\eta)r^{1/2}\exp(\mathrm{i}kr) \tag{15.62}$$

La transformación de la Ec. (15.57) puede también escribirse como

$$r = \frac{A}{1-\xi} \tag{15.63}$$

La función de forma en la Ec. (15.62) será ahora

$$N^*(\xi,\eta) = M(\xi,\eta)\left(\frac{A}{1-\xi}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{\mathrm{i}kA}{1-\xi}\right) \tag{15.64}$$

Un punto importante a mencionar es que si las funciones de forma tienen que ser continuas entre los elementos finitos e infinitos, el valor absoluto debe ser la unidad y la fase debe ser igual a cero en $\xi = -1$ (la frontera con los elementos finitos estándar). En $\xi = -1$ el valor de la función de forma $N^*(\xi,\eta)$ es

$$N^*(-1,\eta) = M(-1,\eta)\left(\frac{A}{2}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{\mathrm{i}kA}{2}\right) \tag{15.65}$$

Para asegurar continuidad, se introduce un coeficiente $(2/A)^{1/2}\exp(-\mathrm{i}k\,A/2)$ de manera que la función de forma se haga

$$N^*(\xi,\eta) = M(\xi,\eta)\left(\frac{2}{A}\right)^{1/2}\left(\frac{A}{1-\xi}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{-ikA}{2}\right)\exp\left(\frac{ikA}{1-\xi}\right) \quad (15.66)$$

Las derivadas de la función de forma pueden encontrarse fácilmente y utilizarse en la Ec. (15.38), con integración sobre el dominio infinito del elemento.

15.12.3 *Procedimiento de integración.* Resulta que para evaluar la matriz del elemento hay que calcular algunas integrales bastante difíciles. Después de la integral por partes es necesario integrar términos del tipo

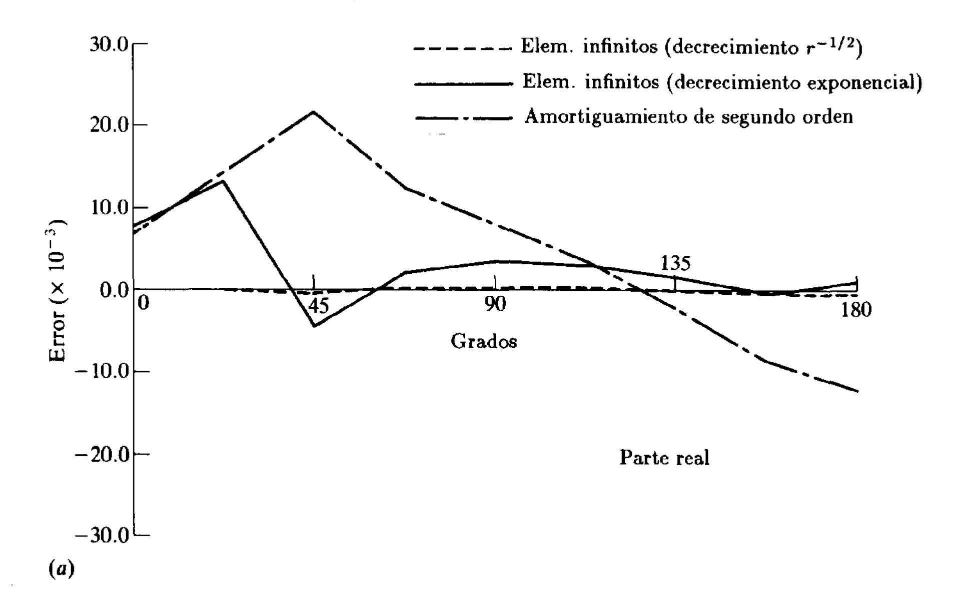
$$\int_{B/2}^{\infty} \frac{\exp(iu)}{u}\, du \quad (15.67)$$

No hay solución análitica para la integral anterior y hay que emplear procedimientos especiales. En la referencia [61] se dan todos los detalles al respecto, incluyendo un listado de las subrutinas para obtener la posición de los puntos de integración y los pesos. Las subrutinas son la S13ACF y S13ADF de la librería Nag. Los resultados obtenidos usando estos elementos son extremadamente precisos. Estas subrutinas pueden utilizarse como un paquete para obtener los pesos y sus abcisas, de una sola vez, al principio de cada análisis. La Figura 15.20 muestra las comparaciones con resultados obtenidos utilizando amortiguadores de alto orden y elementos infinitos con función decreciente exponencial para el problema de MacCamy y Fuchs.

15.12.4 *Elementos infinitos de envolvente de ondas.* Astley ha introducido recientemente un nuevo tipo de elemento infinito, en el cual la función de forma es la *conjugada compleja* de la función de forma.[62,63] La mayor simplificación que esto introduce es que la función oscilatoria $\exp(ikr)$ se cancela después de multiplicar por $\exp(-ikr)$ y los términos que permanecen son todos polinomios que pueden integrarse utilizando técnicas estándar, como la integración de Gauss–Legendre (ver Capítulo 8 del Volumen 1). Esto parece ser una gran ventaja.

En la Figura 15.21 se muestra un ejemplo de acústica, tal como la presión acústica en un conducto hiperbólico. Se obtuvieron buenos resultados pese a que se utilizó una malla muy grosera. Desgraciadamente todavía no se ha comprobado bien el método para ondas de superficie y quizás es posible que aparezcan dificultades no previstas en estos casos. La función de forma de Astley es de la forma

$$N_i(r,\theta)\frac{r_i}{r}e^{-ik(r-r_i)} \quad (15.68)$$



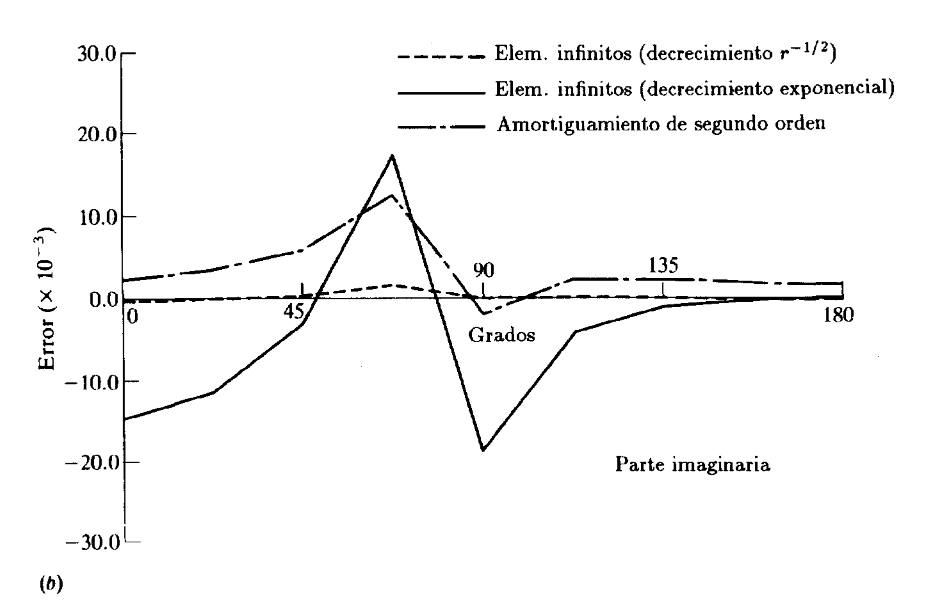


Figura 15.20 Error en las partes (*a*) real y (*b*) imaginaria de la solución de un cilindro en aguas poco profundas, obtenida mediante un análisis con elementos infinitos con decrecimiento $r^{-1/2}$, decrecimiento exponencial y elementos de amortiguamiento de segundo orden.

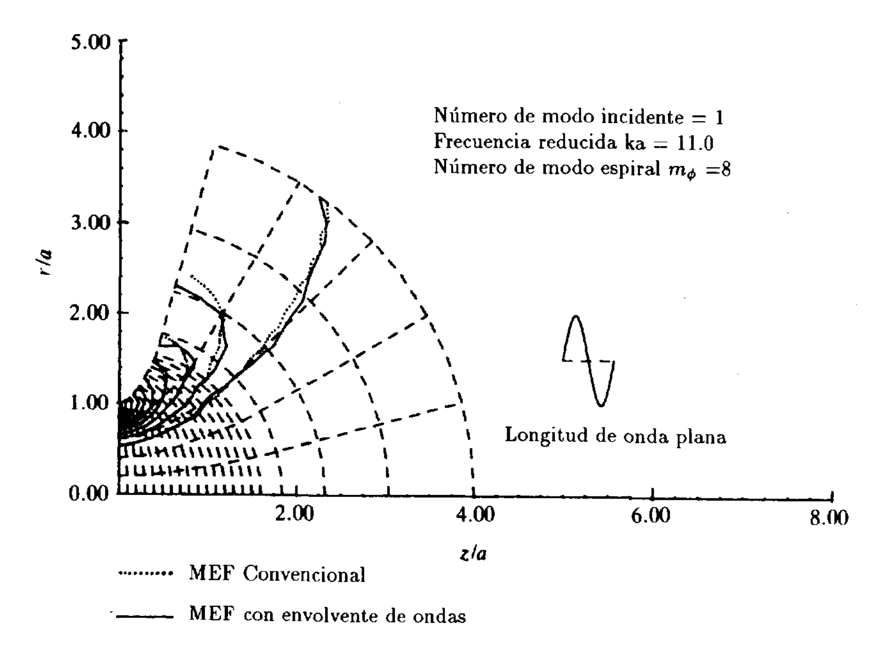


Figura 15.21 Líneas de igual presión acústicas calculadas para un conducto hiperbólico ($\Theta_0 = 70°$, $ka = 11$, $m_\phi = 8$). Solución convencional y envolvente de ondas.

donde N_i es la función de forma estándar. Estas funciones de forma incorporan el decrecimiento y la variación de tipo ondulatorio, tal como sugirieron Bettes y Zienkiewicz.[56] La función de peso es, por tanto

$$N_i(r,\theta)\frac{r_i}{r}e^{+\ ik(r-r_i)} \tag{15.69}$$

Bettes[64] ha demostrado que para un modelo de ecuación de onda unidimensional el elemento de envolvente de onda infinito recupera la solución *exacta*. La matriz elemental es ahora más hermítica que simétrica (aunque todavía compleja), lo que exige una pequeña alteración en el proceso de resolución de las ecuaciones. (No hay normalmente ningún problema en cambiar los métodos de solución estándar para tratar sistemas de ecuaciones complejas.)

15.13 Efectos tridimensionales

Como ya se ha descrito anteriormente, cuando el agua es profunda en comparación con la longiud de la ola, ya no es adecuada la teoría de aguas poco profundas. Para profundidad constante o con variación lenta,

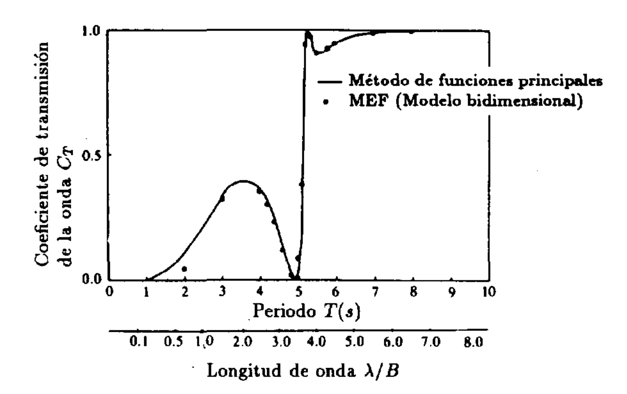
es válida la teoría de Berkhoff. También puede ser necesario otro procedimiento para tratar la geometría del problema. El flujo en el dominio del agua se determina completamente por la ecuación de la conservación de masa, que en el caso de flujo incompresible se reduce a la ecuación de Laplace. La condición de superficie libre es la de presión cero sobre la superficie libre. Utilizando la ecuación de Bernoulli y la condición cinemática, la condición de superficie libre puede expresarse en función del potencial de velocidad ϕ, como

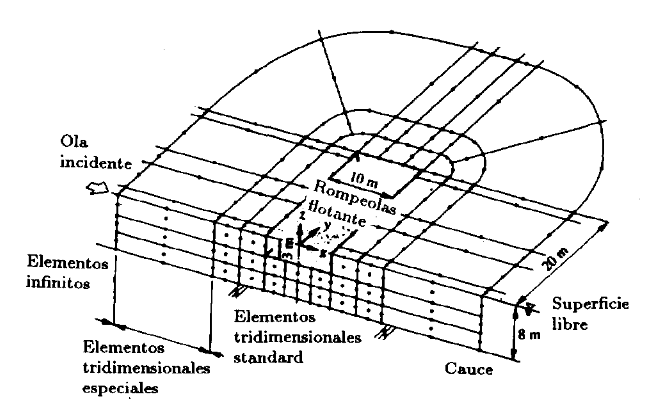
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} + 2\nabla\phi\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla(\nabla\phi\nabla\phi) = 0 \tag{15.70}$$

donde las velocidades $u_i = \partial\phi/\partial x_i$. Esta condición se aplica sobre la superficie libre, cuya posición es desconocidada *a priori*. Sí sólo se retienen los términos lineales, la Ec. (15.70) se convierte, para problemas periódicos y transitorios, en

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g}\phi \tag{15.71}$$

que es conocida como la condición de superficie libre de *Cauchy-Poisson* y que ya fue obtenida en la Ec. (11.11) del Capítulo 11. Para resolver dichos problemas pueden utilizarse elementos finitos tridimensionales. El elemento tridimensional necesario es muy sencillo, y no es más que un elemento de potencial como el descrito en el Capítulo 10 del Volumen 1. La condición de contorno natural es $\partial\phi/\partial n = 0$, donde n es la normal exterior, de manera que para aplicar la condición de superficie libre sólo es necesario añadir una integral de superficie para generar el término $\omega^2\phi/g$ que surge de la condición de Cauchy-Poisson [ver Ec. (11.11)]. Puede ser interesante acoplar elementos bidimensionales para modelar el campo lejano con otros tridimensionales para modelar los efectos del campo próximo alrededor del objeto de interés. Dichos modelos predecirán las trayectorias de velocidades, las presiones alrededor del fluido y las elevaciones de las olas. También pueden utilizarse para predecir efectos de interacción fluido estructura. Todas las ecuaciones necesarias para este caso se dan en el Capítulo 11. Más detalles de la interacción fluido estructura pueden encontrarse en Zienkiewicz y Bettess.[65] Esencialmente, las ecuaciones del fluido deben resolverse para las ondas incidentes y para el movimiento del cuerpo flotante en cada uno de sus grados de libertad (usualmente seis). Las fuerzas de fluido resultantes, masa, rigideces y amortiguamiento se utilizan en las ecuaciones de movimiento de la estructura para determinar su respuesta. En la Figura 15.22 se muestran los resultados obtenidos por Hara *et al.*,[66] utilizando el programa WAVE para un rompeolas flotante. Estos autores obtuvieron muy buena concordancia entre los elementos infinitos y los métodos de la Sección 15.11.





Unidades en metros

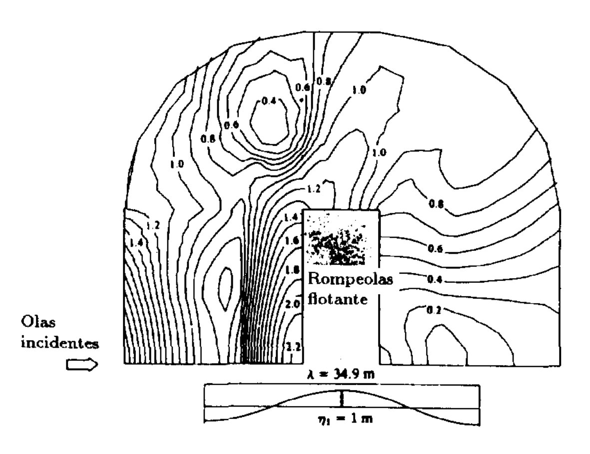


Figura 15.22 Malla, líneas de igual elevación de ola y coeficiente de transmisión de olas para un rompeolas flotante.

15.14 Olas de gran amplitud

No existe una teoría de ondas completa para el caso de que η no sea pequeño en comparación con las otras dimensiones del problema. Para tratar esta situación se han desarrollado distintas teorías aplicables a circunstancias diferentes. Consideraremos aquí dos de dichas teorías: la de grandes elevaciones de ola en aguas poco profundas y la de grandes elevaciones de ola en aguas con profundidades intermedias o profundas.

15.14.1 *Ondas cnoidales y solitarias.* Las ecuaciones modeladas en la Parte I pueden aplicarse al caso de olas de gran amplitud en aguas poco profundas. Estas olas se denominan *cnoidales* cuando son periódicas y *solitarias* cuando el período es infinito. Para más detalles consultar las referencias [38] a [41]. La metodología de elementos finitos de la Parte I puede utilizarse para modelar la propagación de dichas olas. Es posible reducir las ecuaciones de equilibrio, de cantidad de movimiento y de conservación de masa para ajustarlas a las ecuaciones de ondas correspondientes, de las que existen diferentes formas, en función de una sola variable. Una ecuación famosa es la de Korteweg–de Vries, que en variables físicas es

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3\eta}{2h}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\sqrt{gH}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \qquad (15.72)$$

Esta ecuación ha recibido gran atención por parte de matemáticos. Puede resolverse directamente utilizando el método de los elementos finitos y en el trabajo de Mitchell y Schoombie[67] se encuentra una introducción general a este campo.

15.14.2 *Olas de Stokes.* Cuando el agua es profunda, puede utilizarse un desarrollo asintótico diferente en el que el potencial de velocidades ϕ y la elevación de la superficie η se resolvieron en función de un parámetro pequeño, ε, que puede asociarse con la pendiente de las superficies del agua. Cuando estas expresiones se sustituyen en la condición de superficie libre y se agrupan los términos del mismo orden ε, se obtiene una serie de condiciones de superficie libre. Las ecuaciones se resolvieron por primera vez por Stokes, y posteriormente por otros investigadores, hasta órdenes muy altos, para analizar olas progresivas de gran amplitud en aguas profundas. Existe una extensa literatura sobre estas soluciones, y se utilizan en la industria de plataformas marinas para calcular cargas sobre estructuras en alta mar. En años recientes se han efectuado intentos para modelar el problema de difracción de ondas de segundo orden utilizando elementos finitos y técnicas similares. El problema de difracción de primer orden se describió en la Sección 15.9. En el problema de segundo orden la condición de superficie libre incluye ahora el potencial de primer orden:

Primer orden:
$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g}\phi^{(1)} = 0 \tag{15.73}$$

Segundo orden:
$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g}\phi^{(2)} = \alpha_D^{(2)} \tag{15.74}$$

$$\alpha_D^{(2)} = \alpha_{DI}^{(2)} + \alpha_{DD}^{(2)} \qquad \text{y} \qquad \nu = \frac{\omega^2}{g} \tag{15.75}$$

$$\alpha_{DI}^{(2)} = -\,\mathrm{i}\frac{\omega}{2g}\phi_D^{(1)}\left(\frac{\partial^2 \phi_I^{(1)}}{\partial z^2} - \nu\frac{\partial \phi_I^{(1)}}{\partial z}\right) - \mathrm{i}\frac{\omega}{2g}\phi_I^{(1)}\left(\frac{\partial^2 \phi_D^{(1)}}{\partial z^2} - \nu\frac{\partial \phi_D^{(1)}}{\partial z}\right) + \mathrm{i}\frac{\omega}{2g}\nabla\phi_I^{(1)}\nabla\phi_D^{(1)} \tag{15.76}$$

$$\alpha_{DD}^{(2)} = -\mathrm{i}\frac{\omega}{2g}\phi_D^{(1)}\left(\frac{\partial^2 \phi_D^{(1)}}{\partial z^2} - \nu\frac{\partial \phi_D^{(1)}}{\partial z}\right) + \mathrm{i}\frac{\omega}{2g}(\nabla\phi_D^{(1)})^2 \tag{15.77}$$

La condición de contorno de segundo orden puede interpretarse como idéntica a la del problema de primer orden, pero con una presión especificada sobre toda la superficie libre, de valor α. Ahora no existe una razón *a priori* por la que esta distribución de presiones debería dar lugar a olas salientes como en el problema de primer orden y, por tanto, la condición de radiación más corriente no es aplicable. El procedimiento más corriente es descomponer la ola de segundo orden en dos partes, una la ola "encerrada" en fase con la ola de primer orden, y otra ola "libre" que es como la de primer orden pero a una frecuencia doble, y con un número de ola apropiado obtenido de una relación de dispersión. Para más detalles de esta teoría consultar el trabajo de Clark *et al.*[68] En la Figura 15.23 se muestran resultados para la elevación de la onda de segundo orden alrededor de un cilíndro circular, obtenidos por Clark *et al.* Aunque no se muestran, se obtuvo muy buena concordancia con los resultados obtenidos mediante integrales de contorno. Otros resultados preliminares sólo para las fuerzas de las olas se obtuvieron por Lau *et al.*[69] Es necesario utilizar una malla de elementos finitos mucho más fina para resolver los detalles de las olas de segundo orden. Las fuerzas de las olas de segundo orden pueden ser muy importantes por caracterizar de forma realista los parámetros de estas olas (como las encontradas en el mar del Norte, por ejemplo). Primeramente se resuelve el problema de primer orden, y se utiliza el potencial de primer orden de fuerza para generar los términos de fuerza en las Ecs. (15.75) a (15.77). Estos valores tienen que ser muy precisos. En principio el método podría extenderse a tercer orden y mayores, pero en la práctica las dificultades se multiplican, y en particular la relación de dispersión cambia y las olas se hacen inestables.[41]

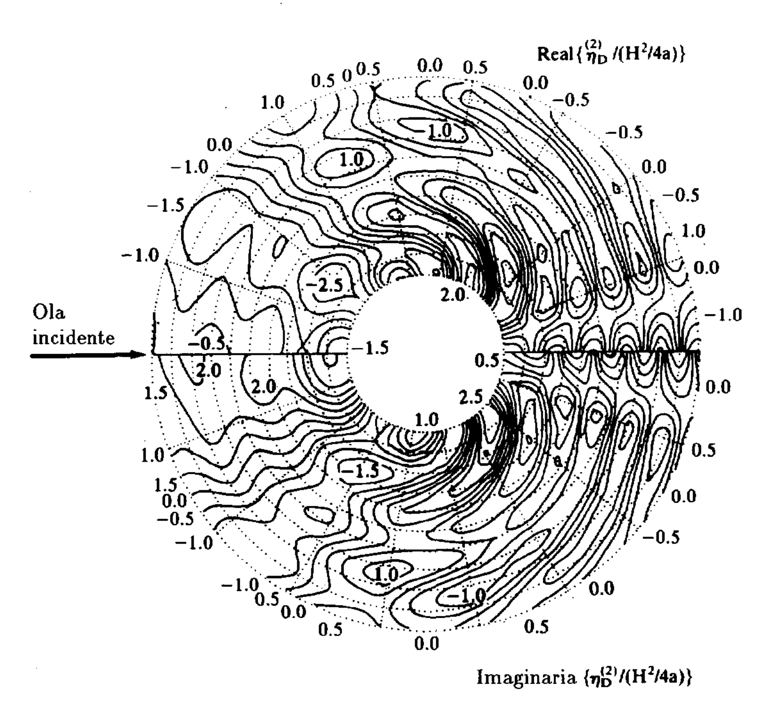


Figura 15.23 Elevaciones de la ola de segundo orden alrededor de un cilindro –partes real e imaginaria–.

Referencias

1. M.B. ABBOTT, *Computational Hydraulics; Elements of the Theory of Free Surface Flows*, Pitman, London, 1979.
2. G.J. HALTINER y R.T. WILLIAMS, *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*, Wiley, New York, 1980.
3. O.C. ZIENKIEWICZ, R.W. LEWIS y K.G. STAGG (eds), *Numerical Methods in Offshore Engineering*, Wiley, Chichester, 1978.
4. J. PERAIRE, "A finite element method for convection dominated flows", Ph.D. thesis, University of Wales, Swansea, 1986.
5. J. PERAIRE, O.C. ZIENKIEWICZ y K. MORGAN, "Shallow water problems: a general explicit formulation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **22**, 547–74, 1986.
6. O.C. ZIENKIEWICZ y J.C. HEINRICH, "A unified treatment of steady state shallow water and two dimensional Navier-Stokes equations. Finite element penalty function approach", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **17/18**, 673–89, 1979.
7. M. KAWAHARA, "On finite-element methods in shallow-water long-

wave flow analysis", en *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*, (ed. J.T. Oden), pp. 261–87, North-Holland, Amsterdam, 1980.
8. J.J. CONNOR y C.A. BREBBIA, *Finite-Element Techniques for Fluid Flow*, Newnes-Butterworth, London y Boston, 1976.
9. J.J. O'BRIEN y H.E. HULBURT, "A numerical model of coastal upwelling", *J. Phys. Oceanogr.*, **2**, 14–26, 1972.
10. M. CREPON, M.C. RICHEZ y M. CHARTIER, "Effects of coastline geometry on upwellings", *J. Phys. Oceanogr.*, **14**, 365–82, 1984.
11. M.G.G. FOREMAN, "An analysis of two-step time-discretisations in the solution of the linearized shallow-water equations", *J. Comp. Phys.*, **51**, 454–83, 1983.
12. W.R. GRAY y D.R. LYNCH, "Finite-element simulation of shallow-water equations with moving boundaries", en *Proc. 2nd Conf. on Finite-Elements in Water Resources* (eds C.A. Brebbia *et al.*), pp. 2.23–2.42, 1978.
13. T.D. MALONE y J.T. KUO, "Semi-implicit finite-element methods applied to the solution of the shallow-water equations", *J. Geophys. Res.*, **86**, 4029–40, 1981.
14. G.J. FIX, "Finite-element models for ocean-circulation problems", *SIAM J. Appl. Math.*, **29**, 371–87, 1975.
15. C. TAYLOR y J. DAVIS, "Tidal and long-wave propagation, a finite-element approach", *Computers and Fluids*, **3**, 125–48, 1975.
16. M.J.P. CULLEN, "A simple finite element method for meteorological problems", *J. Inst. Math. Appl.*, **11**, 15–31, 1973.
17. H.H. WANG, P. HALPERN, J. DOUGLAS, Jr. y I. DUPONT, "Numerical solutions of the one-dimensional primitive equations using Galerkin approximations with localised basis functions", *Mon. Weekly Rev.*, **100**, 738–46, 1972.
18. I.M. NAVON, "Finite-element simulation of the shallow-water equations model on a limited area domain", *Appl. Math. Modelling*, **3**, 337–48, 1979.
19. M.J.P. CULLEN, "The finite element method", en *Numerical Methods Used in Atmosphere Models*, Vol. 2, cap. 5, pp. 330–8, WMO-GARP Publication Series 17, World Meteorological Organisation, Geneva, Switerland, 1979.
20. M.J.P. CULLEN y C.D. HALLL, "Forecasting and general circulation results from finite-element models", *Q.J. Roy. Met. Soc.*, **102**, 571–92, 1979.
21. D.E. HINSMAN, R.T. WILLIAMS y E. WOODWARD, "Recent advances in the Galerkin finite-element method as applied to the meteorological equations on variable resolution grids", en *Finite-Element Flow-Analysis* (ed. T. Kawai), University of Tokyo Press,

Tokyo, 1982.
22. I.M. NAVON, "A Numerov-Galerkin technique applied to a finite-element shallow-water equations model with enforced conservation of integral invariants and selective lumping", *J. Comp. Phys.*, **52**, 313–39, 1983.
23. I.M. NAVON y R. DE VILLIERS, "GUSTAF, a quasi-Newton nonlinear ADI FORTRAN IV program for solving the shallow-water equations with augmented Lagrangians", *Computers and Geosci.*, **12**, 151–73, 1986.
24. A.N. STANIFORTH, "A review of the application of the finite-element method to meteorological flows", en *Finite-Element Flow-Analysis* (ed. T. Kawai), pp. 835–42, University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.
25. A.N. STANIFORTH, "The application of the finite element methods to meteorological simulations–a review", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **4**, 1–22, 1984.
26. R.T. WILLIAMS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Improved finite element forms for shallow-water wave equations", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **1**, 91–7, 1981.
27. M.G.G. FOREMAN, "A two-dimensional dispersion analysis of selected methods for solving the linearised shallow-water equations", *J. Comp. Phys.*, **56**, 287–323, 1984.
28. I.M. NAVON, "FEUDX : a two-stage, high-accuracy, finite element FORTRAN program for solving shallow-water equations", *Computers and Geosci.*, **13**, 225–85, 1987.
29. P. BETTESS, C.A. FLEMING, J.C. HEINRICH, O.C. ZIENKIEWICZ y D.I. AUSTIN, "A numerical model of longshore patterns due to a surf zone barrier", en *16th Coastal Engineering Conf.*, Hamburg, West Germany, October, 1978.
30. M. KAWAHARA, N. TAKEUCHI y T. YOSHIDA, "Two step explicit finite element method for tsunami wave propagation analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **12**, 331–51, 1978.
31. J.H.W. LEE, J. PERAIRE y O.C. ZIENKIEWICZ, "The characteristic Galerkin method for advection dominated problems–an assessment", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **61**, 359–69, 1987.
32. R. LÖHNER, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **4**, 1043–63, 1984.
33. S. NAKAZAWA, D.W. KELLY, O.C. ZIENKIEWICZ, I. CHRISTIE y M. KAWAHARA, "An analysis of explicit finite element approximations for the shallow water wave equations", en *Proc. 3rd Int. Conf. on Finite Elements in Flow Problems*, Banff, Vol. 2, pp. 1–7, 1980.
34. M. KAWAHARA, H. HIRANO, K. TSUBOTA y K. INAGAKI,

"Selective lumping finite element method for shallow water flow", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **2**, 89–112, 1982.
35. D.R. LYNCH y W.G. GRAY, "Analytic solutions for computer flow model testing", *Trans. ASCE, J. Hydr. Div.*, **104**(10), 1409–28, 1978.
36. D.I. AUSTIN y P. BETTESS, "Longshore boundary conditions for numerical wave model", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **2**, 263–76, 1982.
37. C.K. ZIEGLER y W. LICK, "The transport of fine grained sediments in shallow water", *Environ. Geol Water Sci.*, **11**, 123–32, 1988.
38. H. LAMB, *Hydrodynamics, 6th*, ed., Cambridge University Press, 1932.
39. G.B. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York, 1974.
40. C.C. MEI, *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, Wiley, New York, 1983.
41. M.J. LIGHTHILL, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, 1978.
42. J.C.W. BERKHOFF, "Linear wave propagation problems and the finite element method", en *Finite Elements in Fluids* (eds R.H. Gallagher *et al.*), Vol. 1, pp. 251–80, Wiley, Chichester, 1975.
43. O.C. ZIENKIEWICZ y P. BETTESS, "Infinite elements in the study of fluid structure interaction problems", en *Proc. 2nd Int. Symp. on Computational Methods of Applied Science*, Versailles, 1975; también publicado en *Lecture Notes in Physics* (eds J. Ehlers *et al.*), Vol. 58, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
44. C. TAYLOR, B.S. PATIL y O.C. ZIENKIEWICZ, "Harbour oscillation: a numerical treatment for undamped natural modes", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **43**, 141–56, 1969.
45. O.C. ZIENKIEWICZ, P. BETTESS y D.W. KELLY, "The finite element method for determining fluid loading on rigid structures: two- and three- dimensional formulations", en *Numerical Methods in Offshore Engineering* (eds O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis y K.G. Stagg), cap. 4, Wiley, Chichester, 1978.
46. A. BAYLISS y E. TURKEL, "Radiation boundary conditions for wave-like equations", ICASE report 79–26, 1979.
47. A. BAYLISS, M. GUNZBERGER y E. TURKEL, "Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions", ICASE report 80–1, 1980.
48. O.C. ZIENKIEWICZ y R.E. NEWTON, "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid", en *Proc. Int. Symp. on Finite Element Techniques*, Stuttgart, 1–15 May, 1969.
49. K. BANDO, P. BETTESS y C. EMSON, "The effectiveness of dampers for the analysis of exterior wave diffraction by cylinders and ellipsoids", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **4**, 599–617, 1984.

50. O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY y P. BETTESS, "The coupling of the finite element method and boundary solution procedures", *Int. J. Num. Meth. Eng*, **11**, 355–75, 1977.
51. O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY y P. BETTESS, "Marriage à la mode–the best of both worlds (finite elements and boundary integrals", en *Energy Methods in Finite Element Analysis* (eds R. Glowinski, E. Rodin y O.C. Zienkiewicz), cap. 5, pp. 81–106, Wiley, Chichester, 1980.
52. J.C.W. BERKHOFF, "Computation of combined refraction-diffraction", en *Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Engineering*, Vancouver, 10–14 July, 1972.
53. H.S. CHEN y C.C. MEI, "Oscillations and wave forces in an offshore harbor", report 190, Parsons Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, 1974.
54. H.S. CHEN y C.C. MEI, "Oscillations and wave forces in a man- made harbor in the open sea", en *Proc. 10th Symp. on Naval Hydrodynamics*, pp. 573–94, Office of Naval Research, 1974.
55. J.R. HOUSTON, "Long Beach Harbor: numerical analysis of harbor oscillations", report 1, miscellaneous papers H-76–20, U.S. Army Engineering Waterways Experimental Station, Vicksburg, Miss., 1976.
56. P. BETTESS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 1271–90, 1977.
57. P. BETTESS, S.C. LIANG y J.A. BETTESS, "Diffraction of waves by semi-infinite breakwater using finite and infinite elements", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **4**, 813–32, 1984.
58. O.C. ZIENKIEWICZ, C. EMSON y P. BETTESS, "A novel boundary infinite element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **19**, 393–404, 1983.
59. O.C. ZIENKIEWICZ, P. BETTESS, T.C. CHIAM y C. EMSON, *Numerical Methods of Unbounded Field Problems and a New Infinite Element Formulation*, AMD 46, pp. 115–48, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1981.
60. P. BETTESS, C. EMSON y T.C. CHIAM, "A new mapped infinite element for exterior wave problems", en *Numerical Methods in Coupled Systems* (eds R.W. Lewis, P. Bettess y E. Hinton), cap. 17, Wiley, Chichester, 1984.
61. O.C. ZIENKIEWICZ, K. BANDO, P. BETTES, C. EMSON y T.C. CHIAM, "Mapped infinite elements for exterior wave problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **21**, 1229–51, 1985.
62. R.J. ASTLEY, "Wave envelope and infinite elements for acoustical radiation", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **3**, 507–26, 1983.

63. R.J. ASTLEY y W. EVERSMAN, "A note on the utility of a wave envelope approach in finite element duct transmission studies", *J. Sound Vibr.*, **76**, 595–601, 1981.
64. P. BETTESS, "A simple wave envelope element example", *Comm. Appl. Num. Meth.*, **3**, 77–80, 1987.
65. O.C. ZIENKIEWICZ y P. BETTESS, "Fluid-structure interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **13**, 1–16, 1978.
66. H. HARA, K. KANEHIRO, H. ASHIDA, T. SUGAWARA y T. YOSHIMURA, "Numerical simulation system for wave diffraction and response of offshore structures", Technical Bulletin TB 83–07, Mitsui Engineering and Shipbuilding Co., Octubre 1983.
67. A.R. MITCHELL y S.W. SCHOOMBIE, "Finite element studies of solitons", en *Numerical Methods in Coupled Systems* (eds R.W. Lewis, P. Bettess y E. Hinton), cap. 16, pp. 465–88, Wiley, Chichester, 1984.
68. P.J. CLARK, P. BETTESS, G.E. HEARN y M.J. DOWNIE, "The application of finite element analysis to the solution of Stokes wave diffraction problems", *Int. J. Num. Meth. Fluids* (a ser publicado).
69. S.L. LAU, K.K. WONG y Z. TAM, "Nonlinear wave loads on large body by time-space finite element method", *Proc. Int. Conf. on Computers in Engineering*, Vol. 3, pp. 331–7, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1987.

Capítulo 16

MÉTODOS DE CÁLCULO POR ORDENADOR PARA ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS

16.1 Introducción

En este capítulo se amplían las capacidades del programa presentado en el Volumen 1 para incluir la posibilidad de resolver tanto problemas no lineales como transitorios mediante el método de los elementos finitos. El material incluido en este capítulo debe considerarse como complementario a la información contenida en el Capítulo 15 del Volumen 1.[1] En consecuencia, a lo largo de este capítulo se hará adecuada referencia a la información del primer volumen. Sin embargo, se sugiere que el lector repase el material presentado allí antes de embarcarse en el estudio de este capítulo.

El programa incluido en este volumen está pensado para ser usado por estudiantes y académicos que lleven a cabo estudios mediante el método de los elementos finitos y deseen programar nuevos elementos o estrategias de solución. El programa se llama PCFEAP para enfatizar el hecho de que puede ser utilizado en ordenadores tan pequeños como ordenadores personales. El programa entero está escrito utilizando Fortran 77 estándar, con muy pocas excepciones; por lo tanto, puede ser instalado en ordenadores personales, estaciones de trabajo más potentes u ordenadores de tamaño medio o grande. Desde la publicación del Volumen 1, el programa ha sido probado utilizando versiones del compilador Fortran Microsoft[2] (versiones 3.31 y 5.0) y en estaciones de trabajo operando bajo el sistema UNIX.† La excepción al Fortran estándar es el uso de almacenamiento de variables en INTEGER*2. Otros requisitos para usar el programa en diferentes entornos son el disponer de una rutina apropiada para el cálculo del tiempo y, si se desea una salida gráfica, la implementación de una interfase

† Microsoft es una marca registrada de Microsoft Corportation y UNIX es una marca registrada de AT&T Corporation.

gráfica. La rutina necesaria para el cálculo del tiempo en algunos entornos se describe en la Sección 16.10.2.

El presente capítulo está dividido en varias secciones que describen diferentes aspectos del programa. La Sección 16.2 resume las características adicionales del programa y los comandos de solución que se pueden usar al resolver problemas de elementos finitos. En la Sección 16.3 se presentan ejemplos de entradas de datos para describir la malla de elementos finitos en algunos problemas típicos. Estos problemas sirven como ejemplos de prueba que se considerarán más adelante en una sección posterior. En la Sección 16.4 se presentan algunas estrategias generales de solución y los macrocomandos correspondientes para usar el programa al resolver problemas no lineales. Los problemas no lineales son a menudo difíciles de resolver y consumen bastante tiempo de cálculo. En muchas aplicaciones el análisis completo no puede ser llevado a cabo durante una única ejecución del programa; por lo tanto, en la Sección 16.5 se presentan técnicas para parar el programa en puntos clave del análisis para volverlo a recomenzar más tarde y continuar la solución. La Sección 16.6 trata la solución general de problemas transitorios lineales y no lineales utilizando PCFEAP. El programa incluye la posibilidad de resolver tanto ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (tipo difusión) como de segundo orden (tipo vibración/ondas) en el tiempo. En la Sección 16.7 se resumen algunas aplicaciones de cálculo de autovalores en problemas de elementos finitos, así como las correspondientes instrucciones de macro–solución. El programa PCFEAP contiene un algoritmo vectorial iterativo (método de subespacio) para obtener los pares de autovalores y autovectores de la matriz *tangente* más cercanos a un cierto entorno. Éste puede ser utilizado tanto para problemas lineales como no lineales. Esta sección completa la descripción de las nuevas y ampliadas opciones de solución que se han agregado al programa.

Como ya se ha mencionado, se han incluido nuevos elementos en el programa PCFEAP; la Sección 16.8 los identifica y describe brevemente. Esta sección también incluye tablas que describen los datos de entrada para especificar los datos MATE en las mallas. La Sección 16.9 describe los pasos de solución para algunos problemas típicos que pueden resolverse utilizando PCFEAP y presenta también datos numéricos que pueden utilizarse para verificar una adecuada instalación del programa en el ordenador del lector. Finalmente, la Sección 16.10 incluye información sobre la instalación, así como los listados e información relativa a los cambios más importantes en PCFEAP. No se incluye el listado completo del programa y, por tanto, es necesario consultar el Capítulo 15 del Volumen 1 para obtener algunas rutinas.

El programa contenido en este capítulo ha sido desarrollado y usado

en un entorno educativo y de investigación durante un período de casi 15 años. El concepto del algoritmo de macrosolución ha permitido que diversos usuarios, que consideraban problemas ampliamente diferentes en alcance y concepto, puedan usar el programa al mismo tiempo sin necesidad de que existieran diferentes versiones del mismo. Se pueden añadir características propias para cada usuario a través de nuevos macrocomandos. La posibilidad de tratar problemas cuya matriz de coeficientes pueda ser simétrica o no simétrica a menudo es útil para probar el funcionamiento de algoritmos que sustituyen una matriz tangente simetrizada en lugar de una matriz no simétrica resultante del proceso consistente de linearización. También, la interfase de elementos es bastante evidente y, una vez entendida, permite a los usuarios probar nuevos tipos de elementos finitos rápidamente. De hecho, el presente programa ha tenido un número importante de contribuciones de colegas a los cuales se debe agradecimiento. El Profesor Juan C. Simo de Stanford University colaboró en el desarrollo del elemento de plasticidad con algoritmo de retorno que se incluye en este capítulo y el Dr. Werner Wagner de la Technical University of Hannover facilitó una versión anterior del elemento de lámina axisimétrico que ha sido adaptado para su inclusión en este capítulo. El Dr. Peter Wriggers, de la Technical University of Darmstadt, ha contribuido durante varios años al desarrollo del sistema en lo que se refiere a algoritmos de solución para problemas no lineales. Finalmente, debemos agradecer la ayuda de todos nuestros estudiantes a través de los años, especialmente la del Dr. Panayiotis Papadopoulos de la University of California en Berkeley que ha revisado este capítulo cuidadosamente.

Creemos que el programa de este libro proporciona un sistema de solución muy potente para ayudar al lector interesado en realizar análisis por elementos finitos. El programa PCFEAP no es, en absoluto, un sistema completo de software que pueda usarse para resolver cualquier problema de elementos finitos. En este capítulo se incluyen algunas sugerencias para ampliar el sistema, especialmente al final de la Sección 16.9. Aunque el programa ha sido probado en varios ejemplos de prueba, es probable que aún existan errores en algún módulo del programa. Los autores desearían ser informados sobre éstos para corregirlos en futuras ediciones. También se agradeceran los comentarios y sugerencias del lector en lo relativo a posibles futuras mejoras.

16.2 Instrucciones de uso –descripción de las características adicionales del programa–

Las instrucciones de uso dadas en el Capítulo 15 del Volumen 1 también son válidas para el programa contenido en este volumen. La sección siguiente presenta un conjunto de problemas de ejemplo que pueden

usarse para revisar las aplicaciones del programa. Estos ejemplos ilustran muchas de las características para generar un modelo de elementos finitos en problemas que puedan resolverse utilizando el programa. Se han hecho algunas ampliaciones de las capacidades del programa y esta sección contiene la información general sobre el uso de dichas ampliaciones.

El programa de macrosolución se ha ampliado para permitir la simulación de un rango más amplio de aplicaciones lineales y no lineales. Los principales añadidos se refieren a la solución de problemas no lineales y el presente programa posee la habilidad de considerar aplicaciones que tienen matrices tangentes "de rigidez" no simétricas. Además, el programa introduce un algoritmo de búsqueda direccional ("line search") que puede ser utilizado para obtener convergencia de algoritmos del tipo de Newton con incrementos en la soluci ón bastante grandes. El programa también amplia los algoritmos para resolver problemas transitorios incluyendo los algoritmos SS11 y SS22 discutidos en el Capítulo 10. Finalmente, el programa tiene un algoritmo de solución de autovalores basado en la iteración por subespacios.[3,4] La Tabla 16.1 contiene la descripción de la información de uso necesaria para utilizar los nuevos macrocomandos para estos procedimientos.

16.3 Descripción de los problemas de ejemplo

En esta sección se considera la especificación de los datos de entrada de la malla para varios tipos de problemas que serán analizados más tarde (ver Sección 16.9). Estas aplicaciones ilustran muchas de las capacidades incluidas en el programa para describir la malla en una simulación por elementos finitos. La especificación de un problema debe empezar con un record FEAP, que puede también incluir información alfanumérica adicional para describir el problema. Siguiendo inmediatamente a este record viene la descripción del tamaño del problema y otros parámetros de la malla dados por

Datos	*Descripción*
NUMNP	Número de puntos nodales
NUMEL	Número de elementos
NUMMAT	Número de conjuntos de propiedades materiales
NDM	Dimensión espacial de la malla
NDF	Grados de libertad/nodo (máximo)
NEN	Nodos/elemento (máximo)

Siguiendo a estos dos records se deben especificar datos adicionales describiendo el problema específico que se quiere resolver. La información es diferente para cada problema, pero debe incluir datos para especificar la

TABLA 16.1
LISTADO DE LOS COMANDOS DE MACROPROGRAMACIÓN

Columnas					
1–4	16–19	31–45	46–60	61–75	Descripción
BETA	SS11	V1			Seleccionar el algoritmo de solución SS11, V1 es el valor de θ
BETA	SS22	V1	V2		Seleccionar el algoritmo de solución SS22, V1,V2 con los valores de θ_1, θ_2
BETA	GN22	V1	V2		Seleccionar el algoritmo de solución GN22, V1,V2 son los valores de β, γ
BETA		V1	V2		Lo mismo que BETA GN22
EIGV		N1			Imprimir N1 pares de valores propios (después de SUBS)
IDEN					Hacer la matriz de masa igual a la identidad
PLOT	EIGV	V1			Dibujar el último vector propio, escalado por V1 (después de EIGV)
SOLV	LINE	V1			Resolver para hallar nuevos desplazamientos (después de FORM). Si se ha especificado LINE, calcular la solución con búsqueda direccional, V1 controla el inicio (ver Sección 16.4)
SUBS	PRIN	N1	N2		Extraer N1 pares de valores y vectores propios con N2 vectores extra. Si se especifica PRIN, imprimir los vectores del subespacio (después de TANG y MASS o IDEN)
TANG	LINE	N1	V2	V3	Calcular y factorizar la matriz tangente simétrica (ISW=3). Ver nota
UTAN	LINE	N1	V2	V3	Calcular y factorizar la matriz tangente no simétrica (ISW=3). Ver nota

Nota: Si N1 es no nulo se realiza el cálculo del residuo, la solución y la actualización de los deplazamientos. Si V2 es no nulo, se modifica la matriz tangente restándole V2 veces la matriz de masa antes de calcular los factores triangulares. La matriz de masa puede ser hecha igual a la identidad utilizando el macrocomando IDEN. Si se especifica LINE como parte del comando TANG o UTAN se realiza una búsqueda direccional lineal siempre que la relación de energía entre dos iteraciones sucesivas sea mayor que el valor de V3 (por defecto, el valor es 0.8).

colocación de los nodos (COOR o BLOCK), la lista de conectividades de los elementos (ELEM o BLOCK) y los parámetros de material (MATE). Otros datos son opcionales, pero normalmente se incluyen las restricciones o condiciones de contorno (BOUNdary) y las condiciones de carga (FORCed) (desplazamientos y/o cargas nodales no nulas). Los ejemplos que se des-

criben abajo indican el uso de procedimientos específicos en PCFEAP.

16.3.1 *Barra recta.* Consideramos primero un ejemplo de viga simplemente apoyada analizada utilizando elementos de dos nodos. Se supone que la viga es de 10 unidades de longitud y tiene la dirección horizontal del eje x. Se modela la viga utilizando 20 elementos y, por tanto, hay 21 nodos. Las condiciones de contorno son de articulación en la izquierda y rodillo en la derecha. La carga está dada por una única fuerza en el centro, dirigida verticalmente hacia abajo, con una magnitud de 5.0 unidades. La viga tiene dos conjuntos de propiedades materiales; uno para la mitad izquierda y otro para la derecha. Como se ve, las propiedades corresponden a los mismos valores, lo que permite una comprobación de simetría en los resultados calculados en la Sección 16.9. Si se desea, se pueden cambiar los valores para probar otras relaciones entre los parámetros. La malla para este problema viene dada por la instrucciones:†

```
FEAP**SIMPLY SUPPORTED BEAM MODEL
21,20,2,2,3,2

COOR
1,1,0.0,0.0
11,1,5.0,0.0
21,0,10.0,0.0

ELEM
1,1,1,2,1
11,2,11,12,1

BOUN
1,,1,1,0
21,,0,1,0

FORC
11,,0.0,-5.0,0.0

MATE
1,1
BEAM
100.,0.,1.0,0.,0.,1.
```

† Los datos alfanuméricos necesarios para el programa PCFEAP vienen escritos en letra mayúsculas, mientras que la información opcional viene escrita en minúsculas. Debe notarse, sin embargo, que en realidad los datos pueden entrarse tanto en mayúsculas como en minúsculas, ya que el preprocesador de comandos reconoce ambas formas en un entorno ASCII.


```
MATE
2,1
BEAM
100.,0.,1.0,0.,0.,1.

END
INTEractive
STOP
```

La descripción de los datos específicos utilizados para generar la malla se dan en la Sección 15.3 del Volumen 1. Los grados de libertad para un elemento de viga/lámina vienen ordenados: u, desplazamiento horizontal (dirección y o r); v, desplazamiento vertical (dirección y o z); y θ, rotación alrededor de la normal al plano xy (o rz). Por tanto, el record de control que sigue al record FEAP comienzo/título especifica NDF como tres. La interpretación de los datos del material se posponen hasta la Sección 16.9, donde se discuten las capacidades de cada elemento. El conjunto de datos indica que se va a realizar una solución interactiva; se puede utilizar una ejecución en cola reemplazando el comando INTE por MACR seguido por los pasos específicos de solución que deban realizarse. Los pasos para la solución se seleccionan entre los incluidos en la Tabla 15.16 en el Volumen 1 o en la Tabla 16.1.

16.3.2 *Casquete esférico/anillo circular.* El segundo ejemplo es un casquete esférico (o circular) que se describe en la Figura 14.7. El modelo de elementos finitos consiste en elementos de línea de dos nodos. Se supone que el casquete cubre un sector de 35 grados en el primer cuadrante del plano rz (o xy). Se suponen condiciones de simetría en el eje y y el otro contorno se supone fijo. El radio del casquete es de 90 pulgadas y el espesor de 3 pulgadas. La carga se aplica con una presión externa uniforme con una magnitud de 1 lb/pulg.^{2} y el coeficiente de Poisson se toma como $\frac{1}{6}$. El casquete se modeliza mediante 14 elementos y los datos para la malla vienen dados por las instrucciones:

```
FEAP**SPHERICAL CAP MODEL
15,14,1,2,3,2

COOR
1,1,90.0,55.0
15,0,90.0,90.0

POLAr
1,15,1
```

```
ELEM
1,1,1,2,1

BOUN
1,,1,1,1
15,,1,0,1

MATE
1,1
SHELL
100,0.166667,3.0,1.0,0.,1.

END
INTEractive
STOP
```

La malla descrita arriba especifica primero las coordenadas en el sistema polar (r, θ) y utiliza después la instrucción POLA para convertirlas a coordenadas cartesianas. Las condiciones de simetría en el eje y de un casquete son rotación y desplazamiento horizontal nulos. Para un anillo circular cambiar SHELL por BEAM en los datos MATE.

16.3.3 *Esfera sólida -carga simétrica-*. Se considera a continuación un problema que en realidad es unidimensional, pero que se usa para comprobar el funcionamiento de un elemento bidimensional formulado en coordenadas cilíndricas. La malla modeliza una esfera sólida con un radio exterior de una unidad. La región discretizada está en el plano rz entre el eje r y la línea a 45 grados entre los ejes r y z. El ejemplo que se resolverá en la Sección 16.9 reproduce el proceso de ignición espontánea descrito en la Sección 10.6.4. Por tanto, el problema está regido por una ecuación diferencial con una variable escalar dependiente (temperatura) y la discretización de elementos finitos sólo tiene una incógnita por nodo (NDF = 1). Las condiciones de contorno son valores prescritos de la variable dependiente en el radio exterior y flujo nulo en los contornos laterales. Se realiza la discretización de la región utilizando elementos isoparamétricos de nueve nodos.

```
FEAP**THICK SPHERE - SYMMETRICAL LOADING
39,7,1,2,1,9

ELEM
1,1
7,1,31,33,35,39,32,34,38,36,37
```



```
BLOCk
6,4,6,1,1,1,,9
1,1.0.,0.
2,1.0.,45.
3,0.25.,45.
4,0.25.,0.

COOR
36,1,0.125,0.
38,0,0.125,45.
39,0,0.,0.

POLAr
1,38,1

BOUN
1,1,-1
5,0,1

FORCe
1,1,290.
5,0,290.

MATE
1,3
0.2,1.,1.,0.,0.,2

END
INTEractive
STOP
```

De nuevo, es cómodo generar la malla en coordenadas polares en el plano rz y después transformar las coordenadas nodales a la representación cartesiana utilizando el comando POLAr. Nótese que el nodo 9 está en el origen y no necesita transformarse. Se usan las características de un único bloque isoparamétrico para generar una malla regular de elementos isoparamétricos de nueve nodos. Se advierte que los nodos del bloque de generación deben ser numerados como se muestra en la Figura 15.25 del Volumen 1. En particular, los nodos deben estar en forma secuencial en un orden antihorario en el elemento master. Antes de utilizar el comando BLOCk, se especifica primero un único elemento (elemento 7), además de datos adicionales para los primeros seis elementos. Las coordenadas en el interior de la cuña se generan también utilizando el comando COOR. Existe cierta dependencia en el orden de la generación: es necesario ge-

nerar todos los elementos cuando se utiliza ELEM; por tanto, esto es lo que se hace primero. BLOCk y COOR pueden generar cualquier parte de los datos y, por tanto, pueden aparecer en cualquier lugar entre los datos. Esta malla también utiliza las posibilidades de generación para las restricciones de contorno (BOUN) y las condiciones de fuerza no nulas (FORC) para minimizar la cantidad de datos de entrada necesarios. En la Sección 16.9 se lleva a cabo un análisis del problema de ignición espontánea, tal como se describió en el Capítulo 10. Los datos que se muestran se han preparado para calcular las condiciones iniciales para este problema. Por tanto, los datos mostrados calcularán una distribución uniforme no nula de temperaturas de 290 K.

16.3.4 *Alargamiento de una lámina con un orificio circular.* En este problema se considera el alargamiento uniforme de una banda de anchura infinita que contiene un orificio circular colocado simétricamente. Debido a la simetría, sólo se modela un cuadrante de la malla. Se construye el modelo utilizando el comando BLOCk para generar un grupo de elementos. Mediante una selección cuidadosa del sistema de numeración de los elementos y los nodos, los bloques de elementos se unen para formar la malla total. Además, se incluye el comando NOPRint par minimizar la información escrita en el archivo de salida.

```
FEAP**TENSION STRIP WITH A CIRCULAR HOLE
160,133,1,2,2,4
NOPRint

BLOCk 1
5,7,7,1,1,1
1,5.,0.
2,10.,0.
3,10.,8.
4,3.53553,3.53552
8,4.61940,1.91342

BLOCk 2
5,7,7,57,50,1,5
1,3.53553,3.53552
2,10.,8.
3,0.,12.
4,0.,5.
8,1.91342,4.61940

BLOCk 3
4,5,7,64,99,1,7
```



```
1,10.,8.
2,10.,18.
3,0.,18.
4,0.,12.

FORC
69,13,0.,1.
160,,0.,1.

BOUN
1,1,0,-1
8,0,0,-1
69,13,0,-1
160,-1,-1,1
148,0,1,0

MATE
1,2
0,.1
7000.,.2,24.3,0.,0.

END
INTEractive
STOP
```

Se muestra en la Figura 16.1 un dibujo de la malla generada mediante los comandos anteriores. Se muestran la estructura de bloques utilizada para construir la malla, así como los números para el primer nodo y elemento generados en cada bloque. Este ejemplo ilustra el uso de múltiples comandos BLOCk para generar una malla para el problema de la banda. Las instrucciones de entrada utilizan las características generales del comando BLOCk para generar una discretización consistente. Los usuarios deben notar especialmente cómo se ha utilizado el incremento nodal en los bloques 2 y 3, y cómo se han utilizado lados curvos en los bloques al generar esta malla. Se ha tenido también cuidado al seleccionar las direcciones y el orden de los bloques para minimizar el ancho del frente (o el perfil) de la matriz de rigidez. El programa PCFEAP está dimensionado actualmente para un entorno de ordenador personal y con estos valores este problema es demasiado grande para resolverse utilizando un solucionador de banda variable (archivo PASOLV.FOR); sin embargo, el problema puede resolverse utilizando el solucionador frontal. Los pasos necesarios para llevar a cabo un análisis elastoplástico utilizando esta malla se presentan en la Sección 16.9.

Los ejemplos anteriores ilustran muchas de las características del

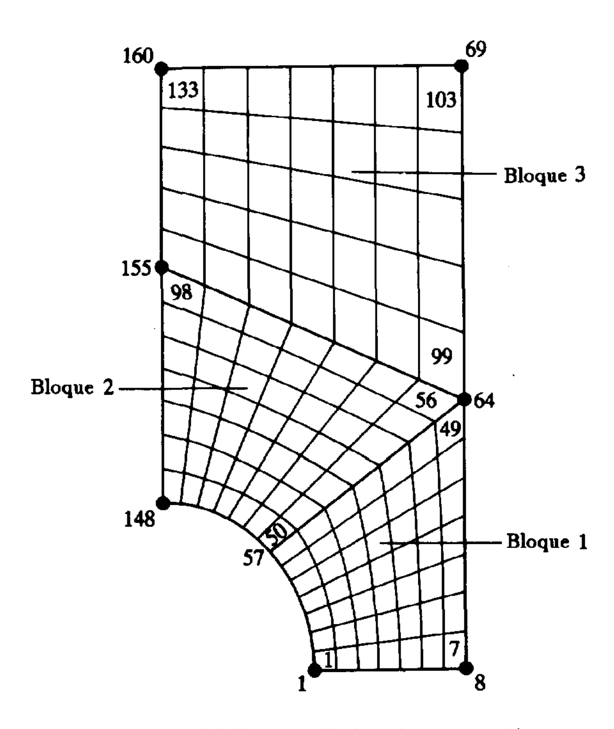


Figura 16.1 Malla para la banda en tensión.

programa presentado en este libro. Se pueden utilizar otros programas de generación de malla siempre que se puedan reproducir las instrucciones de entrada necesarias para PCFEAP como salida del programa de generación.

16.4 Solución de problemas no lineales

La solución de problemas no lineales utilizando el programa incluido en este volumen está pensada según un algoritmo de Newton o de Newton modificado.[5] Además, la solución de problemas transitorios no lineales puede conseguirse combinando un algoritmo tipo Newton con los métodos de integración transitoria descritos más abajo.

Consideremos primero un problema no lineal descrito por (ver Capítulo 7)

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}) = \mathbf{P}(\mathbf{a}) - \mathbf{f} \tag{16.1}$$

donde $\mathbf{f}$ es un vector de cargas aplicadas y $\mathbf{P}$ es el vector no lineal de fuerzas *internas*, que se indica como función de los parámetros nodales $\mathbf{a}$. El vector $\boldsymbol{\Psi}$ se conoce como residuo del problema y la solución se

define como cualquier conjunto de desplazamientos nodales, $\mathbf{a}$, para los cuales el residuo es nulo. En general, puede haber más de un conjunto de desplazamientos que definen una solución y es responsabilidad del usuario asegurarse de que se obtiene una solución adecuada. Esto puede conseguirse comenzando a partir de un estado que satisface las condiciones físicas de una solución y aplicando entonces pequeños incrementos al vector de carga, $\mathbf{f}$. Tomando pasos suficientemente pequeños normalmente se sigue la trayectoria de solución. Así, para cualquier paso, nuestro objetivo es encontrar un conjunto de valores para las componentes de $\mathbf{a}$ tal que

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \tag{16.2}$$

Supongamos que existe algún vector inicial (inicialmente en el programa este vector es nulo), a partir del cual buscaremos una solución, y llamémosle $\mathbf{a}^{(0)}$. A continuación calculamos un conjunto de desplazamientos iterativos tales que

$$\mathbf{a}^{(i+1)} = \mathbf{a}^{(i)} + \eta\delta\mathbf{a}^{(i)} \tag{16.3}$$

El parámetro escalar η se introduce para controlar posibles divergencias durante las primeras etapas del proceso de iteración y a menudo se le llama *control del tamaño de paso*. Un algoritmo común para determinar η es el de *búsqueda direccional* definido por[6]

$$g = \min_{\eta\in 0,1} |G(\eta)| \tag{16.4}$$

donde

$$G(\eta) = \delta\mathbf{a}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}^{(i)} + \eta\delta\mathbf{a}^{(i)}) \tag{16.5}$$

A menudo se recomienda una solución aproximada de la búsqueda direccional.[6]

Queda por determinar cómo deducir el vector $\delta\mathbf{a}^{(i)}$ para un estado dado $\mathbf{a}^{(i)}$. El método de Newton es un algoritmo que puede utilizarse para obtener iteraciones incrementales. En este procedimiento se desarrolla el residuo $\boldsymbol{\Psi}$ alrededor del estado actual $\mathbf{a}^{(i)}$ en función del incremento $\delta\mathbf{a}^{(i)}$ y se hace la parte lineal igual a cero. De esta forma,

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}^{(i)}) + \left.\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{a}}\right|_{\mathbf{a}^{(i)}} \cdot \delta\mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{0} \tag{16.6}$$

Se define la matriz tangente (o jacobiana) como

$$\mathbf{K}_T^{(i)} = \left.\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{a}}\right|_{\mathbf{a}^{(i)}} \tag{16.7}$$

De esta forma, se obtiene un incremento

$$\delta \mathbf{a}^{(i)} = (\mathbf{K}_T^{(i)})^{-1} \mathbf{\Psi}(\mathbf{a}^{(i)}) \tag{16.8}$$

Este paso precisa la solución de un sistema de ecuaciones lineales algebraicas simultáneas. Nótese que para una ecuación diferencial lineal el vector de fuerzas internas en elementos finitos se puede escribir como

$$\mathbf{P}(\mathbf{a}) = \mathbf{K}\mathbf{a} \tag{16.9}$$

donde $\mathbf{K}$ es una matriz *constante*. Así, (16.9) genera una matriz tangente constante y el proceso definido por (16.3) y (16.9) converge en una iteración siempre que se use un valor unidad para η.

En el método de Newton el residuo $\mathbf{\Psi}$ debe tener una norma que se hace más pequeña para un $\delta \mathbf{a}^{(i)}$ suficientemente pequeño; en consecuencia, se puede proyectar un paso de Newton en G como se muestra en la Figura 16.2. Generalmente, el método de Newton es convergente si

$$G^{(i)}(1) < \alpha G^{(i)}(0), \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{16.10}$$

para todas las iteraciones; sin embargo, puede no producirse convergencia si no se satisface esta condición.†

Se puede construir un algoritmo de solución de Newton utilizando el lenguaje de macroprogramación incluido en el programa descrito en este capítulo. Una solución para un único paso de carga con un máximo de 10 iteraciones viene dado por‡

```
LOOP,newton,10
TANG
FORM
SOLV
NEXT,newton
```

o bien,

```
LOOP,newton,10
```

† Para algunos problemas (tales como los definidos por las teorías no lineales de vigas, placas y láminas) las primeras iteraciones pueden producir oscilaciones entre un modo de comportamiento (flexión) y otro (membrana) que pueden causar grandes variaciones en $|\mathbf{\Psi}|$. Las siguientes iteraciones, sin embargo, siguen generalmente (16.10).

‡ Recordemos que la información dada en letras mayúsculas es necesaria; el texto indicado por letras minúsculas es opcional. Finalmente, la información dada en itálicas debe tener asignados valores numéricos para definir correctamente un macrocomando.

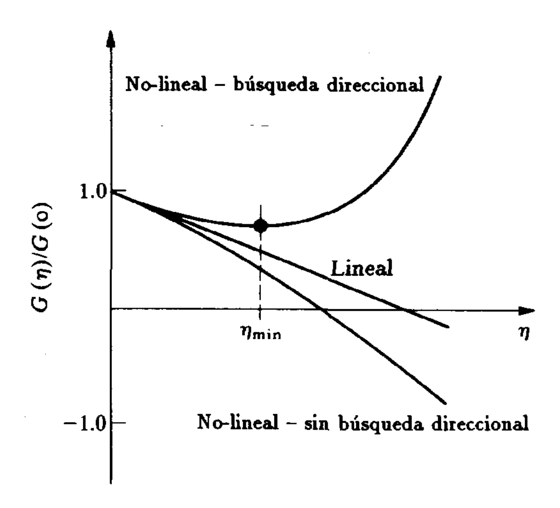


Figura 16.2 Comportamiento de la energía. Uso de la búsqueda direccional.

```
TANG,,1
NEXT,newton
```

La segunda forma es preferible ya que asegura que $\mathbf{K}_T^{(i)}$ y $\mathbf{\Psi}^{(i)}$ se calculan simultánemente para cada elemento, mientras que el algoritmo original calcula los dos separadamente. Si se consigue convergencia antes de las 10 iteraciones, el proceso continuará con el macrocomando que siga al comando NEXT. La convergencia se basa en

$$G^{(i)}(0) < tol \cdot G^{(i)}(0)$$

donde *tol* se especifica mediante el macrocomando TOL (con un valor por defecto de 10^{-12}).

Se puede añadir una búsqueda direccional al algoritmo modificando los macrocomandos de la forma siguiente

```
LOOP,newton,10
TANG
FORM
SOLV,LINE,0.6
NEXT,newton
```

o bien,

```
LOOP,newton,10
```

TANG,LINE,1,,0.6
NEXT,newton

La búsqueda direccional precisa el cálculo repetido de $\mathbf{\Psi}(\mathbf{a} + \eta\delta\mathbf{a})$ que puede incrementar el tiempo de solución. Debe sopesarse la necesidad de hacer esto antes de llevar a cabo un gran número de pasos de solución.

También puede utilizarse un método de Newton modificado eliminando el cálculo de la matriz tangente del bloque. De esta forma,

```
TANG
LOOP,newton,10
FORM
SOLV,LINE,0.6
NEXT,newton
```

calcularía sólo una matriz tangente y sus factores triangulares asociados. El comando FORM calcula sólo $\mathbf{\Psi}$ y SOLV resuelve las ecuaciones utilizando los factores triangulares de la matriz tangente calculados previamente. Se pueden construir también algoritmos entre el Newton completo y el Newton modificado. Por ejemplo:

```
LOOP,,2
TANG
LOOP,newton,5
FORM
SOLV,LINE,0.6
NEXT,newton
NEXT
```

Debe notarse que en este algoritmo la convergencia dentro de las primeras cinco iteraciones transferirá el control al comando NEXT exterior y se calculará una segunda TANG seguida de una única iteración en el bucle interno antes de que se complete el algoritmo entero.

16.5 Opción de rearranque

El programa aquí descrito permite al usuario almacenar una solución y posteriormente utilizar estos datos para continuar el análisis desde el punto en que los datos fueron almacenados. A esto se le llama opción de *rearranque*. Para utilizar esta característica se deben especificar apropiadamente los nombres de los archivos dados al principio del programa.

Deben especificarse nombres para dos archivos que se indican en la pantalla como los archivos de RESTART (READ) y RESTART (WRITE). El archivo READ es el nombre de un archivo que contiene los datos de un análisis previo. La pantalla también indicará si el archivo existe (EXIST) o es de nueva creación (NEW). La indicación NEW indica que no existe ningún archivo con el nombre especificado. El archivo WRITE es el nombre de un archivo en el que se escribirán datos en la sesión actual. Se debe poner cuidado para evitar dar el mismo nombre de archivo a los archivos READ y WRITE (a menos que ninguno de ellos exista) ya que escribir en un archivo existente destruye la información original. Se creará un archivo WRITE para todas las ejecuciones *en cola* o para las ejecuciones *interactivas* que terminen con comando EXIT. Las ejecuciones interactivas que terminan utilizando QUIT no almacenan un archivo WRITE de rearranque.

Una vez que se han puesto los nombres de achivo adecuados, se puede hacer un rearranque para problemas no lineales (o lineales) que no tengan términos tipo inercia (véase más adelante para este tipo de problemas) introduciendo el macrocomando

```
RESTart
```

El análisis continúa desde el punto en el proceso de solución donde se escribió el archivo de rearranque. La información de los archivos temporales no se guarda en un rearranque. Los archivos temporales incluyen: los factores triangulares de un comando TANG o los autovalores de un comando SUBS. Las características de la solución de un estado recuperado pueden mostrarse en la pantalla, imprimirse en el archivo de salida, o dibujarse. También puede continuarse el análisis especificando nuevas cargas, utilizando nuevos comandos TANG, etc. Se recomienda que los análisis que precisen de gran cantidad de cálculos se dividan en partes utilizando la posibilidad de rearranque. Esto asegura que los resultados calculados se guarden y no sea necesario calcularlos de nuevo si se produce un error o divergencia.

16.6 Solución de problemas transitorios lineales y no lineales

La solución de problemas transitorios definidos por las Ecs. (10.1) a (10.3) se puede llevar a cabo utilizando el programa descrito en este capítulo. El programa incluye opciones para resolver problemas transitorios de elementos finitos que generan ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden utilizando los algoritmos SS11, SS22 y GN22. Al programar los algoritmos se tiene una restricción con respecto a la especificación de los parámetros y no es posible llevar a cabo ninguno de los algoritmos *explícitos* descritos en el Capítulo 10. Consideraremos cada algoritmo de forma separada en lo que sigue.

16.6.1 *Solución de problemas de primer orden utilizando SS11.* Considérese

el problema lineal descrito por

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{16.11}$$

Si se introduce el algoritmo SS11, se tiene, para cada tiempo t_{n+1}, el problema discreto dado por (10.41) de la forma

$$\mathbf{\Psi}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \mathbf{K}[\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \theta\Delta t\boldsymbol{\alpha}_{n+1}] + \bar{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{16.12}$$

con

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = \mathbf{a}_n \tag{16.13}$$

y de (10.40)

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \tag{16.14}$$

También se puede considerar la extensión no lineal de este problema, expresada de la forma

$$\mathbf{\Psi}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \mathbf{P}[\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \theta\Delta t\boldsymbol{\alpha}_{n+1}] + \bar{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{16.15}$$

donde, de nuevo, $\mathbf{P}$ es el vector no lineal de fuerzas internas. Las soluciones tanto del problema lineal como no lineal se pueden expresar como

$$(\mathbf{C} + \theta\Delta t\mathbf{K}_T^{(i)})\delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} = -\mathbf{\Psi}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}) \tag{16.16}$$

con

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i+1)} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} + \eta\delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} \tag{16.17}$$

donde η es el tamaño del paso descrito más arriba para problemas no lineales y tomados siempre como la unidad para problemas lineales. Para problemas lineales $\mathbf{K}_T^{(i)} \equiv \mathbf{K}$ mientras que para problemas no lineales

$$\mathbf{K}_T^{(i)} = \left.\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{a}}\right|_{\mathbf{a}^{(i)}} \tag{16.18}$$

Finalmente, los valores convergidos se expresan sin el supraíndice (i).

La solución del problema transitorio se obtiene mediante los siguientes pasos:

1. Especificar θ.
2. Especificar Δt.
3. Calcular $\mathbf{C}$.
4. Especificar el tiempo, t_{n+1}, el número de pasos de tiempo y hacer $i = 0$.

5. Para cada tiempo, t_{n+1}:
   a) Calcular $\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{n+1})$.
   b) Calcular $\mathbf{C} + \theta\Delta t\mathbf{K}_T^{(i)}$.
   c) Resolver $\delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}$.
6. Comprobar la convergencia para problemas no lineales:
   a) Si se satisace, terminar las iteraciones.
   b) Si no se satisface, hacer $i = i + 1$ y repetir el paso 5.
7. Imprimir la solución si es necesario.
8. Controlar el límite de tiempo:
   a) Si $n \geq$ número máximo, parar, de otro modo,
   b) Si $n <$ número máximo, ir al paso 4.

Para un problema típico estos pasos pueden especificarse mediante el siguiente conjunto de macrocomandos:

```
1.        BETA,SS11,0.5
2.        DT,,0.1
3.        MASS
4.        LOOP, time,20
          TIME
5.        LOOP,newton,10
   (a)    TANG
   (b)    FORM
   (c)    SOLV
6.        NEXT,newton
7.        DISP,ALL
8.        NEXT,time
```

Tal como está programado, el comando MASS formula sólo una matriz $\mathbf{C}$ diagonal utilizando las opciones discutidas en el Apéndice 8 del Volumen 1. El algoritmo anterior funciona tanto para problemas lineales como no lineales. Para problemas lineales el residuo debería ser un cero numérico en la segunda iteración (si no, ¡hay un error de programación!) y por razones de eficiencia se pueden eliminar los macrocomandos

LOOP,newton,10

y

NEXT,newton

También se puede utilizar un único comando tangente para todos los pasos en los que el paso de tiempo sea el mismo; en lo anterior se puede conseguir esto colocando el comando TANG inmediatamente *después* del comando

MASS, ya que el paso 5(*b*) necesita **C** para calcular la matriz tangente.

Puede utilizarse cualquiera de las opciones para resolver un problema no lineal (por ejemplo, de Newton modificado) siguiendo las descripciones dadas anteriormente en la sección no lineal. En particular, y de nuevo por eficiencia, se puede usar para un paso con solución de Newton completo:

```
LOOP,newton,10
TANG,,1
NEXT,newton
```

Se puede especificar una carga dependiente del tiempo mediante:

a) carga proporcional con una distribución espacial fija del vector de cargas nodales y/o
b) Una carga general variable con el tiempo.

Para carga proporcional

$$\bar{\mathbf{f}}_{n+1} = p(\bar{t}_{n+1})\mathbf{f}_0 \tag{16.19}$$

donde, en el programa,

$$\bar{t}_{n+1} = t_n \theta \Delta t \tag{16.20}$$

El valor de $\mathbf{f}_0$ se especifica, bien como fuerzas nodales (utilizando la opción FORC durante la descripción de la malla) o se calcula para cada elemento como carga elemental. Por ejemplo, la fuente de calor Q en (10.116) genera cagas elementales en el nodo i de la forma

$$f_i = \int_\Omega N_i Q \, d\Omega \tag{16.21}$$

El valor del factor de proporcionalidad se puede especificar en el programa de la forma

$$p(t) = A_1 + A_2 t + A_3 \operatorname{sen}^L A_4(t - t_{min}), \qquad t_{min} \leq t \leq t_{max} \tag{16.22}$$

En la Sección 15.4.2 del Volumen 1 se dan detalles para la entrada de los parámetros.

Para carga proporcional el programa dado más arriba debe modifcarse añadiendo un paso 0: especificar la función de carga proporcional, $p(t)$. El macrocomando para este paso para una única función del tipo descrito arriba es

```
PROP,,1
```


Cada especificación de un nuevo tiempo hará que el programa recalcule $p(\bar{t}_{n+1})$. El valor de la carga proporcional se pasa a cada módulo elemental como un número REAL que es el primer dato del bloque COMMON ELDATA (y que se llama DM en las rutinas que se listan a continuación) y se puede utilizar para multiplicar las cargas del elemento para obtener la carga correcta para cada tiempo.

La carga de tipo general se puede conseguir sólo volviendo a utilizar el módulo de generación de malla y reespecificando los valores nodales. En consecuencia para esta opción debe insertarse un macrocomando MESH dentro del bucle de los pasos de tiempo.

Por ejemplo, se modifica el paso 4 anterior de la forma

```
LOOP,time,20
TIME
MESH
```

Para cada paso de tiempo es, entonces, necesario especificar los nuevos valores nodales de $\bar{\mathbf{f}}_{n+1}$. Si el valor en un nodo en el que previamente el valor era no nulo se hace cero, este valor *debe ser especificado.* Esto puede conseguirse especificando solamente el número del nodo. Por ejemplo,

```
FORCe
12
26,,5.0

END
```

pondría todas las componentes de la *fuerza* del nudo 12 a cero y la primera componente de la fuerza del nudo 26 a 5.0 unidades.

En la ejecución en cola el número de comandos emparejados FORC-END debe cuadrar exactamente (o exceder) con el número de pasos de tiempo. En ejecución interactiva aparecerá en la pantalla un apuntador MESH > y el usuario debe introducir los necesarios datos FORC desde el teclado (terminando la entrada con una línea en blanco y un comando END). Si se termina de forma adecuada el apuntador indicará de nuevo entradas interactivas de macrocomandos.

Si bien se pueden combinar tanto cargas proporcionales como generales, se debe poner extrema precaución para que todos los valores nodales sean multiplicados por el valor correspondiente de $p(t)$.

El valor del incremento de tiempo puede cambiarse repitiendo el paso 2 y haciendo entonces los pasos 4 a 8 para el nuevo incremento. Si se necesita un gran número de pasos de tiempo de diferente tamaño este procedimiento será ineficaz, y el programa tiene una opción para especificar un nuevo valor de Δt como dato. El macroprograma debe entonces modificarse

reemplazando el paso 4 por

LOOP,time,20
DATA,DT
TIME

Para cada paso de tiempo el macrocomando DT es introducido como dato. Para cálculos interactivos el usuario introduce

DT,,*dt*

donde *dt* es el tamaño del paso de tiempo que debe usarse. En ejecuciones en cola estos comandos siguen al comando END, que finaliza el macroprograma. Si se introducen otros datos (por ejemplo, el par de datos FORCE-END), entonces los comandos de datos deben estar en el orden requerido por los comandos del macroprograma.

En este caso se puede utilizar una macroinstrucción DATA para poner la tolerancia de la solución. La forma sería

DATA,TOL

y el usuario introduciría un comando

TOL,,1.E-10

para poner la tolerancia de convergencia de la solución en 10^{-10}.

16.6.2 *Opción de rearranque.* En problemas transitorios se recomienda la terminación periódica del proceso de solución para almacenar un archivo de rearranque. Se puede reejecutar el programa utilizando nombres apropiados para los archivos deseados de lectura de rearranque (véase la sección anterior sobre rearranque) y dando, entonces, los macromandos

BETA,SS11,0.5
MASS
RESTart

Si no se especifican los macrocomandos BETA y MASS se producirá normalmente un error, ya que el programa no leerá todos los datos necesarios para la solución transitoria de la información de rearranque. Una excepción a esto es cuando los datos del archivo de rearranque se generan utilizando un algoritmo que no contenía el macrocomando BETA. En este caso se puede hacer un rearranque y cambiar el algoritmo a un algoritmo transitorio dando los comandos de la forma

RESTart

BETA,SS11,0.5
MASS
etc.

Después de que se inicia un algoritmo transitorio, sólo se puede volver a un algoritmo no transitorio utilizando el modo de rearranque. Cuando se hace un rearranque el tiempo t se pone al valor existente cuando se escribía el archivo de rearranque. Las tablas de carga deben redefinirse mediante el macrocomando apropiado. Además, la carga se hará igual a los valores correspondientes del archivo de entrada de malla actual. El usuario puede especificar ahora cualesquiera de los nuevos macrocomandos y continuar con el análisis.

16.6.3 *Solución de sistemas de segundo orden.* Por razones de sencillez no se ha incluido la matriz de amortiguamiento, $\mathbf{C}$, de (10.1) en ninguno de los elementos contenidos en este capítulo. Sin embargo, se resumen los pasos necesarios para incluir tales efectos al final de esta sección. Por tanto, consideremos la ecuación diferencial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{16.23}$$

para problemas lineales y

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{P}(\mathbf{a}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{16.24}$$

para problemas no lineales.

Solución utilizando el algoritmo SS22. Si se introduce el algoritmo SS22 descrito en el Capitulo 10, se tiene para cada tiempo t_{n+1} el problema discreto dado por (10.45) (particularizado para $\mathbf{C}$ nula)

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \frac{1}{2}\theta_2 \Delta t^2 \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) + \bar{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{16.25}$$

con

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \theta_1 \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n \tag{16.26}$$
$$\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n \tag{16.27}$$

y

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \tag{16.28}$$
$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t^2 \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \tag{16.29}$$

El programa también considera una aproximación de un solo paso a (16.25) para problemas no lineales que se expresa de la forma

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \frac{1}{2}\theta_2 \Delta t^2 \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) + \bar{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{16.30}$$

La solución al problema lineal o no lineal se puede expresar de la forma

$$(\mathbf{M} + \frac{1}{2}\theta_2 \Delta t^2 \mathbf{K}_T^{(i)})\delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} = -\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}) \tag{16.31}$$

con

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i+1)} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} + \eta\delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} \tag{16.32}$$

y a partir de aquí el proceso de solución es idéntico al correspondiente a SS11, excepto que ahora MASS forma la matriz de masa diagonal **M**, y el procedimiento de solución para SS22 se llama utilizando

BETA,SS22,0.5,0.5

donde los valores numéricos son los correspondientes a θ_1 y θ_2, respectivamente.

Solución utilizando el algoritmo GN22. También puede seleccionarse el algoritmo GN22, y a partir de (10.55) y (10.56) se tiene para un problema lineal

$$\boldsymbol{\Psi}(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \beta\Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}_{n+1}) + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{16.33}$$

o, para un problema no lineal,

$$\boldsymbol{\Psi}(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \beta\Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}_{n+1}) + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{16.34}$$

donde

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t\dot{\mathbf{a}}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \tag{16.35}$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{a}}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t\ddot{\mathbf{a}}_n \tag{16.36}$$

$$\tilde{\ddot{\mathbf{a}}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{a}}_n \tag{16.37}$$

y

$$\mathbf{a}_{n+1} = \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \beta\Delta t^2(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{a}}_n) \tag{16.38}$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \tilde{\dot{\mathbf{a}}}_{n+1} + \gamma\Delta t(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{a}}_n) \tag{16.39}$$

En lo anterior se han introducido los parámetros estándar de Newmark; sin embargo, éstos están relacionados de manera sencilla con los valores dados en el Capítulo 10 por las expresiones

$$\gamma = \beta_1 \tag{16.40}$$

y

$$\beta = 2\beta_2 \tag{16.41}$$

La solución mediante el algoritmo GN22 se puede expresar de la forma

$$(\mathbf{M} + \beta\Delta t^2 \mathbf{K}_T^{(i)})\delta\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}^{(i)} = -\boldsymbol{\Psi}(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}^{(i)}) \tag{16.42}$$

con

$$\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}^{(i+1)} = \ddot{\mathbf{a}}_{n+1}^{(i)} + \eta\delta\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}^{(i)} \tag{16.43}$$

De nuevo, el algoritmo de solución es idéntico a los pasos para SS11 ó SS22, excepto que ahora se inicia utilizando el macrocomando

BETA,GN22,0.5,0.5

donde los dos valores numéricos son los correspondientes a β y γ, respectivamente (por defecto los valores son $\beta = 0.25$ y $\gamma = 0.5$). Alternativamente, se puede usar el comando

BETA

para utilizar el algoritmo GN22 con los valores por defecto.

Como se dijo en el Capítulo 10, el algoritmo GN22 precisa la solución de (16.33) o (16.34) para definir la aceleración inicial. Una excepción a lo anterior es cuando la solución corresponde a un valor cero de $\mathbf{a}_0$. Para determinar la solución inicial, deben asignarse todos los valores de carga y utilizar el macrocomando

FORM,ACCEleration

para calcular el valor correcto de $\ddot{\mathbf{a}}_0$.

Adición de efectos de amortiguamiento. Se puede añadir una matriz de amortiguamiento incluyendo en cada rutina elemental los términos apropiados. De esta forma, cuando se calcula el residuo (ver Capítulo 15 del Volumen 1), con ISW=3 o ISW=6, se debe añadir el término

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_{n+1} \tag{16.44}$$

a la ecuación de equilibrio de cada elemento. El valor de $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$, localizado para cada elemento y ajustado para cada algoritmo, se pasa como parte del vector UL (ver Capítulo 15 del Volumen 1 para la descripción de los nombres de la variables). El vector UL puede suponerse como dimensionado a

UL(NDF,NEN,IT)

donde NDF es el número de incógnitas en cada nodo, NEN es el máximo número de nodos por elemento y IT denota las cantidades indicadas en

la Tabla 16.2. Utilizando estos valores y la definición de **C**, se pueden calcular los términos apropiados y añadirlos al vector de residuo elemental **P**. De forma similar, se pueden añadir los términos apropiados a la rigidez tangente del elemento **S** para ISW=3.

TABLA 16.2
VALORES EN EL VECTOR UL *PARA ALGORITMOS TRANSITORIOS*

IT valor	Algoritmo		
	S11	SS22	GN22
1	$\tilde{\mathbf{a}} + \theta\Delta t\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$	$\mathbf{a} + \frac{1}{2}\theta_2\Delta t^2\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$	$\tilde{\mathbf{a}}^{(i)}$
2	$\theta\Delta t\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$	$\frac{1}{2}\theta_2\Delta t^2\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$	$\mathbf{a}^{(i)} - \mathbf{a}^{(0)}$
3	$\theta\Delta t\delta\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$	$\frac{1}{2}\theta_2\Delta t^2\delta\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$	$\mathbf{a}^{(i)} - \mathbf{a}^{(i-1)}$
4	—	$\dot{\tilde{\mathbf{a}}} + \theta_1\Delta t\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$	$\dot{\mathbf{a}}^{(i)}$

16.7 Solución de valores propios

La solución de un problema general lineal de valores propios es una característica útil incluida en el programa contenido en este capítulo. El programa puede calcular un conjunto de los valores propios reales más pequeños (en valor absoluto) y sus vectores propios asociados para el problema

$$\mathbf{K}_T\mathbf{V} = \mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda} \tag{16.45}$$

En lo anterior, $\mathbf{K}_T$ es cualquier matriz tangente simétrica que haya sido calculada utilizando el macrocomando TANG; **M** es una matriz de masa diagonal o identidad calculada utilizando los macrocomandos MASS o IDEN, respectivamente; las columnas de **V** son el conjunto de autovectores calculado; y $\boldsymbol{\Lambda}$ es una matriz diagonal que contiene el conjunto de autovalores calculados. Para ecuaciones de segundo orden los autovalores λ son las frecuencias al cuadrado, ω^2. En consecuencia, el programa calcula y escribe la raíz cuadrada de λ. Puesto que pueden aparecer valores negativos de λ se calcula la raíz cuadrada de los valores absolutos. Para λ negativos los valores que se escriben son, de hecho, números imaginarios puros.

La matriz tangente a menudo tiene valores propios nulos y, en este caso, el algoritmo utilizado necesita que el problema sea transformado a

$$(\mathbf{K}_T - \alpha\mathbf{M})\mathbf{V} = \mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}_\alpha \tag{16.46}$$

donde α es un parámetro llamado *traslación*, que debe ser seleccionado para hacer que la matriz de coeficientes del lado izquierdo de (16.46) sea

no singular. $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$ son los valores propios correspondientes a esta traslación, que están relacionados con los valores deseados mediante la expresión

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_\alpha + \alpha\mathbf{I} \tag{16.47}$$

La traslación puede utilizarse también para calcular los pares de valores y vectores propios más próximos a un valor especificado. Las componentes de $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$ se imprimen como parte de la solución del problema de autovalores. Además, los vectores pueden imprimirse como valores numéricos o dibujarse por pantalla.

El programa utiliza un algoritmo de solución de subespacio[3,4] para resolver un problema de autovalores general de pequeño tamaño que se define de la forma

$$\mathbf{K}^*\mathbf{x} = \mathbf{M}^*\mathbf{x}\boldsymbol{\lambda} \tag{16.48}$$

donde

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}\mathbf{x} \tag{16.49}$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{Q}^T\mathbf{M}^T(\mathbf{K}_T - \alpha\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q} \tag{16.50}$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q} \tag{16.51}$$

En consecuencia, después de la proyección, los $\boldsymbol{\lambda}$ son los recíprocos de $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$ (esto es, $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha^{-1}$). Se puede usar la solución del problema de autovalores de pequeño tamaño para generar una secuencia iterativa para **Q**, que converge a la solución del problema original (véase, por ejemplo, la referencia [4]). La solución del problema general proyectado de pequeño tamaño se realiza aquí utilizando una transformación a un problema de autovalores lineal estándar combinado con un algoritmo QL.[7,8]

La transformación se lleva a cabo calculando los factores de Choleski de $\mathbf{M}^*$ para definir el problema de autovalores lineal estándar

$$\mathbf{H}\mathbf{y} = \mathbf{y}\boldsymbol{\lambda} \tag{16.52}$$

donde

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \tag{16.53}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}^T\mathbf{x} \tag{16.54}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}^*\mathbf{L}^{-T} \tag{16.55}$$

En la implementación que aquí se describe se introduce el escalado, que hace que $\mathbf{M}^*$ converga a una matriz identidad; por tanto, la transformación anterior es numéricamente estable. Además, el uso de la solución de un problema de autovalores estándar permite el cálculo de tanto valores propios positivos como negativos. El algoritmo de subespacio implementado proporciona un medio para calcular unos cuantos pares de autovalores

y autovectores en problemas con muchos grados de libertad o todos los pares para problemas de pequeño tamaño. Los algoritmos de subespacio se basan en un método de potencias para calcular los autovalores dominantes. Por tanto, la eficacia de la estrategia de solución depende de la relación entre los valores absolutos del autovalor más grande buscado en el subespacio con respecto al primer autovalor no contenido en el subespacio. Esta relación puede reducirse añadiendo vectores adicionales al subespacio; esto es, si se buscan p pares, se toma el subespacio como q vectores, de forma que

$$\left| \frac{\lambda_p}{\lambda_{q+1}} \right| < 1 \tag{16.56}$$

Naturalmente, la magnitud de esta relación es desconocida antes de que se resuelva el problema y debe hacerse algún análisis para estimar su valor. El programa rastrea la magnitud de los valores propios recíprocos trasladados Λ y calcula el cambio en los valores en las sucesivas iteraciones. Si el subespacio es demasiado pequeño, la convergencia es extremadamente lenta, debido a que (16.56) tiene un cociente próximo a la unidad. Puede ser que se haya de incrementar el tamaño del subespacio para aumentar la velocidad de convergencia. En algunos problemas, pueden conocerse algunas características sobre los tamaños de los autovalores para ayudar en el proceso. Debe notarse especialmente que cuando p se especifica como el número total de grados de libertad del problema (o q llega a este valor), entonces λ_{q+1} es infinitamente mayor y la relación dada por (16.56) es nula. En este caso la iteración en el subespacio converge en una sola iteración, una situación que es advertida por el programa para limitar las iteraciones a una. En consecuencia, a menudo es más eficaź calcular todos los pares de autovalores si q es muy próximo al número de grados de libertad.

El uso del algoritmo del subespacio precisa los siguientes pasos:

1. Calcular $\mathbf{M}$.
2. Calcular la matriz tangente $\mathbf{K}_T$ y aplicar la traslación α si es necesario.
3. Calcular los pares de autovalores y autovectores.
4. Imprimir los resultados.

Los macrocomandos para conseguir este algoritmo son:

1. MASS(o IDEN)
2. TANG,,,α
3. SUBS,<PRINt>,p, q
4. EIGV,,
   PLOT,EIGV, f

Nótese la especificación del valor de traslación α como parte del macrocomando TANG. Este macrocomando calcula tanto la matriz como sus factores triangulares; en consecuencia, la masa debe estar disponible antes de usar este comando. El valor para q es opcional y, si se omite, es calculado por el programa de la forma

$$q = \min(NM, NEQ, 2^{*}\text{p}, \text{p} + 8)$$

Donde NM es el número de términos no nulos en la matriz de masa diagonal y NEQ es el número de grados de libertad del problema (esto es, aquellos no restringidos por las condiciones de contorno especificadas utilizando BOUN).

El dibujo de los vectores propios puede necesitar ampliación o disminución por un factor f para permitir una adecuada representación. Pueden dibujarse todos los vectores propios, pero primero es necesario imprimirlos utilizando la instrucción de impresión EIGV.

Resolver el problema de valores propios para elementos individuales es un procedimiento habitual utilizado para evaluar su funcionamiento. Es entonces necesario describir una malla sin restricciones en los grados de libertad (esto es, no debe utilizarse BOUN en los datos de la malla). El elemento normalmente tiene valores propios nulos; por tanto, debe utilizarse una traslación para hacer el análisis. Si no se utiliza ésta se obtendrán errores en los factores triangulares de $\mathbf{K}_T$ (el programa detectará que la matriz es casi singular e imprimirá un aviso) y generalmente todos, o gran parte de los valores propios, quedarán reducidos a un subespacio singular. Estos tipos de errores pueden también ocurrir si el desplazamiento que se especifica es muy próximo a un autovalor. El usuario debe controlar las salidas durante los comandos TANG y SUBS para detectar un funcionamiento deficiente. Si todos o gran parte de los valores propios están extremadamente cercanos a la traslación, debe probarse con una segunda traslación. En general, debe seleccionarse una traslación a medio camino entre los valores calculados. El programa también calcula el número de valores propios que son menores que la traslación. Esto puede ser útil para asegurarse que ésta no es demasiado grande para determinar los autovalores deseados. Recordemos que sólo son calculados los p valores más próximos en valor absoluto a la traslación.

Cuando se utiliza de forma adecuada, el método de subespacio puede producir valores precisos y fiables para los pares de valores y vectores propios de un problema de elementos finitos. Se puede utilizar el método para calcular los modos de vibracion de sistemas estructurales y está programado de forma que pueda ser usado tanto para modelos de elementos finitos lineales como no lineales. En problemas no lineales esto permite averiguar la dependencia de la frecuencia con la carga. En consecuencia, se puede calcular una carga dinámica de pandeo como una frecuencia que

tiende a cero. En modelos no lineales se puede también calcular la carga estática de pandeo resolviendo el problema de autovalores

$$\mathbf{K}_T\mathbf{V} = \mathbf{IV\Lambda} \tag{16.57}$$

para un conjunto de cargas y controlando cómo se acerca a cero el más pequeño de los valores propios. La carga de pandeo corresponde a un autovalor nulo en (16.57). A medida que nos acerquemos a la carga de pandeo puede ser necesario introducir una traslación para mantener una alta precisión; sin embargo, esto normalmente no es necesario ya que el subespacio colapsado es la solución deseada.

16.8 Descripción de los elementos

Las extensiones del programa descritas en este volumen incluyen cuatro elementos que son capaces de analizar problemas lineales y no lineales. Cada uno de los elementos tiene una matriz de rigidez tangente linealizada consistentemente que, cuando se usa con un método de solución de Newton, permite conseguir una velocidad asintótica de convergencia cuadrática, tal como se describió en el Capítulo 7 y la Sección 16.4. Además, los elementos son capaces de utilizar los algoritmos de integración en el tiempo discutidos en la Sección 16.6. Los cuatro elementos que se incluyen son:

- ELMT01 Un elemento de lámina axisimétrico que puede utilizarse también como un modelo de viga con sección recta rectangular.
- ELMT02 Un elemento plano con deformación plana/axisimétrica con comportamiento constitutivo elástico–plástico.
- ELMT03 Un elemento de ecuación de Laplace con carga reactiva para modelos planos y axisiméticos.
- ELMT04 Un elemento general de barra con comportamiento constitutivo elastoplástico.

Puede utilizarse cada uno de estos elementos para ilustrar algo de la teoría presentada en los capítulos anteriores. Se da a continuación una breve descripción de cada elemento y de los datos de entrada necesarios para especificar el material y otros parámetros. Los parámetros NDM, NDF y NEN especifican la dimensión espacial del problema, el número de grados de libertad por nodo y el número de nodos por elemento, respectivamente. La información de control (que sigue al record FEAP) debe contener el máximo de éstos para todos los elementos incluidos en el problema. En la próxima sección se utilizan los elementos para resolver los problemas presentados en la Sección 16.3.

16.8.1 *ELMT01: Elemento de lámina axisimétrica. (viga)* Este elemento se basa en la teoría presentada en la Sección 4.7. Se ha incluido una extensión que permite el comportamiento geométricamente no lineal de forma limitada, añadiendo un término a la deformación meridional dada en (4.34) para obtener

$$\varepsilon_s = \frac{du}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{ds}\right)^2$$

Se supone que el material es elástico lineal. La extensión anterior fue propuesta originalmente por Wagner (véanse, por ejemplo, las referencias [9] y [10]). A pesar de su sencillez, el elemento funciona muy bien en un amplio rango de aplicaciones. Este elemento precisa que los parámtros del problema sean

$$NDM = 2 \qquad NDF = 3 \qquad \text{y} \qquad NEN = 2$$

Los datos para especificar los parámetros del material se dan en la Tabla 16.3. El listado de los subprogramas para el elemento de viga/lámina axisimétrica se dan en el archivo PCELM1.FOR de la Sección 16.10.7(a).

TABLA 16.3
ESPECIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE MATERIAL PARA ELMT01

Record de Propiedades 1.) FORMAT—A5		
Columna	*Descripción*	*Variable*
1 a 5	BEAM O SHELL (alfanumérico)	typ
Record de Propiedades 2.) FORMAT—6F10.0		
Columna	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	E, Módulo de elasticidad de Young	d(1)
11 a 20	ν, coeficiente de Poisson	d(2)
21 a 30	t, espesor	d(3)
31 a 40	p, presión uniforme en cada elemento	d(4)
41 a 50	Indicador lineal para la deformación ε_s 0 = lineal, 1 = no lineal	d(5)
51 a 60	ρ, densidad, masa por unidad de volumen	d(6)

16.8.2 *ELMT02: Elemento deformación plana/axisimétrica con modelo material elastoplástico.* Este elemento es idéntico al presentado en el Volumen 1 (ELMT02 en el archivo PCELM2.FOR) excepto en que el

modelo material ha sido reemplazado por una relación elastoplástica de Prandl-Reuss con endurecimiento isótropo y cinemático. Los tensores de tensión y deformación están divididos en sus partes desviadoras y medias. La ecuación constitutiva que relaciona presión con cambio volumétrico se supone elástica lineal. La parte desviadora es elastoplástica y la fluencia se expresa a través de una función de von Mises. Las ecuaciones se integran usando el algoritmo de retorno radial discutido en el Capítulo 7. Las ecuaciones discretas resultantes para la parte desviadora vienen dadas por

$$\mathbf{s}_n = 2G(\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_n^p)$$

donde $\mathbf{s}_n$ es la tensión desviadora, $\mathbf{e}_n$ la deformación desviadora, $\mathbf{e}_n^p$ la deformación plástica efectiva, todos en el tiempo t_n, y G es el módulo elástico de cizalladura. La deformación plástica es desviadora y se calcula mediante un esquema de integración de Euler hacia atrás aplicado a las ecuaciones incrementales definidas en el Capítulo 7. Para el modelo constitutivo incluido en el programa, el resultado es

$$\mathbf{e}_n^p = \mathbf{e}_{n-1}^p + \Delta\lambda_n \left.\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}\right|_n$$

donde F es la función de fluencia y $\Delta\lambda_n$ es el parámetro discreto de consistencia plástica. El comportamiento de fluencia del material se expresa como una función de von Mises donde

$$F(\mathbf{s}_n, \boldsymbol{\alpha}_n, e^p) = |\mathbf{s}_n - \boldsymbol{\alpha}_n| - R_n(e^p) \leq 0$$

donde

$$R_n(e^p) = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} (Y_0 + H_i e_n^p)$$

donde Y_0 define la tensión uniaxial inicial de fluencia en tensión/compresión simple, e_n^p es la deformación plástica efectiva utilizada para definir el endurecimiento isótropo, H_i un parámetro de endurecimiento isótropo lineal y $\boldsymbol{\alpha}_n$ la "tensión de referencia" introducida para dar endurecimiento cinemático. Finalmente

$$|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}| = [(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})^T(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})]^{1/2}$$

La deformación plástica efectiva se calcula de forma incremental a partir de

$$e_n^p = e_{n-1}^p + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \Delta\lambda_n$$

y la tensión de referencia se calcula a partir de

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \frac{2}{3} H_k(\mathbf{e}_n^p - \mathbf{e}_{n-1}^p)$$

donde H_k es un parámetro de endurecimiento cinemático.

El algoritmo de retorno se obtiene resolviendo el conjunto anterior de ecuaciones para un estado dado de deformación sujeto a

$$\mathbf{s}_n^{TR} = 2G(\mathbf{e}_n^p - \mathbf{e}_{n-1}^p)$$

y

$$\Delta\lambda_n^{TR} = 0$$

Las cantidades con el supraíndice TR se llaman valores de prueba. Si los valores de prueba producen un estado dentro de la función de fluencia, el paso es *elástico* y estos valores definen el estado correcto actual de la función; sin embargo, si los valores de prueba violan la condición de fluencia, se calcula una solución *plástica* utilizando los valores de prueba como condiciones iniciales para resolver las ecuaciones constitutivas discretas. El proceso de solución del problema anterior es muy sencillo y da un problema lineal para calcular $\Delta\lambda_n$ a partir de

$$|\mathbf{s}_n^{TR} - \boldsymbol{\alpha}_{n-1}| - R_{n-1} = 2[G + \frac{1}{3}(H_i - H_k)]\Delta\lambda_n$$

Una vez que se conoce $\Delta\lambda_n$, la parte restante de la solución se calcula fácilmente utilizando las expresiones anteriores. En el Capítulo 7 y en la referencia [11] se pueden encontrar detalles adicionales para construir la solución a este problema y la matriz tangente consistente para calcular el siguiente paso de la solución.

El módulo elemental ELMT02 está limitado a una formulación isoparamétrica de cuatro nodos, utilizando una matriz B-barra para evitar "bloqueo" en las situaciones casi incompresibles, una condición que ocurre para deformaciones plásticas importantes (comparadas con las elásticas) y también para coeficientes de Poisson elevados. Véanse las Secciones 12.5.2 y 15.8.6(b) del Volumen 1 para información adicional sobre la formulación. Este elemento precisa que los parámetros del problema sean

$$NDM = 2 \qquad NDF = 3 \qquad \text{y} \qquad NEN = 2$$

y las propiedades materiales sean especificadas como en la Tabla 16.4. El listado de los subprogramas para el modelo del material se dan en el archivo PCELM2.FOR en la Sección 16.6.7(b).

16.8.3 *ELMT03: Ecuación de Laplace plana/axisimétrica.* Este elemento es un elemento isoparamétrico de tres a nueve nodos que puede usarse para modelizar problemas de ecuación de Laplace; por ejemplo, la ecuación transitoria de transmisión del calor descrita en el Capítulo 10. Las ecuaciones diferenciales generales que pueden considerarse para utilizar este elemento toman la forma:

TABLA 16.4
ESPECIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS MATERIALES ELMT02

Record de Propiedades 1.) FORMATO–I10,F10.0

Columna	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	Tipo de problema (0 = plano, 1 = axisimétrico)	it
11 a 20	ρ, densidad, masa por unidad de volumen	d(4)

Record de Propiedades 2.) FORMATO-5F10.0

Columna	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	E, módulo de elasticidad de Young	ee
11 a 20	ν, coeficiente de Poisson	xnu
21 a 30	Y_0, tensión inicial de fluencia	d(11)
31 a 40	H_i, módulo de endurecimiento isótropo	d(12)
41 a 50	H_k, módulo de endurecimiento cinemático	d(13)

$$\nabla(K\nabla T) + Q(T) = 0 \qquad (16.58)$$

para aplicaciones en régimen permanente,

$$\nabla(K\nabla T) + Q(T) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (16.59)$$

para procesos transitorios de difusión, o

$$\nabla(K\nabla T) + Q(T) = \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \qquad (16.60)$$

para procesos de propagación de ondas o vibración. La diferencia entre (16.59) y (16.60) depende sólo del proceso utilizado para integrar en el tiempo y resolver el problema transitorio. Si se especifica el procedimiento de integración SS11 se supone una solución de la Ec. (16.59), mientras que si se especifica un método SS22 o GN22 se resuelve la Ec. (16.60). En las ecuaciones los parámetros son tal como se definieron en la Sección 10.6.4. En particular, el programa incluye un término de generación de calor dependiente de la temperatura, T, dado por

$$Q = \delta e^{rT^n}$$

Esta representación de Q permite el análisis en estado estacionario ($\rho c = 0$) y problemas transitorios para una gama bastante amplia de tipos de

generación de calor. Si se especifica r como nulo se tiene generación constante de calor de magnitud δ. Si se especifica n como -1 se tiene la ecuación transitoria de transmisión del calor para un reactivo sólido con cinética de orden cero, mientras que $n = 1$ da generación del calor del tipo considerado en una aproximación Frank–Kamenetskii.[12] Para el caso $n = -1$, la forma de la fuente de calor se modifica ligeramente para un tratamiento numéricamente más estable del problema de combustión espontánea. La forma usada es[12]

$$Q = \bar{\delta}^{r(1-T_a/T)}$$

donde T_a es la temperatura ambiente especificada y $\bar{\delta}$ es un coeficiente modificado. Si n es positivo o cero se utiliza la primera forma de especificar Q y el valor de T_a es ignorado.

Los parámetros para ELMT03 son

$$NDM = 2 \qquad NDF = 1 \qquad \text{y} \qquad NEL = 4 \;\text{ a }\; 9$$

y la descripción material se introduce como se indica en la Tabla 16.5. El listado de los subprogramas del elemento se da en el archivo PCELM3.FOR en la Sección 16.10.7(c).

TABLA 16.5
ESPECIFICACIÓN DE PARÁMETROS MATERIALES PARA ELMT03

Columna	*Descripción*	*Variable*
11 a 20	c, calor específico	d(2)
21 a 30	ρ, densidad de masa	d(3)
31 a 40	δ, factor de generación del calor	d(4)
41 a 50	r, factor de generación del calor	d(5)
51 a 60	T_a, temperatura ambiente	d(6)
61 a 70	n, potencia de la temperatura	d(7)
71 a 80	Geometría: 1 = plana, 2 = axisimétrica	kat

16.8.4 *ELMT04: Modelo de barra elastoplástica.* Este elemento es casi idéntico al elemento presentado en el Volumen 1 (también como ELMT04 en el archivo PCELM4.FOR), excepto en que el modelo material ha sido reemplazado por una sencilla relación unidimensional elastoplástica con endurecimiento isótropo y cinemático. Las ecuaciones se integran utilizando el algoritmo de retorno radial discutido en el Capítulo 7. El elemento tiene dos nodos y utiliza interpolación lineal. Por tanto, después

de la fluencia todo el elemento se convierte en plástico. En aplicaciones estáticas sin endurecimiento el sistema puede hacerse singular cuando un número suficiente de elementos entra en comportamiento plástico; en consecuencia, se recomienda utilizar algo de endurecimiento para este tipo de problemas. Véase la Sección 15.8.6(*d*) en el Volumen 1 para más información sobre el elemento. Debido al número de cambios introducidos en la rutina elemental se repite en este volumen el listado completo para este elemento. Se ha utilizado un tipo de programación ligeramente diferente que puede compararse con el estilo utilizado en el Volumen 1.

Los datos necesarios para este elemento son

$$NDM = 1, 2 \text{ ó } 3 \qquad NDF = NDM \qquad \text{y} \qquad NEN = 2$$

y los parámetros materiales se especifican de acuerdo con la Tabla 16.6. El listado para los subprogramas del elemento se dan en el archivo PCELM4.FOR en la Sección 16.10.7(*c*).

TABLA 16.6
ESPECIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE MATERIAL PARA ELMT04

Record de Propiedades 1.) FORMATO–6F10.0

Columna	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	E, módulo de elasticidad de Young	d(1)
11 a 20	A, área	d(2)
21 a 30	ρ, densidad de masa	d(3)
31 a 40	Y, tensión inicial de fluencia	d(4)
41 a 50	H_i, módulo de endurecimiento isótropo	d(5)
51 a 60	H_k, módulo de endurecimiento cinemático	d(6)

Los elementos anteriores proporcionan unas capacidades importantes al programa dentro del espacio limitado disponible en este capítulo. Siguiendo los pasos en la programación de cada uno de los elementos, los usuarios deben ser capaces de añadir elementos para sus necesidades específicas. Los requisitos para introducir un elemento en PCFEAP se describen en la Sección 15.5 del Volumen 1. Además de la información contenida allí es necesario describir como debe almacenarse cualquier variable elemental que se necesite para avanzar un problema no lineal de un paso de tiempo al siguiente.

16.8.5 *Variables de historia.* PCFEAP proporciona la capacidad de almacenar un conjunto de variables para cada tipo de elemento como variables de historia. El número de variables para cada elemento debe especificarse en el programa. Esto se consigue durante la entrada de los parámetros materiales (esto es, cuando ISW=1 en cada módulo elemental) incluyendo un bloque COMMON en el módulo, de la forma

COMMON/HDATA/NH1,NH2

y haciendo NH1 igual al número de parámetros utilizados por cada elemento. El programa asigna automáticamente espacio de almacenamiento dentro de la memoria y el disco del ordenador, y realiza todas las entradas y salidas necesarias para hacer que la información esté disponible para cada elemento cuando se necesite. El bloque HDATA se utiliza también para devolver un valor NH1 para cada elemento para describir donde se almacenan los datos de historia en el COMMON. Así, incluyendo un COMMON sin etiquetar en el módulo elemental de la forma

COMMON H(1)

la primera palabra de las variables de historia del elemento actual se pueden recuperar en H(NH1) y los otros parámetros siguen a continuación hasta el número especificado cuando ISW=1. La información vuelve al programa en las mismas posiciones. En general, el usuario puede pensar que esta información es obtenida para el tiempo t_n, y retornada como valores para el tiempo t_{n+1}. El programa almacena los valores en disco cuando se da el macrocomando TIME. De esta forma, se incluye automáticamente la posibilidad de hacer integraciones de un paso para ecuaciones elementales en forma diferencial. Se pueden acomodar algoritmos multipaso reteniendo datos para cada uno de los niveles necesarios como parte de los datos de historia reasignando las posiciones durante el retorno de la información en el vector H.

16.9 Solución de problemas de ejemplo

En esta sección se presentan algunos análisis realizados utilizando el programa PCFEAP. Los resultados se presentan generalmente en tablas y reproducen los resultados numéricos obtenidos utilizando el programa. Se incluye también una breve descripción del programa de macrosolución para ayudar a los usuarios a conseguir una cierta familiaridad con las opciones disponibles en el programa. El primer paso para usar PCFEAP para resolver un problema de elementos finitos es crear un archivo con los datos de la malla. Resulta útil especificar el archivo de disco con un nombre que comience con I (por ejemplo, IBEAM para un archivo de

datos para una viga). Entonces, el programa da automáticamente nombres por defecto a los archivos de salida y de rearranque, sustituyendo la I por O, R o S (por ejemplo, OBEAM para salida, RBEAM para lecturas de rearranque y SBEAM para almacenamiento de rearranque). Una vez que se dispone de los datos en el archivo de entrada puede arrancarse el programa entrando en el teclado el nombre del programa. En lo que sigue, se supone que el programa ejecutable se llama PCFEAP; por lo tanto, tecleando este nombre se inicia una ejecución del programa. Durante la primera ejecución del programa el usuario es preguntado acerca de los datos necesarios para instalar el programa. Esta información se almacena en un archivo llamado FEAP.NMA; por lo tanto, si se debe cambiar cualquiera de los parámetros de instalación, es necesario borrar primero este archivo y entonces reejecutar el programa. El programa sugiere valores por defecto para los parámetros de entrada y éstos pueden ser aceptados presionando la tecla de ENTER o <CR>. El programa siempre pide nombres para los archivos de entrada/salida y rearranque. Durante la primera ejecución, debe darse un nombre para el archivo de entrada de datos. Se dan entonces los nombres por defecto para los archivos de salida y de rearranque y éstos pueden ser aceptados tecleando la tecla ENTER o <CR>, o pueden ser reemplazados especificando el nombre que quiere usarse para el archivo. En las siguientes ejecuciones del programa, los parámetros de instalación y los nombres de los archivos de la última ejecución se usan como valores por defecto. Una vez que la información es especificada el usuario puede usar los nombres asignados introduciendo I, repetir la especificación de archivos tecleando N o para la ejecución tecleando S (los comandos pueden darse tanto en letras mayúsculas como minúsculas). Una vez que se ha tecleado una Y, el programa continúa introduciendo los datos contenidos en el archivo de entrada hasta que se encuentra, bien un comando de ejecución INTEractive o un STOP. Si el archivo contiene un comando de ejecución MACRo, entonces la solución se realiza en modo de cola y no se necesita interacción con el usuario. Por otro lado, si se pide un modo de ejecución interactiva, el usuario puede introducir todos los pasos de la solución desde el teclado. Las entradas se hacen siempre que aparezca en pantalla la línea

Time=09:45:33 Macro 1 > _

donde el número que sigue a 'Time=' es el tiempo de reloj para el ordenador y _ indica el cursor del ordenador. Pueden entonces introducirse los comandos de macrosolución como se describió en la Tabla 15.16 del Volumen 1 o la Tabla 16.1 de este capítulo. Por ejemplo, al entrar el comando

TANG,,1

se lleva a cabo un paso completo de solución. A continuación se dan algunos ejemplos de soluciones a problemas utilizando los datos dados en la Sección 16.3.

16.9.1 *Análisis de un viga recta.* El modelo de viga recta descrito por los datos de entrada de la Sección 16.3.1 se analiza para carga estática y dinámica. Primero, se realiza un análisis estático bajo carga puntual centrada (una fuerza en el nodo 11 del modelo). Este análisis puede realizarse especificando el macrocomando

TANG,,1

que hace que el programa calcule la matriz de rigidez, el residuo y la solución para el conjunto de ecuaciones nodales (véase Tabla 16.1). Una vez que se entra el comando, el programa realiza estos pasos, y, al terminar, imprime por pantalla los valores de la norma residual, la energía (trabajo) en el paso y algunos valores máximos y mínimos de la matriz diagonal del paso de descomposicción triangular. Los usuarios deberían observar estos valores. Puede ser preocupante si la relación de los valores de la diagonal en el paso de descomposición es cercano al nivel de precisión de la máquina (que para cálculos en doble precisión es alrededor de 10^{16}). Valores cercanos al nivel de precisión indican posibles errores en la modelización. Factores que influyen en esta relación son: las restricciones de las condiciones de contorno (puede existir un modo de sólido rígido o mecanismo); grandes variaciones en las propiedades materiales; grandes variaciones en la longitud de los elementos de viga, tamaño de los elementos o una mala relación de dimensiones en los elementos. Puesto que el problema en cuestión es lineal, una segunda especificación del comando TANG no debería cambiar la solución. Por tanto, para problemas lineales bien planteados la norma del residuo siempre debería ser un *cero numérico* si se hiciera una segunda iteración. La norma de energía en esta iteración también debería ser cero. Para problemas mal condicionados puede aparecer algún residuo o energía no nulos.

Una vez que se ha completado la solución estática, se pueden imprimir los resultados. Esto puede conseguirse dando los siguientes macrocomandos:

DISP,ALL
STREss,ALL

Los resultados aparecerán en la pantalla después de que se introduzca cada comando. Estos resultados también se escriben en el archivo de salida y se almacenan en el disco. Los resultados pueden ser revisados después del análisis estudiando el archivo de salida. Si el usuario desea introducir

ambos comandos antes de que aparezca la salida por pantalla puede utilizar un par LOOP-NEXT, esto es, dar los comandos

```
LOOP
DISP,ALL
STREss,ALL
NEXT
```

Los resultados para el análisis estático con carga central en la viga se incluyen en las Tablas 16.7 y 16.8. Los resultados para los nodos 13 a 21 no se muestran en la Tabla 16.7; sin embargo, son los mismos que para los nodos 9 a 1, respectivamente, excepto por el signo del giro (tercer desplazamiento). De forma similar, no se dan en la Tabla 16.8 los momentos y cortantes en los elementos 12 a 20, pero pueden obtenerse de los resultados de los elementos 9 a 1, respectivamente, cambiando el signo del cortante.

TABLA 16.7
DESPLAZAMIENTOS ESTÁTICOS DE LA VIGA
CARGA VERTICAL PUNTUAL EN EL CENTRO

Nodo	2 desplazamiento	3 desplazamiento
1	0.000000e+00	-3.750000e+00
2	-1.895625e+00	-3.712500e+00
3	-3.753750e+00	-3.600000e+00
4	-5.536875e+00	-3.412500e+00
5	-7.207500e+00	-3.150000e+00
6	-8.728125e+00	-2.812500e+00
7	-1.006125e+01	-2.400000e+00
8	-1.116938e+01	-1.912500e+00
9	-1.201500e+01	-1.350000e+00
10	-1.256063e+01	-7.125000e−01
11	-1.276875e+01	1.750162e−15
12	-1.256063e+01	7.125000e−01

Después de completar el análisis estático, se puede realizar también un análisis dinámico. Por ejemplo, se puede considerar el análisis transitorio para una retirada súbita de la carga (utilizar un comando MESH y FORC-END para quitar la carga). Puede utilizarse el programa para estimar

TABLA 16.8
MOMENTOS Y CORTANTE PARA LA VIGA ESTÁTICA
CARGA VERTICAL PUNTUAL EN EL CENTRO

Elmt	**MS**	**QS**
1	6.250e−01	-2.500e+00
2	1.875e+00	-2.500e+00
3	3.125e+00	-2.500e+00
4	4.375e+00	-2.500e+00
5	5.625e+00	-2.500e+00
6	6.875e+00	-2.500e+00
7	8.125e+00	-2.500e+00
8	9.375e+00	-2.500e+00
9	1.063e+01	-2.500e+00
10	1.188e+01	-2.500e+00
11	1.188e+01	-2.500e+00

el paso de tiempo necesario para el análisis, basándose en la respuesta de los modos asociados con las frecuencias más bajas del problema. En consecuencia, se hace un análisis modal para obtener los tres valores más pequeños. Los valores añadidos (además del comando TANG que se ha dado) para conseguir este paso son

```
MASS
SUBS,,3
```

El "3" del comando SUBS indica al programa que calcule los tres modos más pequeños (nótese que no se ha especificado desplazamiento en el comando TANG, ya que los tres modos más cercanos a cero son los tres modos más bajos). El programa incluye tres vectores adicionales para acelerar la convergencia en el algoritmo de iteración del subespacio utilizado en PCFEAP. Los resultados obtenidos para análisis de autovalores se muestran en la Tabla 16.9. Los autovalores calculados son las raíces cuadradas de las frecuencias; por tanto, para ayudar a los usuarios se calculan también las raíces cuadradas y se imprimen (para este problema) las frecuencias reales. También se indica la precisión de los valores en el proceso iterativo. Debe notarse que los tres valores pedidos se han obtenido con una precisión comparable con la precisión por defecto de programa (10^{-12}), mientras que los vectores extra tienen valores que no han covergido a esta precisión. Se dispone de todos los valores y sus vectores asociados

para impresión y dibujo; sin embargo, debe limitarse el uso de vectores extras ya que, debido a la falta de convergencia, no son necesariamente modos naturales del problema.

TABLA 16.9
FRECUENCIAS PARA LA VIGA RECTA

Solución para valores propios, iteración 9		
0.79132391d−01	0.11784609d+01	0.24661330d+01
0.53609721d+01	0.14876488d+02	0.22185429d+02
Raíz cuadrada de los valores propios		
0.28130480d+00	0.10855694d+01	0.15703926d+01
0.23153773d+01	0.38570050d+01	0.47101410d+01
Residuos		
0.17570920d−16	0.81772151d−16	0.54724929d−13
0.35527975d−09	0.30864848d−04	0.37500592d−02

Pueden usarse las frecuencias para calcular el paso de tiempo. Por ejemplo, si se va a calcular una solución con aproximadamente 16 pasos de tiempo por cada período del tercer modo T_3, el valor Δt debe satisfacer la relación

$$\omega_3 T_3 = \omega_3 16 \Delta t = 2\pi$$

Utilizando esta relación y ω_3 de la Tabla 16.9 se obtiene un valor de Δt de aproximadamente 0.25 unidades de tiempo. Se puede ahora realizar el análisis transitorio dando los siguientes macrocomandos:

```
DT,,025
BETA
FORM,ACCE
LOOP,,50
TIME
TANG,,1
DISP,,11
NEXT
```

Recordemos, de nuevo, que en el modo interactivo **PCFEAP** ejecuta cada comando inmediatamente después de su entrada (excepto los pares LOOP-NEXT). Después de cada comando puede darse alguna información adicional. Por ejemplo, el comando BETA especifica integración de Newmark para las ecuaciones de movimiento y el programa informa al

usuario que se utilizarán los valores por defecto de $\beta = 0.25$ y $\gamma = 0.5$. Si se desea otro tipo de integración (por ejemplo, SS22) u otros parámetros, debe introducirse de nuevo el comando BETA. Nótese el uso del comando FORM,ACCE para calcular las aceleraciones iniciales para el método de Newmark. Este comando no es necesario para el algoritmo SS22 y no cambia la solución transitoria si se especifica. El uso del par LOOP-NEXT indicado realiza 50 pasos de tiempo y almacena sólo el desplazamiento del nodo 11 en el archivo de salida. Las Tablas 16.10 y 16.11 presentan los resultados obtenidos en el nodo 11 para los métodos de integración en el tiempo GN22 (Newmark) y SS22.

TABLA 16.10
DESPLAZAMIENTO VERTICAL DE LA VIGA-TIEMPO
SOLUCIÓN GN22 — $\Delta t = 0.25$

t	$\nu(5., t)$	t	$\nu(5., t)$	t	$\nu(5., t)$
0.00	-1.27687e+01	0.25	-1.26535e+01	0.50	-1.24567e+01
0.75	-1.22291e+01	1.00	-1.19352e+01	1.25	-1.16296e+01
1.50	-1.12774e+01	1.75	-1.09136e+01	2.00	-1.05486e+01
2.25	-1.01621e+01	2.50	-9.73598e+00	2.75	-9.17223e+00
3.00	-8.47580e+00	3.25	-7.71089e+00	3.50	-6.93037e+00
3.75	-6.12728e+00	4.00	-5.25853e+00	4.25	-4.40904e+00
4.50	-3.62202e+00	4.75	-2.86062e+00	5.00	-2.11626e+00
5.25	-1.34278e+00	5.50	-4.84249e−01	5.75	4.51830e−01
6.00	1.37438e+00	6.25	2.28409e+00	6.50	3.24920e+00
6.75	4.19304e+00	7.00	5.05339e+00	7.25	5.81280e+00
7.50	6.47234e+00	7.75	7.11163e+00	8.00	7.74784e+00
8.25	8.38005e+00	8.50	9.01887e+00	8.75	9.62533e+00
9.00	1.02058e+01	9.25	1.08077e+01	9.50	1.13639e+01
9.75	1.17441e+01	10.00	1.19935e+01	10.25	1.21800e+01
10.50	1.22851e+01	10.75	1.23522e+01	11.00	1.23812e+01
11.25	1.23651e+01	11.50	1.23369e+01	11.75	1.23061e+01
12.00	1.22754e+00	12.25	1.21429e+01	12.50	1.18475e+01

Se pueden utilizar los resultados anteriores para verificar la instalación del programa en el ordenador del usuario. También se pueden calcular soluciones utilizando incrementos de tiempo mayores o menores para verificar la precisión de la solución utilizando un modelo de elementos finitos. De hecho, existen muchas otras posibilidades de solución utilizando el ELMT01 para el modelo de elementos finitos BEAM/SHELL. Puesto que el elemento es no lineal el programa puede utilizarse para calcular el

TABLA 16.11
DESPLAZAMIENTO VERTICAL DE LA VIGA—TIEMPO
SOLUCIÓN SS22 — $\Delta t = 0.25$

t	$\nu(5.,t)$	t	$\nu(5.,t)$	t	$\nu(5.,t)$
0.00	-1.27687e+01	0.25	-1.27111e+01	0.50	-1.25551e+01
0.75	-1.23429e+01	1.00	-1.20821e+01	1.25	-1.17824e+01
1.50	-1.14535e+01	1.75	-1.10955e+01	2.00	-1.07311e+01
2.25	-1.03553e+01	2.50	-9.94907e+00	2.75	-9.45411e+00
3.00	-8.82402e+00	3.25	-8.09335e+00	3.50	-7.32063e+00
3.75	-6.52883e+00	4.00	-5.69291e+00	4.25	-4.83378e+00
4.50	-4.01553e+00	4.75	-3.24132e+00	5.00	-2.48844e+00
5.25	-1.72952e+00	5.50	-9.13515e−01	5.75	-1.62090e−02
6.00	9.13107e−01	6.25	1.82924e+00	6.50	2.76665e+00
6.75	3.72112e+00	7.00	4.62322e+00	7.25	5.43309e+00
7.50	6.14257e+00	7.75	6.79199e+00	8.00	7.42974e+00
8.25	8.06395e+00	8.50	8.69946e+00	8.75	9.32210e+00
9.00	9.91557e+00	9.25	1.05068e+01	9.50	1.10858e+01
9.75	1.15540e+01	10.00	1.18688e+01	10.25	1.20867e+01
10.50	1.22326e+01	10.75	1.23187e+01	11.00	1.23667e+01
11.25	1.23732e+01	11.50	1.23510e+01	11.75	1.23215e+01
12.00	1.22908e+01	12.25	1.22091e+01	12.50	1.19952e+01

pandeo de vigas de Euler. Esto puede conseguirse incluyendo en el modelo del elemento los términos no lineales (seleccionar *lin* a 1 para incluir estos términos geométricamente no lineales), cambiar a carga puramente axial, esto es, poner la fuerza axial en el nodo 21 igual a -1.0 (compresión) y quitar la fuerza vertical aplicada en el nodo 11. Entonces, se puede encontrar la primera carga de pandeo incrementando sistemáticamente la carga axial. Un algoritmo para conseguir esto es como sigue:

```
PROP,,1
IDEN
LOOP,load,20
DATA,DT
TIME
LOOP,newton,10
TANG,,1
NEXT,newton
SUBS,,1
NEXT,load
```


Este algoritmo resuelve el problema de autovalores no lineal dado por

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u})\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}$$

donde $\mathbf{u}$ es la solución de la barra cargada axialmente (sin carga lateral la solución de Newton converge en dos iteraciones) y $\mathbf{K}_T$ es la matriz tangente para esta solución. Para la carga de pandeo el valor de $\mathbf{\Lambda}$ se hace cero. Utilizando el comando DATA,DT el programa pregunta al usuario el valor del paso de tiempo; éste se introduce mediante el comando

DT,,Δt

con Δt especificando el valor deseado. Utilizando una carga en rampa (por defecto) la función de carga PROPortional genera soluciones para valores sucesivos de la carga calculada de la forma

$$\mathbf{f}(t) = p(t)\mathbf{f}_0$$

Se pueden especificar, tanto incrementos de tiempo positivos como negativos una vez que la carga está acotada (el autovalor es positivo por debajo de la carga crítica y negativo por encima). Se pueden utilizar otros algoritmos. Sin embargo, el programa actual no proporciona almacenamiento para una matriz global no diagonal en un problema de autovalores lineal general. Ésta es una característica que se sugiere incluyan por su cuenta los estudiantes (y otros usuarios).

16.9.2 *Análisis de un casquete esférico.* Los datos para el modelo de elementos finitos del casquete esférico se presentaron en la Sección 16.3.2. Se analiza este problema bajo carga estática para ilustrar los resultados que se pueden conseguir para un problema axisimétrico de láminas utilizando ELMT01. Los pasos de la solución son simplemente:

```
TANG,,1
DISP,ALL
STRE,ALL
```

y los resultados que se obtienen se incluyen en la Tablas 16.12 y 16.13. La solución para este problema y los resultados utilizando otros elementos se incluyen en la Figura 14.7 de este volumen. La solución utilizando ELMT01 concuerda muy bien con los resultados de esta figura.

16.9.3 *Análisis de ignición espontánea.* La formulación incluida en el programa como ELMT03 permite la solución de problemas que están gobernados por la ecuación diferencial (16.59) descrita en la Seccion 16.8.3. Esta ecuación diferencial, junto con el término de fuente de calor Q existente

en ELMT03, permite el análisis del problema de ignición espontánea para una esfera, tal como se describió en la Sección 10.6.3 y se mostró en la Figura 10.17.

TABLA 16.12
CASQUETE ESFÉRICO: DESPLAZAMIENTOS NODALES u Y v

1	0.000000e+00	0.000000e+00
2	-2.180519e−01	-1.181020e+00
3	-1.027568e+00	-3.461537e+00
4	-1.930318e+00	-6.149003e+00
5	-2.659180e+00	-8.774480e+00
6	-3.107350e+00	-1.106299e+01
7	-3.266646e+00	-1.289060e+01
8	-3.180168e+00	-1.423935e+01
9	-2.909851e+00	-1.515696e+01
10	-2.516794e+00	-1.572456e+01
11	-2.051297e+00	-1.603338e+01
12	-1.549500e+00	-1.616963e+01
13	-1.033944e+00	-1.620599e+01
14	-5.161404e−01	-1.619811e+01
15	0.000000e+00	-1.618896e+01

TABLA 16.13
CASQUETE ESFÉRICO: VALORES DE TENSIÓN ELEMENTALES

Elmt	**NS**	**NPHI**	**MS**	**MPHI**	**QS**
1	-3.743e+01	-6.892e+00	2.740e+01	3.687e+00	5.053e+00
2	-3.927e+01	-1.055e+01	1.180e+01	-4.206e−01	3.470e+00
3	-4.114e+01	-1.711e+01	1.367e+00	-3.007e+00	2.111e+00
4	-4.285e+01	-2.444e+01	-4.771e+00	-4.346e+00	1.056e+00
5	-4.429e+01	-3.125e+01	-7.677e+00	-4.755e+00	3.099e−01
6	-4.541e+01	-3.689e+01	-8.368e+00	-4.533e+00	-1.645e−01
7	-4.624e+01	-4.114e+01	-7.701e+00	-3.935e+00	-4.232e−01
8	-4.679e+01	-4.408e+01	-6.333e+00	-3.159e+00	-5.253e−01
9	-4.713e+01	-4.592e+01	-4.726e+00	-2.347e+00	-5.235e−01
10	-4.730e+01	-4.692e+01	-3.172e+00	-1.587e+00	-4.604e−01
11	-4.737e+01	-4.735e+01	-1.835e+00	-9.316e−01	-3.660e−01
12	-4.737e+01	-4.745e+01	-7.852e−01	-3.999e−01	-2.604e−01
13	-4.734e+01	-4.740e+01	-2.723e−02	1.684e−02	-1.538e−01
14	-4.730e+01	-4.733e+01	5.937e−01	3.119e−01	-5.037e−02

Se puede realizar un análisis del problema para el caso de ignición espontánea mostrado en la Figura 10.18(b) (esto es, $\delta = 16$) calculando primero la solución del estado estacionario utilizando los datos dados en la Sección 16.3.3. Así, se recupera la solución del estado estacionario, que es un estado homogéneo a 290 K. Se pueden cambiar las condiciones de contorno al valor de 500 K. Utilizando el macrocomando TANG,,1, y las propiedades materiales para especificar el término de generación de calor utilizando el comando

```
MESH
```

seguido de (nótese que en la pantalla ahora tendremos "Mesh >", en lugar del indicador de entrada de macrocomando):

```
FORC
1,1,500.
5,,500.

MATE
1,3
0.2,1.,1.,-80.,20.,500.,-1,2

END
```

El primer conjunto de comandos FORC cambia las condiciones de contorno, mientras que los comandos MATE cambian los parámetros del material para incluir el término de generación de calor (si éste hubiese sido incluido en el conjunto original de propiedades, hubiera resultado un estado estacionario erróneo como condición inicial, debido a la presencia de los términos de generación de calor). Los parámetros del material corresponden a los valores

$$K = 0.20$$
$$c = 1.00$$
$$\rho = 1.00$$
$$\bar{\delta} = -80.0$$
$$r = 20.0$$
$$T_n = 500.0$$

En cada paso aparecen en la pantalla indicadores para recordar al usuario cuales son los datos que pueden ser introducidos. Cada vez que se completa un conjunto de comandos el programa imprime los nuevos datos de entrada en el archivo de salida y por pantalla. El comando END devuelve al

programa a la ejecución de macrocomandos. En este instante se deben dar la matriz de capacidad calorífica y la especificación de los parámetros para la solución transitoria. La solución que se describe en esta sección se calculó utilizando el método SS11 con θ igual a 0.50 y 20 pasos de tiempo con Δt igual 0.01, seguidos por 30 pasos de tiempo con Δt de 0.04 unidades. Los macrocomandos que deben introducirse para llevar a cabo estos pasos se pueden especificar de la forma siguiente:

```
MASS
BETA,SS11,0.5
DT,,.01
LOOP,time,20
TIME
LOOP,newton,10
TANG,,1
NEXT,newton
DISP,,4,39,5
NEXT,time
DT,,.04
LOOP,time,30
TIME
LOPP,time,10
TANG,,1
NEXT,newton
DISP,,4,39,5
NEXT,time
```

El problema es no lineal debido a los efectos del término de generación de calor y, en consecuencia, se lleva a cabo una solución de Newton para cada paso de tiempo. El comando DISP describe la localización de las temperaturas que se tabulan a 5 niveles de tiempo en la Tabla 16.14. Estos valores concuerdan bien con los mostrados en la Figura 10.17. Las soluciones para tiempos mayores de 1.40 dependen fuertemente de la elección particular del incremento de tiempo utilizado, y se utilizó un procedimiento de selección automática del paso de tiempo (no disponible en PCFEAP) para obtener los resultados mostrados en la Figura 10.17. La solución es inestable una vez que la temperatura sobrepasa los 600 K, debido a la naturaleza de la función exponencial utilizada para describir Q.

16.9.4 *Análisis de una banda elastoplástica a tracción.* Se lleva a cabo el análisis de una banda de anchura finita con un orificio circular sujeta a deformación axial utilizando un material elastoplástico sin endurecimiento.

TABLA 16.14
IGNICIÓN ESPONTÁNEA: ESTADOS DE TEMPERATURA-TIEMPO

	Valores de tiempo				
Radio	0.0	0.13	0.60	1.00	1.40
1.000	290.0000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000
0.875	290.0000	427.0221	484.0392	497.8513	508.9534
0.750	290.0000	364.1205	462.9881	490.9011	513.8165
0.625	290.0000	322.0308	440.2810	480.9882	514.2681
0.500	290.0000	300.4395	418.8623	470.3554	511.7056
0.375	290.0000	292.9916	400.3157	460.5371	507.4656
0.250	290.0000	290.2667	386.2729	452.8100	503.3086
0.000	290.0000	289.8447	372.3680	444.9784	498.6067

El análisis utiliza ELMT02 con propiedades materiales especificadas de la forma

$$E = 7000$$
$$\nu = 0.2$$
$$Y_0 = 24.3$$

La carga axial se aplica restringiendo las condiciones de contorno en los extremos, superior e inferior, de la malla para indicar valores fijados de los desplazamientos en las entradas FORCed. Los valores unitarios especificados en el extremo superior de la malla proporcionan la carga axial que se controla utilizando una función de carga proporcional igual a t, juntamente con los valores especificados en el incremento de tiempo. En consecuencia, el primer incremento de carga se aplica con un incremento de tiempo de 0.04 utilizando los comandos

```
PROP,,1
DT,,0.04
TIME
```

Se realiza, entonces, un paso iterativo de Newton utilizando los comandos

```
LOOP,,10
TANG,,1
NEXT
```

El paso de solución produce algo de fluencia en la sección estrecha ad-

yacente al orificio circular. Los valores de las normas del residuo y de energía producidos en este paso se dan en las Tablas 16.15 y 16.16, respectivamente. Se llevan a cabo algunos pasos adicionales para un incremento de tiempo más pequeño de 0.01 y los resultados para los cuatro primeros se incluyen también en las tablas. La distribución de la fluencia producida por la solución es similar a la mostrada en el Capítulo 7.

TABLA 16.15
NORMAS RESIDUALES PARA LA BANDA A TRACCIÓN

Número de	Tiempo de carga				
iteración	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
1	7.3165e+02	1.8291e+02	1.8291e+02	1.8291e+02	1.8291e+02
2	5.7335e+00	3.3490e+00	6.9462e+00	2.5496e+00	1.4204e+00
3	1.0605e+00	6.7595e−01	3.1487e+00	1.8722e−01	2.2917e−01
4	1.0554e−01	7.0917e−03	1.1493e−01	8.6060e−05	5.1782e−04
5	1.3849e−04	2.0422e−06	3.3520e−05	1.2271e−10	6.1778e−09
6	1.6046e−09	2.0755e−13	1.5476e−1		

TABLA 16.16
NORMAS DE ENERGÍA PARA BANDA EN TENSIÓN

Número de	Tiempo de carga				
iteración	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
1	7.5010e+01	4.7314e+00	4.7936e+00	4.9280e+00	4.9524e+00
2	1.6565e−02	6.8191e−03	3.4727e−02	3.2724e−03	1.0295e−03
3	7.9394e−04	1.3852e−04	1.5827e−03	5.0961e−06	1.1134e−05
4	2.1674e−06	2.2567e−08	1.7065e−06	1.8806e−12	6.8850e−11
5	1.0337e−11	1.7323e−15	2.7846e−13	3.8667e−24	1.8542e−20
6	1.2317e−21	1.8038e−29	7.2369e−26		

En la Figura 16.3 se dibuja la carga resultante en la banda a tracción en función del tiempo. Es evidente que se llega a la carga límite en 5 pasos de carga. Nótese que se consigue una velocidad asintótica de convergencia cuadrática para las tres últimas iteraciones de cada paso de carga, lo que demuestra el funcionamiento de un algoritmo de Newton programado adecuadamente.

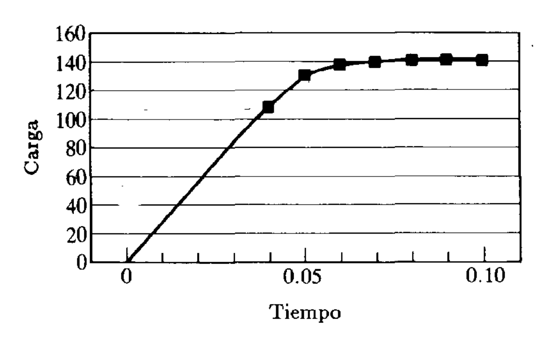


Figura 16.3 Banda a tracción: carga versus tiempo.

Los análisis anteriores muestran algunos de los tipos de problemas que pueden considerarse utilizando el programa de elementos finitos PCFEAP incluido en este capítulo. Los ejemplos ilustran la aplicación del programa a la solución de problemas *estáticos, cuasiestáticos* (problemas dependientes del tiempo en los cuales la ecuación diferencial no incluye derivadas temporales) y *transitorios*. Se han mostrado problemas lineales y no lineales. El programa incluye un algoritmo de subespacio para extraer los pares de valores de valores y vectores propios más pequeños, tanto para los problemas estándar como generales. En el algoritmo incluido en este capítulo sólo se permiten matrices diagonalizadas para el término de "masa" en el problema de valores propios lineal general. Sin duda, el lector habrá observado otras características que pueden añadirse al programa para mejorar su utilidad. Por ejemplo, una característica muy útil es la posibilidad de abandonar un paso de solución, volviendo al estado que existía al principio del incremento de "tiempo". Esto requiere resolver el algoritmo de integración en el tiempo en una dirección inversa o hacia atrás. Sin embargo, esto se consigue fácilmente para los algoritmos de paso único, tales como el SSij y GN22 (Newmark) utilizados aquí. Otras mejoras incluirían el control automático del paso de tiempo, tal como se propone en la referencia [12] para resolver el problema de combustión espontánea, y métodos de continuación para resolver problemas que tienen puntos límite (a menudo llamados métodos de longitud de arco, véase, por ejemplo, el Capítulo 7). Finalmente, se ha comentado durante el desarrollo de los elementos de placa discutidos en el Capítulo 2 que es conveniente escribir las incógnitas asociadas a los elementos de una forma jerárquica; esto es, asociar los grados de libertad del elemento a nodos, lados y caras (para problemas tridimensionales). Esta mejora no se ha incluido aquí debido a las limitaciones de espacio y, de nuevo, se deja como una mejora para el usuario.

En la sección final de este capítulo se incluyen los listados para los añadidos y cambios al programa.

16.10 Información de instalación y listados de los módulos del programa

Esta sección contiene la información para instalar el programa en un ordenador, así como los listados de los cambios y añadidos al programa.

16.10.1 *Información de instalación.* El programa puede instalarse en varios sistemas de ordenadores diferentes, variando en tamaño desde pequeños ordenadores personales a las mayores máquinas disponibles. El programa está escrito para un *modo de cálculo escalar* y, por tanto, no conseguirá un funcionamiento óptimo en ordenadores vectoriales. Los pasos básicos de instalación son:

1. Selección de una rutina para la medición del tiempo [véase Sección 16.10.3(*b*)].
2. Selección de una interfase de dibujo [véase Sección 16.10.6].
3. Selección de una opción de solución: la solución de banda variable utiliza los archivos PASOLV.FOR y PARSOL.FOR; la solución frontal utiliza los archivos PFSOLV.FOR y PFRSOL.FOR.
4. Compilación de las rutinas anteriores con los otros archivos nombrados en la Tabla 16.7.

Cuando se use en un ordenador personal, todas las variables enteras se declaran como palabras de dos bytes, para mantener el programa ejecutable tan pequeño como sea posible. Para las dimensiones especificadas en los vectores grandes, esto no constituye ningún problema, con la excepción de la variable ITREC en el bloque COMMON llamado TEMFL2. Esta variable se usa para contar bytes en las operaciones de acceso de entrada/salida al disco y ahora debe ser del tipo INTEGER*4. La especificación original no causa dificultades con el compilador Microsoft Fortran Versión 3.31, pero puede causar errores para problemas grandes cuando se use la versión 5.0. En consecuencia, todos los archivos que contienen este vector deben modificarse de la forma

```
integer*4   itrec
common/temfl2/itrec(4),nwl,nw2
```

Los parámetros NW1 y NW2 pueden seguir siendo del tipo INTEGER*2.

16.10.2 *Listado del programa de ordenador de elementos finitos.* Se incluye aquí y en las secciones siguientes las ampliaciones del programa

de ordenador de elementos finitos que se dio en el Capítulo 15 del Volumen 1. Las rutinas que deben usarse se indican en la Tabla 16.17. La denominación 15.*m.n* al Capítulo 15, Sección *m.n.* del Volumen 1, mientras que la denominación 16.*m.n* se refiere a la Sección *m.n.* de este capítulo.

TABLA 16.17

ARCHIVOS PARA EL PROGRAMA FUENTE PCFEAP

Nombre del archivo	*Descripción*	*Sección*
PCFEAP.FOR	Programa principal, asignación de archivos, instalación	15.8.2(*a*)
PCDEPT.FOR	Rutinas dependientes de la instalación o del compilador	15.8.2(*b*), 16.10.3(*b*)
PCMESH.FOR	Rutinas de definición de la malla	15.8.2(*c*)
PCMAC1.FOR	Rutinas de macroprograma–parte 1	15.8.3(*a*), 16.10.4(*a*)
PCMAC2.FOR	Rutinas de macroprograma–parte 2	15.8.3(*b*), 16.10.4(*b*)
PCMAC3.FOR	Rutinas de macroprograma–parte 3	15.8.3(*c*)
PCEIGN.FOR	Rutinas de cálculo de valores propios	16.10.4(*d*)
PASOLV.FOR	Rutinas de solución de banda variable	15.8.4(*a*) ,16.10.5(*a*)
PFSOLV.FOR	Rutinas resolución frontal	15.8.4(*b*)
PARSOL.FOR	Rutinas de solución frontal	16.10.5(*c*)
PFRSOL.FOR	Resolución frontal	16.10.5(*d*)
PCPLOT.FOR	Rutinas de dibujo	15.8.5, 16.10.6(*a*)
PCFOR5.FOR	Interfase gráfica (Microsoft 5.0)	16.10.6(*b*)
PCTEKT.FOR	Interfase gráfica (Tektronic 4012)	16.10.6(*c*)
PCELM1.FOR	Rutina elemental para viga no lineal/ lámina elástica axisimétrica	16.10.7(*a*)
PCELM2.FOR	Rutina elemental para modelo**B**-barra material elastoplático	16.10.7(*b*)
PCELM3.FOR	Rutina elemental para la ecuación de Laplace-término de fuente-tipo reacción	16.10.7(*c*)
PCELM4.FOR	Rutina elemental para barra general biarticulada-material elastoplástico	16.10.7(*d*)

16.10.3 *Módulos de control y entrada de datos.* Los subprogramas de control y entrada de datos están contenidos en los archivos PCFEAP.FOR, PCDEPT.FOR y PCMESH.FOR. Excepto en lo que se refiere a la rutina de medición del tiempo, no se han hecho cambios sustanciosos en la rutinas y listados que se dieron en el Volumen 1, Capítulo 15. A continuación se dan tablas indicando los nombres y descripciones de las subrutinas correspondientes. El pequeño número de cambios que se han hecho en estas subrutinas se indican en las notas que siguen a cada tabla y en la Sección 16.10.3(*b*) se da la rutina para medición del tiempo con diferentes opciones.

(*a*) El archivo PCFEAP.FOR contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
PCFEAP	PROGRAMA	Programa principal	15
PDEFIL	SUBRUTINA	Borra los archivos de trabajo	15
FILNAM	SUBRUTINA	Entrada de los nombres de los archivos para I/O	15
PCONTR	SUBRUTINA	Controla la solución global del problema	15
PLTSTR	SUBRUTINA	Calcula las proyecciones nodales de tensión	15
PRTHED	SUBRUTINA	Imprime el título de cabecera	15
		en el archivo de salida	15

Nota: En la SUBRUTINA PCONTR (Volumen 1) la línea PCO 41 puede cambiarse por:

```
call psetm(nn,5*nen*ndf,      ipd,tfl)
```


(*b*) El archivo PCDEPT.FOR contiene el siguiente conjunto de subprogramas (nótese que puede ser necesario cambiar las rutinas de este archivo en función del sistema de ordenador utilizado):

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
TIME	INTERFASE	Interfase de tiempo	15
PCTIME	SUBRUTINA	Calcula el tiempo invertido y lo imprime	15,16
PCOMP	FUNCION	Compara datos en caracteres ASCII	15
PINTIO	SUBRUTINA	Lee los datos de entrada desde pantalla o archivo	15
PCLEAR	SUBRUTINA	Rutina para borrar la pantalla DOS	15

La rutina para medición del tiempo para la Microsoft Fortran Version 5.0 o compiladores UNIX es:

```
      subroutine pctime(xtime)
      character*10 xtime
c
c.... Time routine for Microsoft Version 5.0
c     call gettim (ihr,imin,isec,ihth)
c     write(xtime,2000) ihr,imin,isec
c2000 format(i3,':',i2,':',i2)
c
c.... Time routine for UNIX: Elapsed cpu time
      real tarry(2)
      call etime(tarry)
      write(xtime,2001) tarry(1)
 2001 format(f9.2)
      end
```

(*c*) El archivo PCMESH.FOR contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
PMESH	SUBRUTINA	Controla la entrada de datos de malla	15
PMATIN	SUBRUTINA	Entrada de los grupos de propiedades materiales	15
BLKGEN	SUBRUTINA	Entrada de bloques de nodos y elementos	15
GENVEC	SUBRUTINA	Genera vectores/matrices reales nodales	15
PBCIN	SUBRUTINA	Entrada de los códigos de vinculación del contorno	15
PELIN	SUBRUTINA	Entrada de las listas de conectividades del elemento	15
POLAR	SUBRUTINA	Convierte las coordenadas polares en cartesianas	15
SBLK	SUBRUTINA	Genera nodos y elementos para BLKGEN	15
SETHIS	SUBRUTINA	Escribe los datos iniciales de historia en disco	15

Nota: en la SUBRUTINA SETHIS (Volumen 1) se debe añadir lo siguiente detrás de la línea SET 5:

```
integer*4    itfil
```


16.10.4 *Módulos de solución y salida de macrocomandos.* La solución y la salida para cada problema está controlada por los subprogramas contenidos en los archivos PCMAC1.FOR, PCMAC2.FOR, PCMAC3.FOR y PCEIGN.FOR. Se incluyen en este volumen los subprogramas en los que se han hecho cambios sustanciales. Para estas rutinas las tablas indican Capítulo 16; los subprogramas donde no se han hecho cambios vienen indicados como apareciendo en el Capítulo 15 del Volumen 1. Se incluyen también nuevas rutinas que han sido añadidas al programa y que están marcadas con un (*) siguiendo a su nombre en las tablas.

(*a*) El archivo PCMAC1.FOR contiene los siguientes subprograms:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
PMACR	SUBRUTINA	Controla la secuencia de macrosolución	16
PINITC	SUBRUTINA	Inicializa los valores correspondientes a los parámetros	15
PMACIO	SUBRUTINA	Entrada y compilación de los macrocomandos	15
PMACR1	SUBRUTINA	Controla la ejecución de los macrocomandos de EF	16
PMACR2	SUBRUTINA	Controla otros macrocomandos	16
FORMFE	SUBRUTINA	Prepara la llamada a los cálculos de vectores de EF	15
INACCL(*)	SUBRUTINA	Calcula la aceleración inicial	16
PHSTIO	SUBRUTINA	I/O de datos a disco	15
SERCHL(*)	SUBRUTINA	Algoritmo de búsqueda direccional	16
GAMMA(*)	FUNCION	Evaluación de la función de búsqueda direccional	16

```
      subroutine pmacr (ul,xl,tl,ld,p,s,ie,d,id,x,ix,f,t,jd,f0,b,
     1  dr,ndf,ndm,nen1,nst,prt)
c.... macro instruction subprograms
      logical fl,prt,hfl,hout
      integer*2 ld(*),ie(*),id(*),ix(*),jd(*),jct,lvs,lve,im
      integer*4 itrec,iz
      real   ct(3,100),xl(*),tl(*),x(*),f(*),f0(*),t(*)
      real*8 d(*),ul(*),p(*),s(*),b(*),dr(*),dm,engy,rnmax,prop
      character*4 wd(24),lct,tary*10,tfile*12
      common dm(1),rm(1),im(1)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /fdata/ fl(11)
      common /hdatb/ nhi,nhf,ihbuff,irec,jrec,nrec,hfl,hout
      common /iofild/ iodr,iodw,ipd,ipr,ipi
      common /iofile/ ior,iow
      common /ldata/ l,lv,lvs(9),lve(9),jct(100)
```

```
      common /ldatb/ lct(100)
      common /ndata/ nv,nw,nl
      common /rdata/ engy,rnmax,tol,shift
      common /tbeta/ beta,gamm,theta,nop,nt
      common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      common /prlod/ prop,a(6,10),iexp(10),ik(10),npld
      data wd/'stre','utan','tang','form','mass','reac','chec','disp',
     1        'solv','mesh','rest',
     2        'tol ','dt  ','loop','next','prop','data','time','beta',
     2        'newf','subs','eigv','iden',
     p        'plot'/
c.... nmi = no. macro commands in 'pmacri'; nlp = loop number
      data nm1,nm2/11,12/,iz/0/
      nlp = nm1 + 3
c.... set initial values of parameters
      call pinitc(engy,rnmax,shift,tol,dt,prop,ttim,npld)
      nw1  = nm1
      nw2  = nm2 + nw1
      nneq = ndf*numnp
      call psetm (nt,nneq*2,ipr,fl(1))
      call pconsr(rm(nt),nneq*2,0.0)
c.... input the macro commands
100   call pmacio (jct,lct,ct,wd,nw2+1,nlp,ll)
      if(ll.le.0) go to 300
c.... execute macro instruction program
      lv = 0
      l = 1
200   j = jct(l)
      i = l - 1
      call pctime (tary)
      if(l.ne.1.and.l.ne.ll) then
       write(iow,2001) i,wd(j),lct(l),(ct(k,l),k=1,3),tary
       if(ior.lt.0) write(*,2001) i,wd(j),lct(l),(ct(k,l),k=1,3),tary
      endif
      if(j.le.nw1) call pmacr1(id,ie,ix,ld,d,s,x,f,f0,t,jd,b,dr,
     1                    lct,ct,ndf,ndm,nen1,nst,nneq,prt,j)
      if(j.ge.nw1+1.and.j.le.nw2)
     1             call pmacr2(id,f,f0,jd,b,dr,lct,ct,ndf,nneq,j-nw1)
c.... plot macro call
      if(j.eq.nw2+1) then
        call pplotf(x,ix,b,lct(l),ct(1,l),ndf,ndm,nen1,nneq)
      endif
      l = l + 1
      if(l.le.ll) go to 200
      if (ior.lt.0) go to 100
300   call pctime(tary)
      write(iow,2000) tary
      if(ior.lt.0) write(*,2000) tary
      if(.not.fl(4)) close(4,status='delete')
c.... save restart information
      if(ll.lt.-1.or.fl(7)) close(3,status='delete')
      if(ll.lt.-1.or.fl(7)) return
      open (7,file=tfile(6),form='unformatted',status='new')
      rewind 7
      write(7) numnp,numel,nummat,ndm,ndf,nhi,nhf,nrec
```



```
      write(7) ttim,(b(i),i=1,3*nneq)
      write(7) (dm(i),i=nt,nt+nneq)
      if(fl(9)) write(7) (dm(i),i=nv,nv+4*neq)
      if(nrec.gt.0) then
        do 400 j = 1,nrec
          call phstio(3,j,dm(nhi),nhf-nhi+1,1,tfile(2),itrec(2))
          call phstio(7,j,dm(nhi),nhf-nhi+1,22,tfile(6),iz)
400     continue
        call pdefil(tfile,2,2)
      endif
      close(7)
c.... formats
2000  format(' *End of macro execution*',15x,'time=',a10)
2001  format(' *Macro ',i3,' *',2(a4,1x),
     1  'V1=',g10.3,' V2=',g10.3,' V3=',g10.3/40x,'time=',a10)
      end
c
      subroutine pmacr1(id,ie,ix,ld,d,s,x,f,f0,t,jd,b,dr,
     1                  lct,ct,ndf,ndm,nen1,nst,nneq,prt,j)
c.... macro instruction subprograms
      logical fa,tr,fl,pcomp,prt,sflg,tflg,hfl,hout
      character lct(*)*4,tfile*12,tt*10
      integer*2 id(*),ie(*),ix(*),jd(*),ld(*),lvs,lve,jct,
     1          ia,im
      integer*4 itrec,iz
      real   ct(3,*),x(*),f(*),f0(*),t(*)
      real*8 b(*),d(*),dr(*),s(*),dm,aa,engy,rnorm,
     1  rnmax,dot,prop,eerror,elproj,ecproj,efem,enerr,ebar
      common /adata/ aa(1),ap(15998)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /errind/ eerror,elproj,ecproj,efem,enerr,ebar
      common /fdata/ fl(11)
      common /frdata/ maxf
      common /hdatb/ nhi,nhf,ihbuff,irec,jrec,nrec,hfl,hout
      common /iofile/ ior,iow
      common /iofild/ iodr,iodw,ipd,ipr,ipi
      common /ldata/ l,lv,lvs(9),lve(9),jct(100)
      common /mdat2/ n11a,n11b,n11c,ia(2,11)
      common /ndata/ nv,nw,nl
      common /prlod/ prop,a(6,10),iexp(10),ik(10),npld
      common /rdata/ engy,rnmax,tol,shift
      common /tbeta/ beta,gamm,theta,nop,nt
      common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      common dm(1),rm(1),im(1)
      data zero/0.0/,fa,tr/.false.,.true./,iz/0/
c.... transfer to correct process
      n1 = 1
      n3 = 1
      go to (1,2,2,3,4,5,6,5,2,9,10), j
c.... print stress values
1     n1 = ct(1,l)
      n2 = ct(2,l)
      n3 = ct(3,l)
      n3 = max(n3,1)
      n4 = numnp - 1
```

```
      n0 = -2
      if (pcomp(lct(1),'node')) then
        n1 = max(1,min(numnp,n1))
        n2 = max(n1,min(numnp,n2))
        enerr = 0.0
        if(.not.fl(11)) then
          call pconsr(ap(n0),8*numnp,0.0)
          call formfe(b,dr,fa,fa,fa,fa,8,1,numel,1)
          call pltstr(aa,ap(n4),numnp)
        endif
        call prtstr(aa,ap(n4),numnp,n1,n2,n3)
        fl(11) = tr
      elseif (pcomp(lct(1),'erro')) then
        n1 = max(n1,1)
        n2 = 8*numnp
        call pconsr(ap(n2),n2,0.0)
        enerr = 0.0
        do 110 i = 1,n1
          call pconsr(ap(n0),n2,0.0)
          call formfe(b,dr,fa,fa,fa,fa,8,1,numel,1)
          call pltstr(aa,ap(n4),numnp)
          call addvec(ap(n2),ap(n4),n2-numnp)
110     continue
        fl(11) = tr
        eerror = 0.0
        eproj  = 0.0
        efem   = 0.0
        ebar   = 0.05*sqrt(enerr/numel)
        ietyp  = 1
        call formfe(b,dr,fa,fa,fa,fa,7,1,numel,1)
        call prterr
      else
        if(pcomp(lct(1),'all ')) then
          n2 = numel
        else
          n1 = max(1,min(numel,n1))
          n2 = max(n1,min(numel,n2))
        endif
        call formfe(b,dr,fa,fa,fa,fa,4,n1,n2,n3)
      endif
      return
c.... solution step
2     shft = c1
      sflg = fl(9)
      if(j.eq.9) then
        if(.not.fl(8)) return
        fl(7) = .false.
        tflg  = .false.
c.... form tangent stiffness
      else
c....  unsymmetric tangent (must use profile solver)
        if(j.eq.2) fl(6) = .true.
c....  symmetric tangent
        if(j.eq.3) fl(6) = .false.
        if(ct(1,1).ne.zero) then
          fl(8) = tr
          fl(7) = fa
```



```
          call raxpb(f, f0, prop, nneq, rm(nt+nneq))
          call pload(id,rm(nt),dr,nneq,dm(nl),dm(nw))
        endif
        shift= 0.
        tflg = tr
        if(.not.fl(9).and.ct(2,1).ne.zero) then
          if(fl(2)) then
            sflg = tr
            shift= ct(2,1)
            shft = -shift
            if(ior.lt.0) write(*,2006) shift
            write(iow,2006) shift
          else
            if(ior.lt.0) write(*,2007)
            write(iow,2007)
            if(ior.gt.0) stop
            return
          endif
        endif
      endif
c.... call the solve routine to assemble and solve the tangent matrix
      na = maxf + 1
      nal= (maxf*(maxf+1))/2 + na
      call psolve(b,aa(na),aa,dr,aa(nal),dm(nl),s,ld,jd,im(n11c),nst,1,
     1            tflg,fl(8),sflg,shft,4,rnorm,engy,1)
      call pctime(tt)
      if(fl(8)) then
        fl(8) = fa
        if(tflg) write(iow,2001) rnorm,tt
        if(tflg .and. ior.lt.0) write(*,2001) rnorm,tt
        if (rnmax.eq.0.0d0) then
          rnmax = abs(engy)
          if(ct(3,1).le.0.0) ct(3,1) = 0.6
          enold = rnmax*0.9999
        endif
        write(iow,2004) rnmax,engy,tol
        if(ior.lt.0) write(*,2004) rnmax,engy,tol
        if(abs(engy).le.tol*rnmax) then
          ct(1,lve(lv)) = ct(1,lvs(lv))
          l = lve(lv) - 1
        elseif(pcomp(lct(l),'line')) then
c.... line search
          if(abs(engy).gt.ct(3,1)*enold) then
           ml1 = 1 + nneq
           call serchl(rm(nt),id,engy,aa,b,dr,ct(3,1),aa(ml1),nneq)
          endif
        endif
        call update(id,rm(nt),b,dm(nv),dr,nneq,fl(9),2)
      else
        write(iow,2002) tt
        if(ior.lt.0) write(*,2002) tt
      endif
      return
c.... form out of balance force for time step/iteration
3     if(fl(8)) return
      call raxpb(f, f0, prop, nneq, rm(nt+nneq))
      call pload(id,rm(nt),dr,nneq,dm(nl),dm(nw))
```

```
      call formfe(b,dr,fa,tr,fa,fa,6,1,numel,1)
      if(pcomp(lct(1),'acce').and.ttim.eq.0.0 .and. nop.eq.3) then
        call inaccl(id,dr,dm(nl),dm(nw),nneq)
      endif
      rnorm = sqrt(dot(dr,dr,neq))
      write(iow,2003) rnorm
      if(ior.lt.0) write(*,2003) rnorm
      fl(8) = tr
      return
c.... form a lumped mass approximation
4     if(fl(5)) call psetm(nl,neq,ipd,fl(5))
      call pconsd(dm(nl),neq,0.0d0)
      fl(2) = tr
      call formfe(b,dm(nl),fa,tr,fa,fa,5,1,numel,1)
      return
c.... compute reactions and print
5     if(pcomp(lct(1),'all ')) then
        n2 = numnp
      else
        n1 = ct(1,1)
        n2 = ct(2,1)
        n3 = ct(3,1)
        n1 = max(1,min(numnp,n1))
        n2 = max(n1,min(numnp,n2))
        n3 = max(1,n3)
      endif
      if(j.eq.6) then
        call pconsd(dr,nneq,0.0d0)
        call formfe(b,dr,fa,tr,fa,tr,6,1,numel,1)
        call prtrea(dr,ndf,numnp,n1,n2,n3)
      else
        if(nop.le.2) then
          call prtdis(x,dm(nw+nneq),ttim,prop,ndm,ndf,n1,n2,n3)
        else
          call prtdis(x,b,ttim,prop,ndm,ndf,n1,n2,n3)
        endif
      endif
      return
c.... check mesh for input errors
6     call formfe(b,dr,fa,fa,fa,fa,2,1,numel,1)
      return
c.... modify mesh data (cannot change profile of stiffness/mass)
9     i = -1
      call pmesh(ld,ie,d,id,x,ix,f,t,ndf,ndm,nen1,i,prt)
      if (i.gt.0) go to 400
      return
c.... restart previously run problem
10    open (7,file=tfile(5),form='unformatted',status='old')
      read(7) nnpo,nnlo,nnmo,ndmo,ndfo,nhio,nhfo,nrco
      if((nnpo.eq.numnp).and.(nnlo.eq.numel).and.(nnmo.eq.nummat)
     1  .and.(ndmo.eq.ndm).and.(ndfo.eq.ndf).and.(nrco.eq.nrec)
     2  .and.(nhfo-nhio.eq.nhf-nhi) ) then
         read(7) ttim,(b(i),i=1,3*nneq)
         read(7) (dm(i),i=nt,nt+nneq)
         if(fl(9)) read(7) (dm(i),i=nv,nv+4*neq)
         if(nrec.gt.0) then
           do 101 j = 1,nrec
```



```
             call phstio(7,j,dm(nhi),nhf-nhi+1,11,tfile(5),iz)
             call phstio(3,j,dm(nhi),nhf-nhi+1,2,tfile(2),itrec(2))
101        continue
         endif
         close(7)
      else
         if(ior.gt.0) write(iow,3001)
         if(ior.lt.0) write( *,3001)
      endif
      return
c.... error diagnostics
400   write(iow,3002)
      if(ior.gt.0) stop
      write( *,3002)
c.... formats
2001  format('   | R(i) | =',1pe15.7,12x,'time=',a10)
2002  format(40x,'time=',a10)
2003  format('   | R(i) | = ',1pe15.7)
2004  format('   Energy Convergence Test'/'   E(1)=',1pe21.14,
     1  ', E(i)=',1pe21.14,', Tol.=',1pe11.4)
2006  format('   Shift of',1pe11.4,' applied with mass')
2007  format('   Shift requested but no mass matrix exists.')
3001  format(' **ERROR** File incompatible with current problem.')
3002  format(' **ERROR** Attempt to change profile during mesh.')
      end
c
      subroutine pmacr2(id,f,f0,jd,b,dr,lct,ct,ndf,nneq,j)
c.... macro instruction subprograms
      logical fl,pcomp,hfl,hout,sfl
      integer*2 id(*),jd(*),lvs,lve,jct,im
      real      f0(*),f(*),ct(3,*),xtl
      real*8    b(*),dr(*),uu,dm,engy,rnmax,prop
      character*4 lct(*),ctl(2),tfile*12,yyy*80
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /fdata/ fl(11)
      common /hdatb/ nhi,nhf,ihbuff,irec,jrec,nrec,hfl,hout
      common /iofile/ ior,iow
      common /iofild/ iodr,iodw,ipd,ipr,ipi
      common /ldata/ l,lv,lvs(9),lve(9),jct(100)
      common /ndata/ nv,nw,nl
      common /prlod/ prop,a(6,10),iexp(10),ik(10),npld
      common /psize/ maxm,ne
      common /rdata/ engy,rnmax,tol,shift
      common /tbeta/ beta,gamm,theta,nop,nt
      common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /udata/ uu(4000)
      common dm(1),rm(1),im(1)
c.... transfer to correct process
      go to (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12), j
c.... set solution tolerance
1     tol = ct(1,1)
      return
c.... set time increment
2     dt = ct(1,1)
      if(fl(9)) call setci(ior)
      return
```

```
c.... set loop start indicators
3     lv = lv + 1
      lvs(lv) = 1
      lve(lv) = ct(2,1)
      ct(1,lve(lv)) = 1.
      return
c.... loop terminator control
4     n = ct(2,1)
      ct(1,1) = ct(1,1) + 1.0
      if(ct(1,1).gt.ct(1,n)) lv = lv - 1
      if(ct(1,1).le.ct(1,n)) l = n
      return
c.... input proportional load table
5     npld = ct(1,1)
      npld = max(1,min(npld,10))
      prop = propld (ttim,npld)
      return
c.... data command
6     if(ior.lt.0) write(*,3000) lct(l)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=61) (ctl(i),i=1,2),xtl
      if(.not.pcomp(lct(l),ctl(1))) go to 402
      if(pcomp(ctl(1),'tol ')) tol = xtl
      if(pcomp(ctl(1),'dt  ')) dt  = xtl
      return
61    call perror('PMACR2',yyy)
      go to 6
c.... increment time - initialize force / solution vectors
7     ttim = ttim + dt
      do 71 i = 0,nneq-1
        rm(nt+i) = rm(nt+nneq+i)
71    continue
      if(npld.gt.0) prop = propld(ttim,0)
      write(iow,2002) ttim,prop
      if(ior.lt.0) write( *,2002) ttim,prop
      engy = 0.0
      rnmax = 0.0
c.... update history on the disk
      if(.not.hfl) then
        hout = .true.
        call formfe(b,dr,.false.,.false.,.false.,.false.,6,1,numel,1)
        hout = .false.
      endif
c.... update dynamic vectors for time step
      if(fl(9)) then
        call setci(ior)
        call update(id,rm(nt),b,dm(nv),dr,nneq,fl(9),1)
      endif
c.... zero displacement increment for next time step
      call pconsd(b(nneq+1),nneq+nneq,0.0d0)
      fl(10) = .true.
      return
c.... input integration parameters and initialize vectors
8     call param(lct(l),ct(1,l))
      if(fl(9)) return
      call psetm(nv,nneq*4,ipd,fl(9))
      call pconsd(dm(nv),nneq*4,0.0d0)
      nw = nv + nneq
```



```
c.... set initial condition for transient solution
      n1 = nw + nneq - 1
      do 81 i = 1,nneq
        dm(n1+i) = b(i)
81    continue
      fl(9) = .true.
      return
c.... update the current force vector f0
9     call raxpb(f, f0, prop, nneq, f0)
      return
c.... subspace eigencomputations
10    mf = ct(1,l)
      n2 = ct(2,l)
      mf = min(neq,max(1,mf))
      mq = min(mf+mf,mf+8,neq)
      if(n2.gt.0) mq = min(mf+n2,neq)
      if(fl(2)) call numass(dm(nl),neq,mq)
      if(mq.lt.mf) write(iow,2001) mq
      if(mq.lt.mf.and.ior.lt.0) write( *,2001) mq
      mf = min(mf,mq)
      if(mf.le.0) return
      sfl = pcomp(lct(l),'prin')
c.... establish addresses for eigen solutions
      md =  1
      mv = md + mq
      mg = mv + mq*neq
      mh = mg + mq*(mq+1)/2
      mdp= mh + mq*(mq+1)/2
      mdt= mdp+ mq
      mp = mdt+ mq
      nlm= max(mp+mq*mq,neq*mq+neq)
      if(nlm.gt.maxm/ipd) then
        if(ior.lt.0) then
          write( *,3001) nlm,maxm/ipd
          return
        else
          write(iow,3001) nlm,maxm/ipd
          stop
        endif
      endif
      nlm = ne/ipd + 1
      open(7,file=tfile(3),form='unformatted',status='new')
      write(7) (dm(i),i=1,nlm)
      close (7)
      nlm = nl - 1
      n1  = neq*ipd - ipd - ipr
      do 101 i = 1,neq
        dm(i)    = dm(i+nlm)
        im(n1+i) = jd(i)
101   continue
      nlm = neq + (neq + ipd -1)/ipd + 1
      call subsp(dm(1),uu(mv),uu(mg),uu(mh),uu(md),uu(mdp),
     1 uu(mdt),uu(mp),dm(nlm),mf,mq,neq,shift,tol,sfl,25)
c.... restore the solution to continue macro executions
      nlm = ne/ipd + 1
      open(7,file=tfile(3),form='unformatted',status='old')
      rewind 7
      read(7) (dm(i),i=1,nlm)
```

```
      close(7,status='delete')
      return
c.... print eigenvectors
11    if(mf.gt.0) then
        n1   = ct(1,l)
        n1   = max(1,min(mq,n1))
        n2   = mv + neq*(n1-1) -1
c.... expand and move eigenvector for prints
        call pconsd(dm,nneq,0.0d0)
        do 111 i = 1,nneq
          n = id(i)
          if(n.ne.0) dm(i) = uu(n2+n)
111     continue
        call prtdis(x,dm,ttim,uu(md+n1-1),ndm,ndf,1,numnp,1)
      else
        write(iow,3002)
        if(ior.lt.0) write(*,3002)
      endif
      return
c.... set identity matrix for mass
12    if(fl(5)) call psetm(nl,neq,ipd,fl(5))
      fl(2) = .true.
      call pconsd(dm(nl),neq,1.d0)
      return
c.... error diagnostics
402   if(ior.gt.0) write(iow,3003)
      if(ior.gt.0)  stop
      write(*,3003)
      go to 6
c.... formats
1000  format(a4,6x,a4,6x,f15.0)
2001  format(' **WARNING** Subspace set to',i4,' number of mass terms.')
2002  format('   Computing solution for time',1pe12.5/
     1       '   Proportional load value is ',1pe12.5)
3000  format(' Input ',a4,' macro >',$)
3001  format(' **ERROR** Subspace memory too large'/
     1 5x,'Need =',i7,' : Available =',i7)
3002  format(' **ERROR** Need eigensolution.')
3003  format(' **ERROR** Macro label mismatch on data command.')
      end
c
      subroutine inaccl(id,dr,xm,a,nneq)
      integer*2 id(nneq)
      real*8  dr(*),xm(*),a(nneq)
      do 100 n = 1,nneq
        j = id(n)
        if(j.gt.0) a(n) = dr(j)/xm(j)
100   continue
      end
c
      subroutine serchl(fn,id,g0,rsd,u,d,stol,t,nneq)
c
c.... linear line search for nonlinear problems
c
      integer*2 id(*)
      real      fn(nneq,2)
      real*8    rsd(*),u(*),d(*),t(*),gamma,g,g0,ga,gb,sa,sb
      common /cdata/  numnp,numel,nummat,nen,neq
```



```
      common /iofile/ ior,iow
c.... compute step size for line search in direction d
      linmax = 10
      sb     = 0.0
      sa     = 1.0
      s      = 1.0
      g      = gamma(fn,id,u,rsd,d,t,s,neq,nneq)
c.... find bracket on zero
      if(g*g0.gt.0.0d0) then
        write(iow,3000)
        if(ior.lt.0) write(*,3000)
      else
        j    = 0
        gb   = g0
        ga   = g
        sb   = 0.0d0
        sa   = 1.0d0
10      j    = j + 1
        step = sa - ga*(sa-sb)/(ga-gb)
        g    = gamma(fn,id,u,rsd,d,t,step,neq,nneq)
        gb   = 0.5d0*gb
        if (g*ga.lt.0.0d0) then
          sb = sa
          gb = ga
        endif
        sa = step
        ga = g
        write(iow,3001) j,step,g
        if(ior.lt.0) write(  *,3001) j,step,g
        if (j.lt.linmax) then
          if(abs(g)      .gt. stol*abs(g0)      ) go to 10
          if(abs(sb-sa) .gt. stol*0.5d0*(sa+sb)) go to 10
        endif
        do 20 j = 1, neq
          d(j) = step*d(j)
20      continue
      endif
3000  format(4x,'No line search, end points both positive.')
3001  format(4x,'Iter =',i2,' Step Size =',e12.5,' Energy =',e12.5)
      end
c
      double precision function gamma(fn,id,u,dr,du,t,s,nqe,nneq)
      logical fa,tr,fl
      integer*2 id(*),m
      real   fn(nneq,2)
      real*8 u(*),dr(*),du(*),t(*),dm,db,dot,prop
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /fdata/ fl(11)
      common /mdata/ nn,n0,n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7,n8,n9,n10,n11,n12,n13
      common /ndata/ nv,nw,nl
      common /prlod/ prop,a(6,10),iexp(10),ik(10),npld
      common /tbeta/ beta,gamm,theta,nop,nt
      common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
      common dm(1),rm(1),m(1)
      data fa,tr/.false.,.true./
c.... get a search displacement
      nneq2 = nneq + nneq
      ctem  = theta
      theta = s*theta
```

```
      do 100 n = 1,nneq
        j = id(n)
        if(j.gt.0) then
          db          = s*du(j)
          t(n)        = u(n)       + db
          t(n+nneq )  = u(n+nneq)  + db
          t(n+nneq2)  = db
        else
          db = theta*fn(n,2) + (1.0-theta)*fn(n,1)
          t(n+nneq2) = db - u(n)
          t(n+nneq ) = u(n+nneq) - u(n) + db
          t(n)       = db
        endif
100   continue
c.... compute a residual
      call pload(id,fn,dr,nneq,dm(nl),dm(nw))
      call formfe(t,dr,fa,tr,fa,fa,6,1,numel,1)
      theta = ctem
c.... update the residual for lumped mass inertial effects
      if(fl(9)) then
        ctem = s*c1
        do 110 n = 1,nneq
          j = id(n)
          if(j.gt.0) then
            dr(j) = dr(j) - dm(nl+j-1)*(dm(nw+n-1) + ctem*du(j))
          endif
110     continue
      endif
c.... compute the value of gamma
      gamma = dot (du,dr,nqe)
      end
```


(*b*) El archivo PCMAC2.FOR contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
ADDVEC	SUBRUTINA	Sumar en un vector	15
JUST	SUBRUTINA	Alinear los datos para el procesador	15
MODIFY	SUBRUTINA	Modificar el vector para condiciones de contorno especificadas	15
PANGL	SUBRUTINA	Fijar los ángulos locales para rotación de GDL	15
PFORM	SUBRUTINA	Formar los vectores de EF	16
PLOAD	SUBRUTINA	Construir los vectores de carga/inercia	16
PROPLD	SUBRUTINA	Introducir o calcular valores de carga proporcional	15
PRTDIS	SUBRUTINA	Imprimir desplazamientos nodales	15
PRTERR	SUBRUTINA	Imprimir valores de estimación de error	15
PRTREA	SUBRUTINA	Imprimir reacciones nodales y sumas	15
PRTSTR	SUBRUTINA	Imprimir tensiones nodales	15
PTRANS	SUBRUTINA	Transformar vectores para contornos inclinados	15
RAXPB	SUBRUTINA	Escalar por vector real más vector real	16
PARAM	SUBRUTINA	Introducir parámetros para algoritmos transitorios	16
SETCI	SUBRUTINA	Fijar parámetros para integración transitoria	16
UPDATE	SUBRUTINA	Actualizar los vectores solución	16

```
      subroutine pform(ul,xl,tl,ld,p,s,ie,d,id,x,ix,f,t,idl,
     1                 f0,u,b,ndf,ndm,nen1,nst)
c.... compute element arrays and assemble global arrays
      logical    afl,bfl,cfl,dfl,efl,hfl,hout,fl,pfr
      character*12 tfile
      integer*2 ld(ndf,1),ie(9,1),id(ndf,1),ix(nen1,1),idl(1),ia,im
      integer*4 itrec
      real      xl(ndm,1),x(ndm,1),f(ndf,1),f0(ndf,1),tl(1),t(1)
      real*8    d(18,1),p(1),s(nst,1),b(1),ul(ndf,1),u(ndf,1),dm,
     1          dun,un,prop
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /eldata/ dq,n,ma,mct,iel,nel
      common /fdata/ fl(11),pfr
      common /mdat2/ n11a,n11b,n11c,ia(2,11)
      common /ndata/ nv,nw,nl
      common /hdata/ nh1,nh2
```

```
      common /hdatb/ nhi,nhf,ihbuff,irec,jrec,nrec,hfl,hout
      common /prlod/ prop,ap(6,10),iexp(10),ik(10),npld
      common /tbeta/ beta,gamm,theta,nop,nt
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      common /xdata/ isw,nn1,nn2,nn3,afl,bfl,cfl,dfl
      common dm(1),rm(1),im(1)
c.... set up local arrays before calling element library
      iel = 0
      tm  = 1. - theta
      efl = .false.
      if(.not.dfl.and.isw.eq.6) efl = .true.
      if(bfl.and.isw.eq.3)      efl = .true.
      if(isw.ne.3.or.nn1.eq.1)  irec = 0
      ne2 = nen + nen
      ne3 = nen + ne2
      ne4 = nen + ne3
      nt0 = nt  - 1
      nt1 = nt0 + ndf*numnp
      numnp2 = numnp + numnp
      do 110 nu = 1,numel
       n = idl(nu)
       if( (n.ge.nn1 .and. n.le.nn2) .and. (mod(n-nn1,nn3).eq.0) ) then
c.... set up history terms
         ma  = ix(nen1,n)
         nh1 = ix(nen+1,n)
         nh2 = nh1
         if(.not.hfl) then
           jrec= ix(nen+2,n)
           if(jrec.ne.irec) then
             if(hout .and. irec.ne.0) then
               call phstio(3,irec,dm(nhi),nhf-nhi+1,2,tfile(2),itrec(2))
             endif
             call phstio(3,jrec,dm(nhi),nhf-nhi+1,1,tfile(2),itrec(2))
             irec = jrec
           endif
         endif
         call pconsd(ul,5*nen*ndf,0.0d0)
         call pconsr(xl,nen*ndm,0.0)
         call pconsr(tl,nen,0.0)
         call pconsr(rm(n11a),nen,0.0)
         call pconsi(ld,nst,0)
         un = 0.0
         dun= 0.0
         call pangl(ix(1,n),nen,rm(n11a),rm(n11b),nrot)
         do 108 i = 1,nen
           ixi= ix(i,n)
           ii = abs(ixi)
           if(ii.gt.0) then
             iid = ii*ndf - ndf
             nel = i
             tl(i) = t(ii)
             do 106 j = 1,ndm
               xl(j,i) = x(j,ii)
106          continue
             do 107 j = 1,ndf
               jj = ie(j,ma)
               if(jj.le.0) go to 107
```



```
               ijj     = iid + jj
               k       = id(jj,ii)
               ul(j,i) = u(jj,ii)
               ul(j,i+nen) = u(jj,ii+numnp)
               ul(j,i+ne2) = u(jj,ii+numnp2)
               if(fl(9)) ul(j,i+ne3) = dm(nv+ijj)
               if(k.le.0) then
                 ul(j,i+ne4) = theta*rm(nt1+ijj)+tm*rm(nt0+ijj)-u(jj,ii)
                 dun = max(dun,abs(ul(j,i+ne4)))
               endif
               un = max(un,abs(ul(j,i)))
               if(dfl) then
                 ld(j,i) = ijj
               else
                 ld(j,i) = sign(k,ixi)
               endif
107          continue
           endif
108      continue
c.... form element array
         dq  = prop
         if(ie(7,ma).ne.iel) mct = 0
         iel = ie(7,ma)
         isx = isw
         if(efl .and. dun.gt.0.0000001d0*un .and. .not.afl) isx = 3
         if(nrot.gt.0)
     1   call ptrans(ia(1,iel),rm(n11a),ul,p,s,nel,nen,ndf,nst,1)
         call elmlib(d(1,ma),ul,xl,ix(1,n),tl,s,p,ndf,ndm,nst,iel,isx)
         if(nrot.gt.0)
     1   call ptrans(ia(1,iel),rm(n11a),ul,p,s,nel,nen,ndf,nst,2)
c.... modify for non-zero displacement boundary conditions
         if(efl) call modify(p,s,ul(1,ne4+1),nst)
c.... assemble a vector if needed
         if(bfl) then
           do 109 i = 1,nst
             j = abs(ld(i,1))
             if(j.ne.0) b(j) = b(j) + p(i)
109        continue
         endif
       endif
110   continue
c.... put the last history state on the disk
      if(hout) call phstio(3,jrec,dm(nhi),nhf-nhi+1,2,tfile(2),itrec(2))
      end
c
      subroutine pload(id,fn,b,nn,xm,ac)
c.... form load vector in compact form
      logical fl,pfr
      integer*2 id(*)
      real fn(nn,2)
      real*8 b(*),xm(*),ac(*)
      common /fdata/ fl(11),pfr
      common /tbeta/ beta,gamm,theta,nop,nt
      fl(11) = .false.
      call pconsd(b,nn,0.0d0)
      do 100 n = 1,nn
        j = id(n)
```

```
          if(j.gt.0) then
            b(j) = theta*fn(n,2) + (1. - theta)*fn(n,1) + b(j)
            if(fl(9)) b(j) =  b(j) - xm(j)*ac(n)
          endif
100   continue
      end
c
      subroutine raxpb (a,b,x,n,c)
      real   a(1),b(1),c(1)
      real*8 x
c... vector times scalar added to second vector
      do 10 k=1,n
        c(k) = a(k)*x +b(k)
   10 continue
      end
c
      subroutine param(ctl,ct)
c.... set appropriate time integration parameters
      logical     pcomp
      character*4 ctl
      real        ct(3)
      common /iofile/ ior,iow
      common /tbeta/ beta,gamm,theta,nop,nt
c.... set the integration parameters
      beta = ct(1)
      gamm = ct(2)
c.... ss11 algorithm
      if(pcomp(ctl,'ss11')) then
        nop = 1
        if(beta.le.0.0) beta = 0.50
        write(iow,2001) beta
        if(ior.lt.0) write(*,2001) beta
        theta = beta
c.... ss22 algorithm
      elseif(pcomp(ctl,'ss22')) then
        nop = 2
        if(beta.le.0.0) beta = 0.50
        if(gamm.le.0.0) gamm = 0.50
        write(iow,2002) beta,gamm
        theta = gamm
        if(ior.lt.0) write(*,2002) beta,gamm
c.... newmark algorithm
      else
        nop = 3
        if(beta.le.0.0) beta = 0.25
        if(gamm.le.0.0) gamm = 0.50
        write(iow,2003) beta,gamm
        if(ior.lt.0) write(*,2003) beta,gamm
        theta = beta
      endif
2001  format(' SS-11 Method Parameter: theta = ',f9.4)
2002  format(' SS-22 Method Parameters'/
     1       ' theta-1 = ',f9.4,' ;  theta-2 = ',f9.4)
2003  format(' Newmark Method Parameters'/
     1       ' beta = ',f9.4,' ;  gamma = ',f9.4)
      end
c
      subroutine setci(ior)
c.... compute integration constants 'c1' to 'c5' for current 'dt'
```



```
      common /tbeta/ beta,gamm,theta,nop,nt
      common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
      if(dt.le.0.0) then
        write(*,2000)
        if(ior.gt.0) stop
        return
      endif
c.... compute integration constants 'c1' to 'c5' for current 'dt'
      if(nop.eq.1) then
        c1 = 1.d0/(beta*dt)
        c2 = c1
        c3 = 1.d0/beta
        c6 = beta
      elseif(nop.eq.2) then
        c5 = 2.d0/(gamm*dt)
        c1 = c5/dt
        c2 = c5*beta
        c3 = dt*beta
        c6 = gamm
      else
        c1 = 1.d0/(beta*dt*dt)
        c2 = gamm/(dt*beta)
        c3 = 1.d0 - 1.d0/(beta+beta)
        c4 = 1.d0 - gamm/beta
        c5 = (1.d0 - gamm/(beta+beta))*dt
        c6 = dt*c1
      endif
2000  format(' **ERROR** Input DT as nonzero number.')
      end
c
      subroutine update(id,fn,u,v,du,nneq,fdyn,isw)
c.... update the displacements (and velocities and accelerations)
      logical fdyn
      integer*2 id(*)
      real      fn(nneq,2)
      real*8    u(nneq,*),v(nneq,*),du(*),ur1,ur2,dot
      common /iofile/ ior,iow
      common /tbeta/ beta,gamm,theta,nop,nt
      common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
c.... update solution vectors to begin a step
      if(isw.eq.1) then
        ur1 = sqrt(dot(v(1,1),v(1,1),nneq))
        ur2 = sqrt(dot(v(1,2),v(1,2),nneq))
        write(iow,2000) ur1,ur2
        if(ior.lt.0) write(*,2000) ur1,ur2
        do 100 n = 1,nneq
c....   ss11 algorithm u=u-bar; v1=v-bar; v2=a=abar; v3=u;
          if(nop.eq.1) then
            u(n,1) = v(n,3)
            v(n,1) = 0.0d0
            v(n,2) = 0.0d0
c....   ss22 algorithm u=u-bar; v1=v-bar; v2=a=abar; v3=u; v4=v
          elseif(nop.eq.2) then
            u(n,1) = v(n,3) + c3*v(n,4)
            v(n,1) = v(n,4)
            v(n,2) = 0.0d0
            v(n,3) = v(n,3) + dt*v(n,4)
c....   newmark algorithm
```

```
          else                                                   upd 29
            ur2    = - c6*v(n,1) + c3*v(n,2)                     upd 30
            v(n,1) =   c4*v(n,1) + c5*v(n,2)                     upd 31
            v(n,2) =   ur2                                       upd 32
          endif                                                  upd 33
100     continue                                                 upd 34
      else                                                       upd 35
c.... update displacement and its increments within the time step upd 36
        ur2 = 1. - theta                                         upd 37
        do 200 n = 1,nneq                                        upd 38
          j = id(n)                                              upd 39
          if (j.gt.0) then                                       upd 40
c.... for the active degrees-of-freedom compute values from solution upd 41
            u(n,1) = du(j) + u(n,1)                              upd 42
            u(n,2) = du(j) + u(n,2)                              upd 43
            u(n,3) = du(j)                                       upd 44
          else                                                   upd 45
c.... for the fixed degrees-of-freedom compute values from forced inputsupd 46
            ur1    = theta*fn(n,2) + ur2*fn(n,1)                 upd 47
            u(n,3) = ur1    - u(n,1)                             upd 48
            u(n,2) = u(n,2) + u(n,3)                             upd 49
            u(n,1) = ur1                                         upd 50
          endif                                                  upd 51
200     continue                                                 upd 52
c.... for time dependent solutions update the rate terms          upd 53
        if(fdyn) then                                            upd 54
          do 210 n = 1,nneq                                      upd 55
            v(n,1) = v(n,1) + c2*u(n,3)                          upd 56
            v(n,2) = v(n,2) + c1*u(n,3)                          upd 57
c....   ss11 algorithm                                           upd 58
            if(nop.eq.1) then                                    upd 59
              v(n,3) = v(n,3) + c3*u(n,3)                        upd 60
c....   ss22 algorithm                                           upd 61
            elseif(nop.eq.2) then                                upd 62
              v(n,3) = v(n,3) + c4*u(n,3)                        upd 63
              v(n,4) = v(n,4) + c5*u(n,3)                        upd 64
            endif                                                upd 65
210       continue                                               upd 66
        endif                                                    upd 67
      endif                                                      upd 68
2000  format('   N o r m s   f o r   D y n a m i c s'/           upd 69
     1   10x,'Velocity:',e13.5,' Acceleration:',e13.5)           upd 70
      end                                                        upd 71
```


(*c*) El archivo PCMAC3.FOR contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítu*
ACHECK	SUBRUTINA	Procesador de datos alfanuméricos	15
CKISOP	SUBRUTINA	Comprobación de elementos isoparamétricos	15
DOT	FUNCION	Producto escalar de vectores	15
ELMLIB	SUBRUTINA	Librería de elementos	15
PCONSD	SUBRUTINA	Igualar un vector REAL*8 a una constante	15
PSCONSI	SUBRUTINA	Igualar un vector INTEGER a una constante	15
PCONSR	SUBRUTINA	Igualar un vector REAL a una constante	15
PDISK	SUBRUTINA	Añadir el carácter de un disco a nombre de archivo	15
PEND	SUBRUTINA	Imprimir error al leer el final de archivo	15
PERROR	SUBRUTINA	Imprimir por error de lectura	15
PGAUSS	SUBRUTINA	Posiciones/pesos de puntos de Gauss para problemas bidimensionales	15
PHELP	SUBRUTINA	Imprimir información de ayuda al usuario	15
PSETM	SUBRUTINA	Asignaciones de apuntadores vectoriales	15
PSTRES	SUBRUTINA	Determinación de tensiones principales en dos dimensiones	15
SAXPB	SUBRUTINA	Escalar por vector más vector	15
SHAP2	SUBRUTINA	Determinación de funciones de forma bicuadráticas bidimensionales	15
SHAPE	SUBRUTINA	Determinación de funciones de forma bilineales bidimensionales	15

(*d*) El archivo PCEIGN.FOR, que es completamente nuevo en este volumen, contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
SUBSP	SUBRUTINA	Algoritmo principal de subespacio	16
CHLBAC	SUBRUTINA	Sustitución hacia atrás de Choleski	16
CHLFWD	SUBRUTINA	Solución hacia adelante de Choleski	16
CHLFAC	SUBRUTINA	Descomposición de Choleski	16
COLBAC	SUBRUTINA	Rutina de sustitución hacia atrás	16
EISQL	SUBRUTINA	Solución del problema de autovalores estándar	16
GEIG	SUBRUTINA	Solución del problema de autovalores general	16
NUMASS	SUBRUTINA	Contar el número de masas	16
SCALEV	SUBRUTINA	Escalar un vector a longitud unitaria	16
SPROJA	SUBRUTINA	Proyectar matriz **K**	16
SPROJB	SUBRUTINA	Proyectar matriz **M**	65
WPROJM	SUBRUTINA	Imprimir las matrices proyectadas	16

```
      subroutine subsp(b,v,g,h,d,dp,dtol,p,z,nf,nev,neq,
     1                 shift,tol,prt,its)
c
c.... subspace iteration to extract the lowest nf eigenpairs
c
      real*8 b(1),v(neq,1),g(1),h(1),d(1),dp(1),
     1       dtol(1),p(nev,1),z(neq,1),dm,tolmx,told
      logical conv,prt
      common /iofile/ ior,iow
      data ipd/4/
c
c.... compute the initial iteration vectors
c
      call pconsd(v,nev*neq,0.0d0)
      nmas = 0
      do 100 n = 1,neq
c.... count the number of nonzero masses
        if(b(n).ne.0.0d0) nmas = nmas + 1
100   continue
      nmas = nmas/nev
      i = 0
      j = 1
      do 110 n = 1,neq
        dm = b(n)
        if(dm.ne.0.0d0) then
          v(n,j) = dm
          i = i + 1
          if(mod(i,nmas).eq.0) j = j + 1
          j = min(j,nev)
        endif
110   continue
      do 120 i = 1,nev
        dp(i)   = 0.0d0
```



```
        dtol(i) = 1.0d0
        call scalev(v(1,i),neq)
120   continue
c
c.... compute the new vectors and project 'a' onto 'g'
      told  = tol
      conv  = .false.
      itlim = its
      if(nev.eq.nf) itlim = 1
      do 300 it = 1,itlim
        itt = it
c
c.... project the 'b' matrix to form 'h' and compute 'z' vectors
        call sprojb(b,v,z,h,neq,nev)
c
c.... project the 'a' matrix to form 'g'
        call sproja(v,z,g,neq,nev,ipd)
c
c.... solve the reduced eigenproblem 'g*p = h*p*d'
        call geig(g,h,d,p,v,nev,prt)
c
c.... check for convergence
        tolmx = 0.0d0
        do 200 n = 1,nev
          if(d(n).ne.0.0d0) dtol(n) = abs((d(n)-dp(n))/d(n))
          dp(n) = d(n)
          if(n.le.nf) tolmx = max(tolmx,dtol(n))
200     continue
        if(prt) then
          write(iow,2000) it,(d(n),n=1,nev)
          if(ior.lt.0) write(*,2000) it,(d(n),n=1,nev)
          if(itlim.gt.1) write(iow,2003) (dtol(n),n=1,nev)
          if(ior.lt.0.and.itlim.gt.1)
     1      write(*,2003) (dtol(n),n=1,nev)
        else
          if(ior.lt.0) write(*,2004) it,tolmx
        endif
c..... tolerance check
        do 210 n = 1,nf
          if(dtol(n).gt.told) go to 220
210     continue
        conv = .true.
c
c... divide eigenvectors by eigenvalue to prevent overflows
220     do 235 i = 1,nev
          dm = d(i)
          if(p(i,i).lt.-0.00001d0) dm = -dm
          do 230 j = 1,nev
            p(j,i) = p(j,i)/dm
230       continue
235     continue
c
c.... compute the new iteration vector 'u' from 'z'
        do 250 i = 1,neq
        do 250 j = 1,nev
          v(i,j) = 0.0d0
          do 240 k = 1,nev
            v(i,j) = v(i,j) + z(i,k)*p(k,j)
240       continue
250     continue
        if(conv) go to 305
300   continue
```

```
c
c.... scale the vectors to have maximum element of 1.0
305   do 310 n = 1,nev
        d(n)  = 1.0/d(n) + shift
        dp(n) = sqrt(abs(d(n)))
        call scalev(v(1,n),neq)
310   continue
      write(iow,2001) itt,(d(n),n=1,nev)
      write(iow,2002)     (dp(n),n=1,nev)
      if(itt.gt.1) write(iow,2003) (dtol(n),n=1,nev)
      if(ior.lt.0) then
        write(*,2001) itt,(d(n),n=1,nev)
        write(*,2002)     (dp(n),n=1,nev)
        if(itt.gt.1) write(*,2003) (dtol(n),n=1,nev)
      endif
2000  format(/5x,'Current reciprocal shifted eigenvalues, iteration',
     1          i4/(4d20.8))
2001  format(/5x,'Solution  for  eigenvalues, iteration',i4/(4d20.8))
2002  format( 5x,'Square root of eigenvalues'/(4d20.8))
2003  format( 5x,'Current residuals'/(4d20.8))
2004  format( 5x,'End of iteration',i3,' Max tol =',1p1e11.4)
      end
c
      subroutine chlbac(u,s,nn)
      real*8 u(1),s(nn,nn)
c
c.... compute eigenvalues of general linear problem by backsubstitution
      j  = nn
      jd = nn*(nn+1)/2
      do 100 i = 1,nn
        s(nn,i) = s(nn,i)/u(jd)
100   continue
200   jd = jd - j
      j  = j - 1
      if(j.le.0) return
      do 300 i = 1,nn
        call colbac(u(jd+1),s(1,i),u(jd),j)
300   continue
      go to 200
      end
c
      subroutine chlfwd(u,g,s,nn)
c
c.... use the choleski factors to project onto a standard eigenproblem
      real*8 u(1),g(1),s(nn,nn),dot
      s(1,1) = g(1)/u(1)
      if(nn.eq.1) go to 300
      id = 1
      do 200 i = 2,nn
        s(1,i) = g(id+1)/u(1)
        im     = i - 1
        jd     = 0
        do 100 j = 1,im
          s(i,j)           = (g(id+j) -dot(u(id+1),s(1,j),im))/u(id+i)
          if(j.gt.1) s(j,i) = (g(id+j) -dot(u(jd+1),s(1,i),j-1))/u(jd+j)
          jd               = jd + j
100     continue
        id     = id + i
        s(i,i) = (g(id) - dot(u(id-im),s(1,i),im))/u(id)
200   continue
c
```



```
c.... complete projection
300   g(1) = s(1,1)/u(1)
      if(nn.eq.1) return
      jd = 2
      do 500 j = 2,nn
        g(jd) = s(j,1)/u(1)
        id    = 2
        do 400 i = 2,j
          im       = i - 1
          g(jd+im) = (s(j,i) - dot(u(id),g(jd),im))/u(id+im)
          id       = id + i
400     continue
        jd = jd + j
500   continue
      end
c
      subroutine chlfac(a,nn)
c
c.... choleski factorization of a symmetric, positive definite matrix
      real*8 a(1),dot
      a(1) = sqrt(a(1))
      if(nn.eq.1) return
      jd = 1
      do 200 j = 2,nn
        jm = j - 1
        id = 0
        do 100 i = 1,jm
          if(i-1.gt.0) a(jd+i) = a(jd+i) - dot(a(id+1),a(jd+1),i-1)
          id      = id + i
          a(jd+i) = a(jd+i)/a(id)
100     continue
        a(jd+j) = sqrt(a(jd+j) - dot(a(jd+1),a(jd+1),jm))
        jd      = jd + j
200   continue
      end
c
      subroutine colbac(u,s,d,jj)
c
c.... backsubstitution macro
      real*8 u(1),s(1),d,dd
      dd = s(jj+1)
      do 100 j = 1,jj
        s(j) = s(j) - dd*u(j)
100   continue
      s(jj) = s(jj)/d
      end
c
      subroutine eisql(a,d,e,z,n,ierr)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8 a(1),d(1),e(1),z(n,n),machep
      data machep/0.222044605d-15/
c
c.... eispac ql algorithm: adapted from 'tred2' and 'tql2'
      n2 = 0
      do 100 i = 1,n
      do 100 j = 1,i
        n2     = n2 + 1
        z(i,j) = a(n2)
100   continue
      if(n.eq.1) go to 320
      n2 = n + 2
```

```
      do 300 ii = 2,n
        i     = n2 - ii
        l     = i - 1
        h     = 0.0d0
        scale = 0.0d0
        if(l.lt.2) go to 130
        do 120 k = 1,l
          scale = scale + abs(z(i,k))
120     continue
        if(scale.ne.0.0d0) go to 140
130     e(i) = z(i,l)
        go to 290
140     do 150 k = 1,l
          z(i,k) = z(i,k)/scale
          h      = h + z(i,k)*z(i,k)
150     continue
        f      = z(i,l)
        g      = -sign(sqrt(h),f)
        e(i)   = scale*g
        h      = h - f*g
        z(i,l) = f - g
        f      = 0.0d0
        do 240 j = 1,l
          z(j,i) = z(i,j)/h
          g      = 0.0d0
          do 180 k = 1,j
            g = g + z(j,k)*z(i,k)
180       continue
          jp1 = j + 1
          if(l.lt.jp1) go to 220
          do 200 k = jp1,l
            g = g + z(k,j)*z(i,k)
200       continue
220       e(j) = g/h
          f    = f + e(j)*z(i,j)
240     continue
        hh = f/(h+h)
        do 270 j = 1,l
          f    = z(i,j)
          g    = e(j) - hh*f
          e(j) = g
          do 260 k = 1,j
            z(j,k) = z(j,k) - f*e(k) - g*z(i,k)
260       continue
270     continue
290     d(i) = h
300   continue
c.... set transformation array for ql
320   d(1)   = z(1,1)
      z(1,1) = 1.0d0
      e(1)   = 0.0d0
      ierr   = 0
      if(n.eq.1) go to 950
      do 500 i = 2,n
        l = i - 1
        if(d(i).eq.0.0d0) go to 380
        do 370 j = 1,l
          g = 0.0d0
          do 340 k = 1,l
            g = g + z(i,k)*z(k,j)
340       continue
```



```
          do 360 k = 1,l
            z(k,j) = z(k,j) - g*z(k,i)
360       continue
370     continue
380     d(i)   = z(i,i)
        z(i,i) = 1.0d0
        do 400 j = 1,l
          z(i,j) = 0.0d0
          z(j,i) = 0.0d0
400     continue
500   continue
c.... begin 'ql' algorithm on tridagonal matrix
      do 600 i = 2,n
        e(i-1) = e(i)
600   continue
      f    = 0.0d0
      b    = 0.0d0
      e(n) = 0.0d0
      do 840 l = 1,n
        j = 0
        h = machep*(abs(d(l)) + abs(e(l)))
        if(b.lt.h) b = h
        do 710 m = l,n
          if(abs(e(m)).le.b) go to 720
710     continue
720     if(m.eq.l) go to 820
730     if(j.eq.30) go to 1000
        j    = j + 1
        l1   = l + 1
        g    = d(l)
        p    = (d(l1)-g)/(e(l)+e(l))
        r    = sqrt(p*p+1.0d0)
        d(l) = e(l)/(p+sign(r,p))
        h    = g - d(l)
        do 740 i = l1,n
          d(i) = d(i) - h
740     continue
        f   = f + h
        p   = d(m)
        c   = 1.0d0
        s   = 0.0d0
        mml = m - 1
        do 800 ii = 1,mml
          i = m - ii
          g = c*e(i)
          h = c*p
          if(abs(p).ge.abs(e(i))) then
            c      = e(i)/p
            r      = sqrt(c*c+1.0d0)
            e(i+1) = s*p*r
            s      = c/r
            c      = 1.0d0/r
          else
            c      = p/e(i)
            r      = sqrt(c*c+1.0d0)
            e(i+1) = s*e(i)*r
            s      = 1.0d0/r
            c      = c*s
          endif
          p      = c*d(i) - s*g
```

```
          d(i+1) = h + s*(c*g + s*d(i))
          do 780 k = 1,n
            h        = z(k,i+1)
            z(k,i+1) = s*z(k,i) + c*h
            z(k,i  ) = c*z(k,i) - s*h
780       continue
800     continue
        e(l) = s*p
        d(l) = c*p
        if(abs(e(l)).gt.b) go to 730
820     d(l) = d(l) + f
840   continue
      do 900 ii = 2,n
        i = ii - 1
        k = i
        p = d(i)
        do 860 j = ii,n
        if(abs(d(j)).gt.abs(p)) then
          k = j
          p = d(j)
        endif
860     continue
        if(k.ne.i) then
          d(k) = d(i)
          d(i) = p
          do 880 j = 1,n
            p      = z(j,i)
            z(j,i) = z(j,k)
            z(j,k) = p
880       continue
        endif
900   continue
950   return
1000  ierr = 1
      end
c
      subroutine geig(g,h,d,p,t,nev,prt)
c
c.... solve the general eigenproblem 'g*p = h*p*d'
      logical prt
      real*8 g(1),h(1),d(1),p(nev,1),t(1)
c
c.... compute the choleski factors of 'h'
      if(prt) call wprojm(g,nev,1)
      if(prt) call wprojm(h,nev,2)
      call chlfac(h,nev)
c
c.... compute the standard eigenvalue problem matrix 'c'
      call chlfwd(h,g,p,nev)
c
c.... perform the eignfunction decomposition of 'c'
      call eisql(g,d,t,p,nev,ir)
c
c.... compute the vectors of the original problem
      call chlbac(h,p,nev)
      end
c
      subroutine numass(b,neq,mq)
      real*8 b(1)
      common /iofile/ ior,iow
      nn = 0
```



```
      do 10 n = 1,neq
        if(b(n).ne.0.0d0) nn = nn + 1
10    continue
      if(nn.lt.mq) write(iow,2000) nn
      if(ior.lt.0.and.nn.lt.mq) write(*,2000) nn
      mq = min(mq,nn)
2000  format(1x,'Subspace reduced to',i4,' by number of nonzero lumped',
     1          ' mass terms')
      end
c
      subroutine scalev(v,nn)
c
c.... scale a vector to have maximum element of 1.0
      real*8 v(1),vmax
      vmax = abs(v(1))
      do 100 n = 1,nn
        vmax = max(vmax,abs(v(n)))
100   continue
      do 110 n = 1,nn
        v(n) = v(n)/vmax
110   continue
      end
c
      subroutine sproja(v,z,g,neq,nev,ipd)
c
c.... compute the subspace projection of 'aa' to form 'g'
      real*8 v(neq,1),z(neq,1),g(1),aa,dot,engy,dimx,dimn
      common /adata/  aa(8000)
      common /frdata/ maxf
      common /nfrta/  dimx,dimn,nvb,npl
c.... forward reduce the eigenvector estimates
      ma = maxf*nev + 1
c.... copy vectors 'v' into 'z'
      do 100 i = 1,nev
      do 100 j = 1,neq
        z(j,i) = v(j,i)
100   continue
c.... solve the equations
      call rsolve(aa,z,aa(ma),ipd,maxf,nvb,neq,nev,engy,1)
c.... compute the projection of the stiffness
      k = 0
      do 200 j = 1,nev
      do 200 i = 1,j
        k    = k + 1
        g(k) = dot(v(1,i),z(1,j),neq)
200   continue
      end
c
      subroutine sprojb(b,v,t,h,neq,nev)
c
c.... compute the subspace projection of 'b' to form 'h'
      real*8 b(1),v(neq,1),t(1),h(1),dot
c.... compute 'z' and the 'b' projection to form 'h'
      do 130 j = 1,nev
c.... compute 'z'for a lumped mass
        do 100 i = 1,neq
          t(i) = v(i,j)*b(i)
100     continue
c.... project the'z' and 'v' vectors to form 'h'
        k = j*(j+1)/2
        do 110 i = j,nev
```

```
        h(k) = dot(t,v(1,i),neq)
        k    = k + i
110   continue
      do 120 i = 1,neq
        v(i,j) = t(i)
120   continue
130   continue
      end
c
      subroutine wprojm(a,nn,ia)
      character*1 ah(2)
      real*8 a(1)
      common /iofile/ ior,iow
      data ah(1),ah(2) /'g','h'/
      write(iow,2000) ah(ia)
      if(ior.lt.0) write(*,2000) ah(ia)
      i = 1
      do 100 n = 1,nn
        j = i + n - 1
        write(iow,2001) (a(k),k=i,j)
        if(ior.lt.0) write(*,2001) (a(k),k=i,j)
        i = i + n
100   continue
2000  format(1x,'Matrix ',a1)
2001  format(1p8d10.2)
      end
```


16.10.5 *Módulos de solución de ecuaciones.* En este volumen se incluyen dos opciones de solución de ecuaciones: (*a*) de banda variable y (*b*) método frontal. El solucionador de banda varible ha sido mejorado para permitir la solución de problemas en los cuales la matriz de coeficientes (tangente) sea no simétrica. No se han hecho cambios en el sistema de solución frontal; en consecuencia, sólo puede utilizarse para resolver problemas que tienen una matriz de coeficientes simétrica. Ambos sistemas de solución han sido mejorados para incluir la opción de resolución que se usa en el programa de valores propios incluido en PCFEIGN.FOR. Por tanto, al seleccionar una opción de solución es necesario cargar el solucionador (PASOLV.FOR o PFSOLV.FOR) y el programa de resolución (PARSOL.FOR o PFRSOL.FOR respectivamente).

(*a*) El archivo PASOLV.FOR contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
PSOLVE	SUBRUTINA	Controla la solución de las ecuaciones	16
DASBLY	SUBRUTINA	Ensambla los vectores en la banda variable	15
DASOL	SUBRUTINA	Resuelve las ecuaciones	15
DATEST	SUBRUTINA	Comprueba las ecuaciones	15
DATRI	SUBRUTINA	Realiza la descomposición triangular	15
DREDU	SUBRUTINA	Calcula las diagonales reducidas	15
PROFIL	SUBRUTINA	Calcula los números de las ecuaciones y el perfil	15

```
      subroutine psolve(u,a,b,dr,m,xm,s,ld,ig,idl,nst,nrs,afac,solv,
     1                  dyn,c1,ipd,rnorm,aengy,ifl)
c...  active column assembly and solution of equations
      logical afac,afl,solv,dyn,fl,fa
      character*12 tfile
      real*8 u(1),a(1),b(1),dr(1),xm(1),s(nst,1),aengy,rnorm,dot
      integer*2 m(1),ld(1),ig(1),idl(1)
      integer*4 itrec
      common /cdata/  numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /fdata/  fl(11)
      common /iofile/ ior,iow
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      data fa/.false./
c.... form and assemble the matrix
      if(afac) then
        if(fl(6)) then
          nep = neq + ig(neq)
          afl = .true.
        else
          nep = neq
```

```
          afl = .false.
        endif
        if(fl(3).or.fl(4)) then
          ibuf = ig(neq)+neq
          if(fl(3)) then
            ibuf  = ibuf + ig(neq)
            fl(3) = fa
          endif
          if(ibuf.gt.8000) stop 'profile too large'
          itrec(1) = ibuf*8
          open (4,file=tfile(1),status='new',access='direct',
     1          form='unformatted',recl=itrec(1))
          close(4)
          fl(4) = fa
        endif
        call pconsd(a,ibuf,0.0d0)
c.... modify tangent form lumped mass effects
        if(dyn) then
          do 310 n = 1,neq
            a(n)  =  c1*xm(n)
310       continue
        endif
        do 320 n = 1,numel
c...  compute and assemble element arrays
          ne = n
          call formfe(u,dr,.true.,solv,fa,fa,3,ne,ne,1)
          if(ior.lt.0 .and. mod(n,20).eq.0) write(*,2000) n
          call dasbly(s,s,ld,ig,nst,afl,afac,fa,dr,a(nep+1),a(neq+1),a)
320     continue
        rnorm = sqrt(dot(dr,dr,neq))
        call datri(a(nep+1),a(neq+1),a,ig,neq,afl)
        call phstio(4,1,a,ibuf,2,tfile(1),itrec(1))
      endif
      if(solv) then
        if(.not.afac) call phstio(4,1,a,ibuf,1,tfile(1),itrec(1))
        do 330 n = 1,nrs
          ne = (n-1)*neq + 1
          call dasol(a(nep+1),a(neq+1),a,dr(ne),ig,neq, aengy)
330     continue
      endif
2000  format(5x,'**',i4,' Elements completed.')
      end
```


(b) El archivo PFSOLV.FOR contiene los siguientes suprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
PSOLVE	SUBRUTINA	Solución frontal de ecuaciones	15
PBUFF	SUBRUTINA	Controla las operaciones I/O de disco	15
PFRTAS	SUBRUTINA	Ensambla los vectores en el frente	15
PRFTBK	SUBRUTINA	Solución por sustitución hacia atrás	15
PFRTFW	SUBRUTINA	Solución hacia adelante	15
PREFRT	SUBRUTINA	Cálculo de orden frontal	15
PROFIL	SUBRUTINA	Calcula los números de las ecuaciones y el tamaño del frente	15
PFRTB	SUBRUTINA	Macro de sustitución hacia atrás	15
PFRTD	SUBRUTINA	Descomposición trialgular	15
PFRTF	SUBRUTINA	Macro de solución hacia adelante	15

Nota: Puede ser necesario colocar las últimas tres subrutinas en un archivo separado para evitar avisos de compilación.

(*c*) El archivo PARSOL.FOR contiene el siguiente subprograma:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
RSOLVE	SUBRUTINA	Controla la resolución de ecuaciones para la opción de banda variable	16

```
      subroutine rsolve(b,dr,a,ipd,maxf,nv,neq,nev,engy,ifl)
c.... resolution for profile solution
      real*8    a(1),b(1),dr(neq,1),engy,dm
      real      rm
      integer*2 im
      common dm(1),rm(1),im(1)
c
      n12 = neq*ipd - ipd - 1
      do 100 ne = 1,nev
        call dasol(a(neq+1),a(neq+1),a,dr(1,ne),im(n12),neq, engy)
100   continue
c
      end
```


(*d*) El archivo PFRSOL.FOR contiene el siguiente subprograma:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
RSOLVE	SUBRUTINA	Controla la resolución de ecuaciones para la opción frontal	16

```
      subroutine rsolve(b,dr,m,ipd,maxf,nv,neq,nev,aengy,ifl)
c.... resolution for frontal solution
      real*8 b(maxf,1),dr(neq,1),aengy
      integer*2 m(1)
      integer*4 itrec
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      ibuf = (itrec(1) - 4)/2
      call pfrtfw(b,dr,m,ipd,ibuf,maxf,nv,neq,nev,ifl)
      call pfrtbk(b,dr,m,ipd,ibuf,maxf,nv,neq,nev,aengy,ifl)
c
      end
```

16.10.6 *Módulo de dibujo.* La interfase de dibujo para instalaciones en ordenadores personales puede conseguirse utilizando el Graphical Development Toolkit (GDT),[13] tal como se describió en el Volumen 1, o utilizando la interfase gráfica de Microsoft Fortran Version 5.0, que se da en los listados de 16.10.6(*b*). De forma alternativa, el programa se puede instalar en cualquier ordenador que tenga una interfase compatible Tektronix 4012 utilizando las subrutinas dadas en 16.10.6(*c*). Con cualquiera de las interfases se pueden obtener dibujos de la malla no deformada y deformada en problemas bidimensionales. Además, se pueden dibujar los vectores propios para esta clase de problemas. La configuración deformada se construye añadiendo el valor de los primeros grados de libertad a las correspondientes coordenadas. Puede ser necesario escalar la deformación para mejorar las características del dibujo.

(*a*) El archivo PCPLOT.FOR contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
PPLOTF	SUBRUTINA	Controla la secuencia de dibujo	16
DPLOT	SUBRUTINA	Dibuja líneas en la pantalla	15
PDEVCL	SUBRUTINA	Cierra el dibujo y retorna al macro	15
PDEVOP	SUBRUTINA	Abre el dibujo, dibuja la frontera	15
PLOTL	SUBRUTINA	Escala el dibujo en la pantalla	16
FRAME	SUBRUTINA	Determina los factores de escala	16
PDEFM	SUBRUTINA	Calcula las coordenadas del dibujo de la deformada	15
PLINE	SUBRUTINA	Dibuja la malla o el contorno	15

```
      subroutine pplotf(x,ix,b,lci,ct,ndf,ndm,nen1,nneq)
c.... plot control subroutine for feap
      logical pcomp,oflg
      character lci*4
      integer*2 ixy,devnam,status,vslcol,il,ix(1),coli
      real    x(ndm,1),ct(2)
      real*8 dm,b(1)
      common dm(1)
      common /adata/ dr(1),il(31998)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /pdata2/ ixy(4),devnam
c.... open kernel system and plot mesh or outline of parts
      call pdevop(devnam)
      call frame(x,ndm,numnp)
c.... plot mesh or outline of parts
      oflg = .not.pcomp(lci,'outl')
      if(ct(1).ne.0.0.or.pcomp(lci,'eigv')) then
        ic = 2
        if(ct(1).eq.0.0) ct(1) = 1.0
      else
        ic = 1
      endif
      c  = 0.0
      n1 = 2*ndm*numnp
```



```
      do 100 i = ic,1,-1
        coli   = 8 - 2*i
        status = vslcol(devnam,coli)
        if(pcomp(lci,'eigv')) then
          call pdefm(x,dm,c,ndm,ndf,numnp, dr)
        else
          call pdefm(x, b,c,ndm,ndf,numnp, dr)
        endif
        call pline(dr,ix,il(n1),numnp,numel,ndm,nen1,nen,ct(2),oflg)
        c  = ct(1)
100   continue
c.... close plot
      call pdevcl(devnam)
      end
c
      subroutine plotl(x1,x2,x3,ipen)
c.... line drawing command
      common /pdata1/ scale,dx(2),sx(2)
c.... compute the normal coordinates
      s1 = max(0.0,min(1.45,scale*(x1 + x1 - sx(1)) + 0.725))
      s2 = max(0.0,min(1.00,scale*(x2 + x2 - sx(2)) + 0.500))
      call dplot(s1,s2,ipen)
      end
c
      subroutine frame(x,ndm,numnp)
c.... compute scaling for plot area
      logical iflg
      real      x(ndm,1),xmn(2),xmx(2),xmin(3),xmax(3)
      common /pdata1/ scale,dx(2),sx(2)
c.... determine window coordinates
      if(ndm.eq.1) then
        dx(2) = 0.
        sx(2) = 0.0
      endif
      ii = min(ndm,3)
      ij = min(ndm,2)
c.... find the minimum and maximum coordinate of input nodes
      iflg = .true.
      do 104 n = 1,numnp
        if(x(1,n).ne. -999.) then
          if(iflg) then
            do 100 i = 1,ii
              xmin(i) = x(i,n)
              xmax(i) = x(i,n)
100         continue
            iflg = .false.
          else
            do 102 i = 1,ii
              xmin(i) = min(xmin(i),x(i,n))
              xmax(i) = max(xmax(i),x(i,n))
102         continue
          endif
        endif
104   continue
      scale  = max(xmax(1)-xmin(1),xmax(2)-xmin(2))
c.... plot region determination
      do 110 i = 1,ij
        xmn(i) = min(xmin(i),xmax(i))
        xmx(i) = max(xmin(i),xmax(i))
        dx(i) = xmx(i) - xmn(i)
        sx(i) = xmx(i) + xmn(i)
```

```
110   continue
c.... rescale window
      if(dx(1).gt.1.45*dx(2)) then
        xmn(2) = (sx(2) - dx(1))/2.0
        xmx(2) = (sx(2) + dx(1))/2.0
        fact   = 0.58
      else
        xmn(1) = (sx(1) - dx(2))/2.0
        xmx(1) = (sx(1) + dx(2))/2.0
        fact   = 0.40
      endif
      do 112 i = 1,ij
        xmin(i) = max(xmin(i),xmn(i)) - scale/100.
        xmax(i) = min(xmax(i),xmx(i)) + scale/100.
112   continue
c.... reset values for deformed plotting
      scale  = max(xmax(1)-xmin(1),xmax(2)-xmin(2))
      do 114 i = 1,ij
        xcen = xmax(i)+xmin(i)
        xmax(i) = (xcen + 1.1*scale)/2.
        xmin(i) = (xcen - 1.1*scale)/2.
114   continue
      scale = fact/scale
      end
```


(*b*) El archivo PCFOR5.FOR puede usarse para comunicar el programa con las posibilidades gráficas contenidas en la librería Microsoft Fortran Version 5.0. Las rutinas se han escrito utilizando los nombres GDT para simplificar el proceso. El archivo contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
VOPNWK	FUNCION	Abrir el dibujo	16
VCLRWK	FUNCION	Borrar el dibujo de la pantalla	16
VCLSWK	FUNCION	Cerrar el dibujo	16
VRQSTR	FUNCION	Leer un carácter	16
VSLCOL	FUNCION	Asignar color a una línea	16
VPLINE	FUNCION	Dibujar una línea	16
VENCUR	FUNCION	Retornar al modo de texto	16

```
      include 'fgraph.fi'
c
      integer*2 function vopnwk(wkin,devnam,wkout)
      implicit integer*2 (a-z)
      include 'fgraph.fd'
      logical lfil
      integer*2 wkin(*),wkout(*)
      record /videoconfig/ myscreen
      common /instl2/ jfill,jplot,lfil
      common /vgraph/ idxl,idyl
c.....open the workstation, home cursor, set up scaling
      call getvideoconfig(myscreen)
      status = setvideomode( $MAXRESMODE )
      call getvideoconfig( myscreen )
      ixln   = myscreen.numxpixels - 1
      iyln   = myscreen.numypixels - 1
      idxl   = 32640.0/(ixln+1) + 0.5
      idyl   = 22480.0/(iyln+1) + 0.5
      jfill  = 2
      if(myscreen.numcolors .le. 4) jfill = 1
      status = displaycursor ( $GCURSOROFF )
      vopnwk = 0
      end
c
      integer*2 function vclrwk(devnam)
      implicit integer*2 (a-z)
      include 'fgraph.fd'
c.....clear the workstation and home cursor
      call clearscreen( $GCLEARSCREEN )
      vclrwk = displaycursor( $GCURSOROFF )
      end
c
      integer*2 function vclswk(devnam)
      implicit integer*2 (a-z)
      include 'fgraph.fd'
      record /rccoord / s
c.... home cursor - text mode
      call settextposition( 1 , 1 , s )
      vclswk = displaycursor( $GCURSORON )
      vclswk = setvideomode ( $TEXTC80 )
      vclswk = settextcursor( #0607 )
```

```
      vclswk = settextcolor(7)
      end
c
      integer*2 function vrqstr(devnam,len,echoh,ixy,cstr)
c.... input a single character
      character*1 cstr
      read(*,1000) cstr
1000  format(a1)
      vrqstr = 0
      end
c
      integer*2 function vslcol(devnam,it)
      implicit integer*2 (a-z)
      include 'fgraph.fd'
      logical lfil
      integer*2 ipal(7)
      common /instl2/ jfill,jplot,lfil
c.... set line color
      data ipal/ 15, 4, 2, 1, 14, 3, 5/
      if(it.gt.0 .and. it.le.7) then
        icll = ipal(it)
        if(jfill.lt.2) icll = 1
      else
        icll = 0
      endif
      vslcol = setcolor( icll )
      vslcol = displaycursor( $GCURSOROFF )
      end
c
      integer*2 function vpline(devnam,npt,ixy)
      implicit integer*2 (a-z)
      include 'fgraph.fd'
      integer*2 ixy(2,*)
      record /xycoord/ xy
      common /vgraph/ idxl,idyl
c.... draw line
      call moveto( ixy(1,1)/idxl , (22200 - ixy (2,1))/idyl , xy )
      do 100 n = 2,npt
        vpline =  lineto(ixy(1,n)/idxl ,(22200 - ixy(2,n))/idyl )
100   continue
      vpline = displaycursor( $GCURSOROFF )
      end
c
      integer*2 function vencur(devnam)
      implicit integer*2 (a-z)
c.... display cursor
      vencur = displaycursor( $GCURSOROFF )
      end
```


(*c*) El archivo PCTEKT.FOR puede utilizarse para comunicar el programa con cualquier sistema que tenga una interfase grágica Tektronix 4012. La mayoría de las estaciones de trabajo de ingeniería tienen un emulador. El archivo contiene los siguientes subprogramas (la subrutina DPLOT reemplaza la del archivo PCPLOT para esta interfase):

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
VOPNWK	FUNCION	Abrir dibujo	16
VCLRWK	FUNCION	Borrar dibujo de la pantalla	16
VSLCOL	FUNCION	Seleccionar tipo de línea	16
VRQSTR	FUNCION	Leer un carácter	16
VENCUR	FUNCION	Retornar al modo de texto	16
VCLSWK	FUNCION	Cerrar dibujo	16
DPLOT	SUBRUTINA	Dibujar línea en pantalla	16
BRK4	SUBRUTINA	Generador del código Tektronix 4012	16

```
      integer*2 function vopnwk(wkin,devnam,wkout)
c.... open tektronix 4012 device
      vopnwk = 0
      end
c
      integer*2 function vclrwk(devnam)
c.... clear tektronix 4012 device
      write(*,1000) char(27),char(12)
1000  format(2a1)
      end
c
      integer*2 function vslcol(devnam,icol)
c.... set line type
      iln = 0
      if(icol.eq.4) iln = 3
      write(*,1000) char(27),char(iln+96)
1000  format(2a1)
      end
c
      integer*2 function vrqstr(devnam,i1,i2,ixy,xx)
c.... input character to quit plot
      character*1 xx
      read(*,1000) xx
1000  format(a1)
      end
c
      integer*2 function vencur(devnam)
c.... enter text mode with cursor
      write(   *,1000) char(31),char(27),char(50),char(27),
     .                 char(91),char(50),char(74)
1000  format(7a1)
      end
c
      integer*2 function vclswk(devnam)
c.... close tektronix 4012 device
      vclswk = 0
      end
c
```

```
      subroutine dplot(x,y,ipen)
      character str4*4,stro*4
      real      x,y
      common /tekt1/ stro
c.... tektronix 4012 device or emulator
c     pen command motions: ipen = 1, move to position x,y
c                          ipen = 2, drawline from to x,y
      jx1 = x*700
      jy1 = y*770
      call brk4(jx1,jy1,str4)
      if(ipen.eq.2) then
        write(*,1000) char(13),char(29),stro,str4
      endif
      stro = str4
c.... format statements
1000  format(2a1,2a4)
      end
c
      subroutine brk4(jx1,jy1, str)
      character*1 str(4)
c.... convert integers for tektronix 4012
      str(1) = char(32 + jy1/32)
      str(2) = char(96 + mod(jy1,32))
      str(3) = char(32 + jx1/32)
      str(4) = char(64 + mod(jx1,32))
      end
```


16.10.7 *Módulos de los elementos.* El Volumen 1 contiene los listados para cuatro módulos elementales que se pueden utilizar con el programa mejorado incluido en este volumen. En este volumen se incluyen cuatro elementos adicionales, que aumentan las capacidades del programa en el rango transitorio no lineal. El tipo de problemas que se trata con estos elementos y los formatos de entrada de datos asociados se han descrito en las Secciones 16.8 y 16.9. A continuación se incluye el listado de cada elemento.

(*a*) El archivo PCELM1.FOR contiene el módulo elemental para un modelo de viga lineal elástica o lámina axisimétrica. El comportamiento geométricamente no lineal se incluye utilizando medidas de deformación con términos cuadráticos de gradiente de desplazamiento.

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
ELMT01	SUBRUTINA	Rutina del elemento viga/lámina	16
BMAT01	SUBRUTINA	Cálculo de la matriz **B**	16
MATL01	SUBRUTINA	Entrada de las propiedades del material	16
MODL01	SUBRUTINA	Cálculo de la tensión y de los vectores tangentes	16
TRAN01	SUBRUTINA	Transformación a coordenadas globales	16

```
      subroutine elmt01(d,ul,xl,ix,tl,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
      implicit real*8(a-h,o-z)
c
c.....nonlinear beam/axisymmetric shell
c
      character*4 head,yyy*80
      logical     bs
      integer*2   ix(1)
      real        xl(ndm,1),tl(1),dm
      real*8      d(7),s(nst,1),shp(2),dd(5,5),btd(5,3),
     1            bm(5,3),sig(5),ul(ndf,1),vl(3,2),p(nst),dot
      common /bdata/  head(20)
      common /cdata/  numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      common /iofile/ ior,iow
      common /ydata/  yyy
c.... input material properties
      if(isw.eq.1) then
        call matl01(d)
        call pconsd(dd,25,0.0d0)
        call pconsd(bm,15,0.0d0)
      else
c.... length, angle, radius, jacobian
        sn = xl(2,2)-xl(2,1)
        cs = xl(1,2)-xl(1,1)
        sl = sqrt(cs*cs + sn*sn)
        bs = d(13).eq.0.0d0
        if(isw.eq.2) then
```

```
c.... check mesh for error
        if(sl.le.0.0d0) then
          write(iow,3001) n
          if(ior.lt.0) write(*,3001) n
        endif
      elseif(isw.eq.5) then
c.... form a lumped mass matrix; length, volume*density
        dv    = d(11)*sl/8.0
        if(bs) then
          p(1)     = 4.0*dv
          p(ndf+1) = p(1)
        else
          p(1)     = dv*(3.*xl(1,1) +    xl(1,2))
          p(ndf+1) = dv*(   xl(1,1) + 3.*xl(1,2))
        endif
        p(2)     = p(1)
        p(3)     = p(1)*d(12)
        p(ndf+2) = p(ndf+1)
        p(ndf+3) = p(ndf+1)*d(12)
      else
c.... form stiffness/residual
        sn   = sn/sl
        cs   = cs/sl
        if(bs) then
          r    = 1.0
          recr = 0.0
        else
          r    = 0.5*(xl(1,1) + xl(1,2))
          recr = 1.0/r
        endif
        dv   = sl*r
c.... shape function derivatives
        shp(2) =  1.0/sl
        shp(1) = -shp(2)
c.... local  displacements
        do 300 k = 1,2
          vl(1,k) = cs*ul(1,k) + sn*ul(2,k)
          vl(2,k) =-sn*ul(1,k) + cs*ul(2,k)
          vl(3,k) = ul(3,k)
300     continue
c.... derivative w,s
        lin = d(5)
        if(lin.eq.0) then
          wks = 0.0
        else
          wks = (vl(2,2) - vl(2,1))/sl
        endif
c.... stresses, strains, d-matrix
        call modl01(sig,vl,dd,d,sn,cs,sl,recr,wks)
        if(mod(isw,3).eq.0) then
          i    = ndf + 2
c.... Load vector in local coordinates (reference system)
          f = d(4)*sl/8.0*dm
          if(bs) then
            p(2) = f*4.0
            p(i) = p(2)
          else
            p(2) = f*(3.*xl(1,1) +    xl(1,2))
            p(i) = f*(   xl(1,1) + 3.*xl(1,2))
          endif
c.... K-sigma tangent matrix
```



```
          if(lin.ne.0) then
            s(2,2) =   r*sig(1)/sl
            s(i,i) =   s(2,2)
            s(2,i) = - s(2,2)
          endif
c.... multiply stress and moduli by jacobian
          do 302 k = 1,5
            sig(k) = sig(k)*dv
            do 301 j = 1,5
              dd(j,k) = dd(j,k)*dv
301         continue
302       continue
          i1=0
          do 309 ii = 1,2
c.... residual G = P - Bt*S
            call bmat01(bm,shp(ii),sn,cs,recr,wks)
            do 303 i = 1,3
              p(i1+i) = p(i1+i) - dot(bm(1,i),sig,5)
303         continue
c.... tangent stiffness matrix
            if(isw.eq.3) then
              do  305 i = 1,3
                do 304 k = 1,5
                  btd(k,i) = dot(bm(1,i),dd(1,k),5)
304             continue
305           continue
              j1 = i1
              do 308 jj = ii,2
                call bmat01(bm,shp(jj),sn,cs,recr,wks)
                do 307  i = 1,3
                  do 306  j = 1,3
                    s(i1+i,j1+j)=s(i1+i,j1+j)+dot(btd(1,i),bm(1,j),5)
306               continue
307             continue
                j1 = j1 + ndf
308           continue
            endif
            i1 = i1 + ndf
309       continue
c.... lower part of stiffness matrix and transformation to global frame
          if(isw.eq.3) then
            do 310 i = 1,3
            do 310 j = 1,3
              s(i+ndf,j) = s(j,i+ndf)
310         continue
            call tran01(s,cs,sn,nst,ndf,1)
          endif
          call tran01(p,cs,sn,nst,ndf,2)
c.... output stresses (N, M, Q)
        elseif(isw.eq.4) then
          mct = mct - 1
          if(mct.le.0) then
             write(iow,2001) head
             if(ior.lt.0) write(*,2001) head
             mct = 50
          endif
          r = 0.5*(xl(1,1) + xl(1,2))
          z = 0.5*(xl(2,1) + xl(2,2))
          write(iow,2002) n,ma,r,z,sig
          if(ior.lt.0) write(*,2002) n,ma,r,z,sig
        endif
      endif
```

```
      endif
c.... format statements
2001  format(1x,20a4//2x,'E L E M E N T   S T R E S S E S'//
     1  '  El  Mat  1-Coor  2-Coor    **NS**    **NPHI**',
     2  '     **MS**     **MPHI**     **QS**'/1x)
2002  format(i5,i4,0p2f8.3,5(1x,1p1e10.3))
3001  format(' *ERROR* Element',i5,' has zero length.')
      end
c
      subroutine bmat01(bm,shp,sn,cs,recr,wks)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      real*8 bm(5,3)
c
c.... nonlinear B-matrix for axisymmetric shells
      bm(1,1) = shp
      bm(1,2) = shp*wks
      bm(2,1) = 0.5*cs*recr
      bm(2,2) =-0.5*sn*recr
      bm(3,3) = shp
      bm(4,1) = bm(2,1)*sn*recr
      bm(4,2) = bm(2,2)*sn*recr
      bm(4,3) = bm(2,1)
      bm(5,2) = shp
      bm(5,3) =-0.5
c
      end
c
      subroutine mat101(d)
      logical pcomp
      character yyy*80,typ*5,type*5
      real*8    d(6)
      common /iofile/ ior,iow
      common /ydata/  yyy
      data   type/'beam '/
c
 1    if(ior.lt.0) then
        write(*,3000)
        read(*,1000) typ
      else
        read(ior,1000) typ
      endif
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1001,err=2) d
      if(pcomp(typ,type)) then
        d(2)  = 0.0
        d(13) = 0.0
      else
        d(13) = 1.0
      endif
      write(iow,2000) typ,d
      if(ior.lt.0) write(*,2000) typ,d
c.... set beam/shell in-plane and bending stiffness values
      d(7)  = d(1)*d(3)/(1.0 - d(2)*d(2))
      d(8)  = d(2)*d(7)
      d(9)  = d(7)*d(3)*d(3)/12.
      d(10) = d(2)*d(9)
      d(11) = d(6)*d(3)
      d(12) = d(3)*d(3)/12.
      return
 2    call perror('PCEL01',yyy)
```



```
      go to 1
c
1000  format(a5)
1001  format(7f10.0)
2000  format(5x,'Rectangular Beam/Axisymmetric Shell Model'/
     x 5x,'Type: ',a5/5x,'Elastic Modulus',g15.4/
     1 5x,'Poisson Ratio',g17.4/5x,'Thickness  ',g19.4/
     2 5x,'Normal Load  ',g17.4/
     3 5x,'Linear(0=l 1=nl)',f9.1/5x,'Mass Density',g18.4/1x)
3000  format(' Input: 1. Type (beam or shell)'/
     1      '         2. E nu h press lin rho'/3x,'>',$)
      end
c
      subroutine mod101(sig,vl,dd,d,sn,cs,sl,recr,wks)
      implicit real*8(a-h,o-z)
      real*8 sig(5),eps(5),vl(3,2),dd(5,5),d(1)
c
c.... elasticity matrix for axisymmetric shells
      dd(1,1) = d(7)
      dd(2,2) = d(7)
      dd(1,2) = d(8)
      dd(2,1) = d(8)
      dd(3,3) = d(9)
      dd(4,4) = d(9)
      dd(3,4) = d(10)
      dd(4,3) = d(10)
      dd(5,5) = 5.*d(7)*(1.0 - d(2))/12.0
c... strains
      v1     = 0.5*((vl(1,1) + vl(1,2))*cs - (vl(2,1) + vl(2,2))*sn)
      eps(1) = (vl(1,2) - vl(1,1))/sl + 0.5*wks*wks
      eps(2) =  v1*recr
      eps(3) = (vl(3,2) - vl(3,1))/sl
      eps(4) = (v1*sn*recr +0.5*(vl(3,1) + vl(3,2))*cs)*recr
      eps(5) = (vl(2,2) - vl(2,1))/sl - 0.5*(vl(3,1) + vl(3,2))
c.... stresses
      sig(1) = dd(1,1)*eps(1) + dd(1,2)*eps(2)
      sig(2) = dd(2,1)*eps(1) + dd(2,2)*eps(2)
      sig(3) = dd(3,3)*eps(3) + dd(3,4)*eps(4)
      sig(4) = dd(4,3)*eps(3) + dd(4,4)*eps(4)
      sig(5) = dd(5,5)*eps(5)
c
      end
c
      subroutine tran01(s,cs,sn,nst,ndf,itype)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8 s(nst,1)
c
c.... itype: 1  Transform matrix s(nst,nst)
c            2  Transform vector s(nst,1)
c
      if(itype.eq.1) then
        do 12 i = 1,nst,ndf
          do 11 j = 1,nst
            t        = s(j,i)*cs - s(j,i+1)*sn
            s(j,i+1) = s(j,i)*sn + s(j,i+1)*cs
            s(j,i  ) = t
11        continue
12      continue
        nn = nst
```

```
      else
        nn = 1
      endif
c
      do 14 i = 1,nst,ndf
        do 13 j = 1,nn
          t        = s(i,j)*cs - s(i+1,j)*sn
          s(i+1,j) = s(i,j)*sn + s(i+1,j)*cs
          s(i  ,j) = t
13      continue
14    continue
c
      end
```


(*b*) El archivo PCELM2.FOR contiene un módulo elemental para el análisis bidimensional del comportamiento de sólido en deformación plana y axisimétrico modelado mediante un comportamiento constitutivo elastoplástico. Sólo se incluyen los subprogramas del modelo de material, mientras que el resto se puede encontrar en el Capítulo 15 del Volumen 1.

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
ELMT02	SUBRUTINA	Rutina del elemento **B**-barra	15
GVC2	SUBRUTINA	Cálculo de las integrales de volumen de las funciones de forma	15
BMAT02	SUBRUTINA	Cálculo de la matriz desplazamiento-deformación	15
STRN02	SUBRUTINA	Cálculo de las deformaciones en un punto	15
STCN02	SUBRUTINA	Cálculo de las integrales de tensión nodal	15
MATL02	SUBRUTINA	Entrada de las propiedades elastoplásticas	16
MODL02	SUBRUTINA	Escalar tensión, módulo tangente	16
ELPL02	SUBRUTINA	Calcular tensión, módulo tangente	16

```
      subroutine matl02(d,it,ib)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8 d(15)
      character*24 wa(2),yyy*80
c.... parameter specification for FEAP materials
      common /hdata/ nh1,nh2
      common /iofile/ ior,iow
      common /ydata/ yyy
c.... output parameters
c          d(*)  -  constants for constitutive equation.
c          it    -  geometry type (0=plane, 1=axisymmetric)
c          ib    -  incompressibility treatment (ib = 0 b-bar,
c                     ib = 1 normal b matrix).
c          nh    -  number of history variables needed for each
c                     stress point (i.e., at gauss points in element).
c
      data wa/' P l a n e   S t r a i n',' A x i s y m m e t r i c'/
c
c....  input the material parameters
  1   if(ior.lt.0) write(*,3000)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=101) it,d(4)
      it  = max(0,min(1,it))
      ib  = 0
      nh  = 9
      nh1 = 36
      if(ior.lt.0) write(*,3001)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1001,err=101) ee,xnu,d(11),d(12),d(13)
      d(1)    = ee/(1. - 2.*xnu)/3.0d0
      d(2)    = ee/(1.+xnu)/2.
```

```
      write(iow,2000) wa(it+1),ee,xnu,d(4),d(11),d(12),d(13)
      if(ior.lt.0) write(*,2000) wa(it+1),ee,xnu,d(4),d(11),d(12),d(13)
      return
101   call perror('PCELM2',yyy)
      go to 1
c.... formats
1000  format(i10,f10.0)
1001  format(8f10.0)
2000  format(2x,'E l a s t i c / P l a s t i c   M a t e r i a l'/
     +       2x,'v o n  M i s e s  Y i e l d - ',a24/
     +  10x,'Youngs Modulus (E)',e17.5/
     +  10x,'Poisson Ratio (nu)',e17.5/
     +  10x,'Mass Density (rho)',e17.5/
     +  10x,'Yield Stress      ',e17.5/
     +   8x,'Linear hardening moduli'/
     +  10x,'Isotropic Hardening',e16.5/
     +  10x,'Kinematic Hardening',e16.5/)
3000  format(' Input: it, rho'/
     +  4x,'it = 0: Plane'/4x,'it = 1: Axisymmetric'/' >',$)
3001  format(' Input: E, nu, Y, H-isotropic, H-kinematic'/3x,'>',$)
      end
c
      subroutine mod102(d,ul,eps,sig,xsj,ndf,ib)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8 d(*),ul(ndf,*),eps(4),sig(5)
      common /elcom2/ g(2,4),ad(4,4)
      common /hdata/  nh1,nh2
      common h(1)
c.... input parameters
c         d(*)     -  material parameters
c         eps(4)   -  current strains at point
c         h(*)     -  history terms at point
c         nh       -  number of history terms
c.... ouput parameters
c         ad(4,4) -  current material tangent moduli
c         sig(4)  -  stresses at point.
c         sig(5)  -  yield at point.
c
c....  compute material moduli and stresses
      call pconsd(ad,16,0.0d0)
      call elp102(d,eps,h(nh2),h(nh2+4),h(nh2+8),sig,ul,ndf,ib)
      nh2 = nh2 + 9
c
c....  multiply by jacobian
      do 110 i = 1,4
        sig(i) = sig(i)*xsj
        do 100 j = 1,4
           ad(i,j) = ad(i,j)*xsj
100     continue
110   continue
c
c.... reorder stresses for stress divergence calculations and prints
      temp   = sig(4)
      sig(4) = sig(3)
      sig(3) = sig(2)
      sig(2) = temp
      end
c
      subroutine elp102(d,eps,epln,alph,ep,sig,ul,ndf,ib)
```



```
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real   dm
      real*8 d(*),ul(ndf,*),eps(4),sig(5),alph(4),epln(4),psi(4),en(4)
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      common /elcom2/ g(2,4),ad(4,4)
c
c.... elasto-plastic model with isotropic / kinematic hardening
c
c.... input parameters - for t-n
c        d       - array of material constants
c        eps     - strains (at t-n+1)
c        sig     - stresses
c        alph    - back stress
c        ep      - effective plastic strain
c.... output parameters - at t-n+1
c        ep      - effective plastic strain
c        sig     - stress tensor
c        alph    - back stress tensor
c        ad      - "tangent" matrix
c
c.... set parameters
      data tt/.816496580927726D+00/
      oneg = d(2)
      twog = d(2) + d(2)
      bulk = d(1)
      elam = bulk - twog/3.
c
c.... compute the trial deviator stress
      treps  = (eps(1) + eps(2) + eps(3))/3.0d0
      do 100 i = 1,3
        eps(i) = eps(i) - treps
100   continue
      do 110 i = 1,4
        sig(i) = twog*(eps(i) - epln(i))
        psi(i) =       sig(i) - alph(i)
110   continue
c
c.... set up elastic tangent
      do 130 i = 1,3
        do 120 j = 1,3
          ad(i,j) = elam
120     continue
        ad(i,i) = elam + twog
130   continue
      ad(4,4) = oneg
c
c.... compute the yield state - J2d
      if(d(11).gt.0.0d0) then
        radius = tt*(d(11) + d(12)*ep)
        psitr  = sqrt(psi(1)**2+psi(2)**2+psi(3)**2+2.d0*psi(4)**2)
        sig(5) = psitr/tt/d(11)
c
c.... compute plasticity solution state
        if (psitr.gt.radius) then
          beta   = 1.d0/(1.d0 + (d(12) + d(13))/(3.d0*oneg))
          gamn   = beta*(psitr - radius)/twog
          ep     = ep + tt*gamn
c
c.... gam3 ensures stress is slightly outside yield surface.
```

```
        gam1   = gamn*twog
        gam2   = (d(13)+d(13))*gamn/3.d0
        gam3   = (1.d0 - 1.d-8)*gamn
        sig(5) = (psitr - gam1 - gam2)/tt/d(11)
        do 140 i = 1,4
          en(i)   = psi(i)/psitr
          sig(i)  =  sig(i)  - gam1*en(i)
          alph(i) =  alph(i) + gam2*en(i)
          epln(i) =  epln(i) + gam3*en(i)
140     continue
c
c.... plastic modification for tangent
        gam1 = twog*gam1/psitr
        gam2 = gam1/3.0d0
        do 160 i = 1,3
          do 150 j = 1,3
            ad(i,j) = ad(i,j) + gam2
 150      continue
          ad(i,i) = ad(i,i) - gam1
 160    continue
        ad(4,4) = ad(4,4) - 0.5*gam1
        gam1 = gam1 - twog*beta
        do 180 i = 1,4
          gam2    = gam1*en(i)
          do 170 j = 1,4
            ad(i,j) = ad(i,j) + gam2*en(j)
 170      continue
 180    continue
      endif
    endif
c
c.... compute trace of strain and add pressure term
    if(ib.eq.0) then
      treps = 0.0d0
      do 190 i = 1,4
        treps = treps + g(1,i)*ul(1,i) + g(2,i)*ul(2,i)
 190  continue
    else
      treps = treps*3.d0
    endif
    press = bulk*treps
    do 200 i = 1,3
      sig(i) = sig(i) + press
 200 continue
c
    end
```


(*c*) El archivo PCELM3.FOR contiene un módulo elemental para resolver problemas caracterizados por una ecuación de Laplace en dos dimensiones. Se incluyen cargas de tipo reactivo:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
ELMT03	SUBRUTINA	Elemento de ecuación de Laplace con término reactivo	16
COORD	SUBRUTINA	Cálculo de coordenadas	16
FLO03	SUBRUTINA	Cálculo de términos de flujo	16
STCN03	SUBRUTINA	Cálculo de flujos nodales	16

```
      subroutine elmt03(d,ul,xl,ix,tl,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
c
c.... two dimensional laplace equation with a reaction term
c
      character*4 head,wlab(2)*12,yyy*80
      integer*2   ix(1)
      real        xl(ndm,*),tl(*),dm,aa
      real*8      d(*),ul(ndf,*),s(nst,nst),p(nst),shp(3,9),
     1            sg(9),tg(9),wg(9),coord
      common /adata/  aa(16000)
      common /bdata/  head(20)
      common /cdata/  numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      common /iofile/ ior,iow
      common /ydata / yyy
      data wlab/'  p l a n e ','axisymmetric'/
c.... compute the quadrature points
      if(isw.gt.2) then
        l = max(1,min(nel/2,3))
        call pgauss(l,lint,sg,tg,wg)
      endif
c.... input material properties
      if(isw.eq.1) then
  1     if(ior.lt.0) write(*,3000)
        call pintio(yyy,10)
        read(yyy,1000,err=110) (d(i),i=1,6),nn,kat
        if(kat.ne.2) kat=1
        nn = max(-1,min(1,nn))
        write(iow,2000) (d(i),i=1,6),nn,wlab(kat)
        if(ior.lt.0) write(*,2000) (d(i),i=1,6),nn,wlab(kat)
        d(7) = nn
        d(8) = kat
        d(9) = d(2)*d(3)
        return
110     call perror('PCELM3',yyy)
        go to 1
c.... compute conductivity matrix and residual
      elseif(mod(isw,3).eq.0) then
        nn  = d(7)
        kat = d(8)
        do 330 l=1,lint
          call shape(sg(l),tg(l),xl,shp,xsj,ndm,nel,ix,.false.)
          xsj = xsj*wg(l)
          if(kat.eq.2) xsj = xsj*coord(xl,shp,ndm,nel)
```

```
        call flo03(1.0d0,shp,ul,q1,q2,qm,uu,ndf,nel)
        if(nn.eq.0) then
          qq = dm*d(4)
          dq = 0.0
        elseif(nn.eq.1) then
          qq = dm*d(4)*exp(d(5)*uu)
          dq = d(5)
        elseif(uu.ne.0.0d0) then
          qq = dm*d(4)*exp(d(5)-d(5)*d(6)/uu)
          dq = d(5)*d(6)/uu**2
        else
          write(*,*) ' ** ELMT03 ERROR ** T = 0.0: stop'
          stop
        endif
        j1 = 1
        do 320 j=1,nel
          a1    = d(1)*shp(1,j)*xsj
          a2    = d(1)*shp(2,j)*xsj
          a3    = qq*shp(3,j)*xsj
c.... compute residual
          p(j1) = p(j1) + a1*q1 + a2*q2 - a3
          a3    = a3*dq
c.... compute tangent
          if(isw.eq.3) then
            i1  = 1
            do 310 i=1,nel
              s(i1,j1) = s(i1,j1)+a1*shp(1,i)+a2*shp(2,i)+a3*shp(3,i)
              i1 = i1 + ndf
310         continue
          endif
          j1 = j1 + ndf
320     continue
330   continue
c.... compute the flows in each element
      elseif(isw.eq.4) then
        call shape(0.0d0,0.0d0,xl,shp,xsj,ndm,nel,ix,.false.)
        call flo03(d,shp,ul,q1,q2,qm,uu,ndf,nel)
        rr  = coord(xl(1,1),shp,ndm,nel)
        zz  = coord(xl(2,1),shp,ndm,nel)
        mct = mct - 1
        if(mct.lt.0) then
          mct = 50
          write(iow,2001) head
          if(ior.lt.0) write(*,2001) head
        endif
        write(iow,2002) n,ma,rr,zz,q1,q2,qm,uu
        if(ior.lt.0) write(*,2002) n,ma,rr,zz,q1,q2,qm,uu
c.... compute heat capacity (mass) matrix
      elseif(isw.eq.5) then
        do 520 l=1,lint
          call shape(sg(l),tg(l),xl,shp,xsj,ndm,nel,ix,.true.)
          xsj = xsj*wg(l)
          if(kat.eq.2) xsj = xsj*coord(xl,shp,ndm,nel)
          j1 = 1
          do 510 j=1,nel
            p(j1) = p(j1) + d(9)*shp(3,j)*xsj
            j1 = j1 + ndf
510       continue
520     continue
```



```
c.... compute the nodal flow values
      elseif(isw.eq.8) then
        call stcn03(ix,d,xl,ul,shp,aa,aa(numnp+1),ndf,ndm,nel,
     1              numnp,sg,tg,wg,lint)
      endif
c.... formats
1000  format(6f10.0,2i10)
2000  format(3x,'Laplace Element with Reaction Loading'//
     1 4x,'Conductivity  ',e12.4/4x,'Specific Heat ',e12.4/
     x 4x,'Density       ',e12.4/4x,'Load Amplitude',e12.4/
     2 4x,'Reaction Exp. ',e12.4/4x,'Ambient Temp. ',e12.4/
     3 4x,'n - (Temp**n) ',i5/   4x,a12,' analysis')
2001  format(1x,20a4//'  L a p l a c e   E q u a t i o n'//
     1 ' elem  mat    1-coord    2-coord    1-flow     2-flow',
     2 '   max flow    U-value'/)
2002  format(2i5,0p2f11.3,1p4e11.3)
3000  format(' Input:K, c, rho, Q, r, Ta, nn, geom(1=plane,2=axisym)'
     1       /3x,'>',$)
      end
c
      double precision function coord(xl,shp,ndm,nel)
      real   xl(ndm,*)
      real*8 shp(3,*)
c
      coord = 0.d0
      do 100 i = 1,nel
        coord = coord + shp(3,i)*xl(1,i)
100   continue
      end
c
      subroutine flo03(d,shp,ul,q1,q2,qm,uu,ndf,nel)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8   shp(3,*),ul(ndf,*)
c.... compute flows at current point
      q1 = 0.0d0
      q2 = 0.0d0
      uu = 0.0d0
      do 100 i = 1,nel
        q1 = q1 - d*shp(1,i)*ul(1,i)
        q2 = q2 - d*shp(2,i)*ul(1,i)
        uu = uu +   shp(3,i)*ul(1,i)
100   continue
      qm =     sqrt(q1*q1 + q2*q2)
      end
c
      subroutine stcn03(ix,d,xl,ul,shp,dt,st,ndf,ndm,nel,numnp,
     1                  sg,tg,wg,lint)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
c....  project values to nodes
      integer*2 ix(*)
      real      dt(numnp),st(numnp,*),xl(ndm,*)
      real*8    d(*),ul(ndf,*),sg(*),tg(*),wg(*),shp(3,*)
      do 110 l = 1,lint
        call shape(sg(l),tg(l),xl,shp,xsj,ndm,nel,ix,.false.)
        call flo03(d,shp,ul,q1,q2,qm,uu,ndf,nel)
        do 100 ii = 1,nel
          ll = abs(ix(ii))
          if(ll.gt.0) then
            xsji     = xsj*shp(3,ii)*wg(l)
```

```
            dt(ll)   = dt(ll)   + xsji
            st(ll,1) = st(ll,1) + q1*xsji
            st(ll,3) = st(ll,3) + q2*xsji
            st(ll,4) = st(ll,4) + qm*xsji
            st(ll,5) = st(ll,5) + ul(1,ii)*xsji
          endif
100     continue
110   continue
      end
```


(*d*) El archivo PCELM4.FOR contiene un módulo elemental para una barra biarticulada en una, dos o tres dimensiones con un comportamiento constitutivo elastoplástico:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*	*Capítulo*
ELMT04	SUBRUTINA	Elemento general de barra biarticulada	16
MODL04	SUBRUTINA	Rutina elastoplástica	16

```
      subroutine elmt04(d,u,x,ix,t,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
c.... any dimensional truss element routine
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real   x(ndm,1),dm
      real*8 d(1),u(ndf,1),s(nst,1),p(1),db(3),dx(3),xx(3)
      character*4 yyy*80
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      common /hdata/  nh1,nh2
      common /iofile/ ior,iow
      go to (1,2,3,3,3,3,2,2),isw
c.... input material properties
1     if(ior.lt.0) write(*,3000)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=110) (d(i),i=1,6)
      write(iow,2000) (d(i),i=1,6)
      d( 7) = d(1)*d(2)
      d( 8) = d(4)*d(2)
      d( 9) = d(5)*d(2)
      d(10) = d(6)*d(2)
      d(11) = d(3)*d(2)
      call pconsr(xx,3,0.0)
      write(iow,2000) (d(i),i=1,6)
      if(ior.lt.0) write(*,2000) (d(i),i=1,6)
      nh1 = 3
      return
110   call perror('PCELM4',yyy)
      go to 1
2     return
c.... compute element arrays
3     xl  = 0.0
      eps = 0.0
      do 30 i = 1,ndm
        dx(i) = x(i,2) - x(i,1)
        xl = xl + dx(i)**2
        eps = eps + dx(i)*(u(i,2)-u(i,1))
        xx(i) = (x(i,2) + x(i,1))/2.
30    continue
      eps = eps/xl
      if(mod(isw,3).eq.0) then
        call modl04(d,eps, sig,ad)
c.... form a residual
        sig = sig/sqrt(xl)
        do 31 i = 1,ndf
          p(i) = dx(i)*sig
          p(i+ndf) = -p(i)
31      continue
c.... compute tangent stiffness
        if(isw.eq.3) then
```

```
          xl = xl*sqrt(xl)
          do 32 i = 1,ndm
            db(i) = ad*dx(i)
            dx(i) = dx(i)/xl
32        continue
          i1 = 0
          do 36 ii = 1,2
            j1 = i1
            do 35 jj = ii,2
              do 33 i = 1,ndm
              do 33 j = 1,ndm
                s(i+i1,j+j1) = db(i)*dx(j)
33            continue
              j1 = j1 + ndf
              do 34 j = 1,ndm
                dx(j) = -dx(j)
34            continue
35          continue
            i1 = i1 + ndf
36        continue
          do 37 i = 1,ndm
          do 37 j = 1,ndm
            s(i+ndf,j) = s(j,i+ndf)
37        continue
        endif
c.... output stress and strain in element
      elseif(isw.eq.4) then
        call modl04(d,eps, sig,ad)
        mct = mct - 1
        if(mct.le.0) then
          call prthed(iow)
          write(iow,2001)
          if(ior.lt.0) write(*,2001)
          mct = 50
        endif
        write(iow,2002) n,ma,xx,sig,eps
        if(ior.lt.0) write(*,2002) n,ma,xx,sig,eps
c.... compute element lumped mass matrix
      elseif(isw.eq.5) then
        sm = d(11)*sqrt(xl)/2.0
        do 52 i = 1,ndm
          p(i    ) = sm
          p(i+ndf) = sm
52      continue
      endif
c.... formats
1000  format(8f10.0)
2000  format(5x,'t r u s s    e l e m e n t'//10x,'Modulus  =',e12.5/
     1   10x,'Area     =',e12.5/10x,'Density  =',e12.5/
     1   10x,'Yield    =',e12.5/10x,'Iso. Hard=',e12.5/
     +   10x,'Kin. Hard=',e12.5)
2001  format(5x,'t r u s s    e l e m e n t'//' elem mate',
     1  4x,'1-coord',4x,'2-coord',4x,'3-coord',5x,'force',7x,'strain')
2002  format(2i5,3f11.4,2e13.5)
3000  format(' Input: E, A, rho, Y, H-iso, H-Kin'/3x,'>',$)
      end
c
      subroutine modl04(d,eps, sig,ad)
      real*8 d(10), eps, sig, ad, yld, hi, sum, gam, h
      common /hdata/  nh1,nh2
      common h(1)
```



```
c.... trial stress
      ad  = d(7)
      sig = d(7)*(eps - h(nh1))
      if(d(8).gt.0.0d0) then
c.... compute plastic corrections
        yld = d(8) + d(9)*h(nh1+2)
        phi = abs(sig - h(nh1+1))
        if(phi.gt.yld) then
          sum       = d(7) + d(9) + d(10)
          gam       = (phi-hld)/sum
          sig       = sig - d(7)*gam
          ad        = ad -  d(7)**2/sum
c.... update the history terms
          sum       = gam*(sig - h(nh1+1))/phi
          h(nh1  ) = h(nh1  ) + gam*sum
          h(nh1+1) = h(nh1+1) + gam*sum*d(10)
          h(nh1+2) = h(nh1+2) + gam
        endif
      endif
      end
```

Referencias

1. O.C. ZIENKIEWICZ y R.L. TAYLOR, *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol 1., McGraw Hill, London, 1989.
2. *Microsoft Fortran Reference*, Versión 5.0, Microsoft Corporation, 1989.
3. J.H. WILKINSON y C. REINSCH, *Linear Algebra. Handbook for Automatic Computation*, Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
4. K.-J. BATHE y E.L. WILSON, *Numerical Methods in Finite Element Analisis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.
5. L. COLLATZ, *Functional Analysis and Numerical Mathematics*, Academic Pess, New York, 1966.
6. H. MATTHIES y G. STRANG, "The solution of nonlinear finite elements equations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14**, 1613–26, 1979.
7. B.N. PARLETT, *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.
8. *EISPACK- The Eigensystem Solution Package*, Argonne National Laboratories, I11.
9. E. STEIN, W. WAGNER y P. WRIGGERS, "Postbuckling analysis of stability problems with nonlinear contact constraints", en *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, (eds. K.J. Bathe, P. Bergan y W. Wunderlich), Springer Verlag, Berlin, 1986.
10. P. WRIGGERS, W. WAGNER y E. STEIN, "Algorithms for non-linear contact constraints with application to stability problems of rod and shells", *Comp. Mech.*, **2**, 215–30, 1987.
11. J.C. SIMO y R.L. TAYLOR, "Consistent tangent operators for rate independent elasto-plasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **48**, 101–18, 1985.
12. C.A ANDERSON y O.C. ZIENKIEWOCZ, "Spontaneous ignition: finite element solutions for steady and transient conditions", *Trans. ASME J. Heat Tranfer*, 398–404, 1974.
13. *Graphics Development Toolkit*, IBM Personal Computer Software, Boca Raton, Fla., 1984.

ÍNDICE DE AUTORES

ÍNDICE TEMÁTICO

El Método de los Elementos Finitos

VOLUMEN 2 - 4ª EDICIÓN

Desde la publicación de la primera edición hace poco más de veinte años, pionera en tratar este tema, la potencia y efectividad del Método de los Elementos Finitos (MEF) han aumentado y se han encontrado muchas apilcaciones nuevas. Esto se ha logrado por una aplicación de la base matemática del método de manera conveniente para ingenieros y científicos. Ahora son posibles procedimientos nuevos y más eficaces, por lo que el MEF tiene una gran aceptación en todos los campos de la ingeniería.

Esta nueva edición está escrita con los mismos objetivos de la original, primero enseñar y segundo presentar una base de referencia del "estado de la cuestión", de gran importancia para ingenieros, físicos e investigadores.

Desde que se escribió la primera edición el número de publicaciones de investigación sobre el MEF ha aumentado casi exponencialmente. Esto ha hecho necesario separar la cuarta edición en dos volúmenes.

El Volumen 1 introduce los conceptos básicos y, por tanto, se concentra únicamente en aplicaciones lineales.

El Volumen 2 cubre un campo de aplicaciones más diverso y amplia las posibilidades de utilización del MEF en nuevas áreas. En esencia se tratan los cuatro temas siguientes:

Aproximaciones de **placas y láminas** (Caps. 1-6) incluyendo desarrollos muy recientes.

Problemas no lineales (Caps.7-8) presentándose las estrategias de solución básicas para diferentes aplicaciones (incluyendo naturalmente problemas de plasticidad y grandes deformaciones en mecánica estructural).

Problemas dependientes del tiempo (Caps. 9-11), destacándose las diferentes aproximaciones por elementos finitos.

Problemas de mecánica de fluidos (Caps.12-15), donde se introducen por primera vez técnicas de elementos finitos para varias ecuaciones no autoadjuntas, presentándose asimismo diferentes aplicaciones desde el caso de flujos aeronáuticos a altas velocidades, hasta problemas de aguas poco profundas

Como en el caso del Volumen 1 se dedica el capítulo final a las **técnicas de programación** para problemas no lineales y transitorios, incluyéndose un programa útil tanto para la enseñanza como para la solución de problemas reales.





ISBN: 84-481-1760-3